MPA联考考试研究中心　组编

公共管理硕士(MPA)专业学位联考
标准化题库

数学分册

中国人民大学出版社

公共管理硕士(MPA)专业学位联考标准化题库数学分册

MPA联考考试研究中心组编

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

公共管理硕士(MPA)专业学位联考标准化题库. 数学分册/MPA 联考考试研究中心组编
北京:中国人民大学出版社,2004

ISBN 7-300-05778-0/G・1132
Ⅰ. 公…
Ⅱ. M…
Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-习题
Ⅳ. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 080788 号

公共管理硕士(MPA)专业学位联考标准化题库
数学分册
MPA 联考考试研究中心组编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242(总编室)		010－62511239(出版部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.net (中国 1 考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	河北三河汇鑫印务有限公司		
开　　本	787×965 毫米 1/16	版　　次	2004 年 8 月第 1 版
印　　张	15.25	印　　次	2004 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	288 000	定　　价	总定价(共五册)118.00 元
			本册定价 25.00 元

目　　录

第一章 微积分

第一节 函数、极限、连续

练习

一、选择题

1. 函数 $f(x)$在(a,b)内有反函数 $f^{-1}(x)$存在，则 $f(x)$必为(　　).
   (A) 有界函数
   (B) 严格单调上升
   (C) 严格单调下降
   (D) 以上结论都不正确
2. 设$[x]$为取整函数，则函数 $f(x)=x-[x]$在$(-\infty,+\infty)$上为(　　).
   (A) 单调上升函数　　(B) 奇函数
   (C) 偶函数　　(D) 周期函数
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=$(　　).
   (A) 1　　(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) 0　　　　　　(D) 2

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=($　　$)$.

(A) ∞　　(B) 0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-e^{x})}{1+e^{\frac{1}{x}}}=($　　$)$.

(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) $\ln2$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=($　　$)$.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) $\frac{3}{2}$　　(D) 2

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=($　　$)$.

(A) 1　　(B) 0　　(C) 2　　(D) $\ln2$

8. 下列各选项中的两函数相等的是(　　).

(A) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$和 $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$

(B) $y=e^{\ln x^3}$ 和 $y=x^3$

(C) $y=\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$和 $v=\sqrt{\dfrac{2+u}{2-u}}$

(D) $y=x$ 和 $y=\dfrac{x^2}{x}$

9. 已知函数 $f(x)$满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,则 $f(x)$是(　　).

(A) 奇函数

(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数

(D) 既是奇函数,也是偶函数

10. 下列数列中收敛的是(　　).

(A) $\{n^2\}$　　　　(B) $\{e^{-1/n}\}$

(C) $\begin{cases}2, & n<50\\ n^2+1, & n\geqslant 50\end{cases}$　　　　(D) $\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{n}{n+2}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

11. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=($　　$)$.

(A) -1　　　　(B) 1

(C) 不存在　　　　(D) 以上结果均不正确

12. 函数 $f(x)=\begin{cases}4-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 在 $x=1$ 点间断是因为(　　).

(A) $f(x)$在 $x=1$ 点无定义

(B) $f(x)$在 $x=1$ 点的左极限不存在

(C) $f(x)$在 $x=1$ 点的右极限不存在

(D) $f(x)$在 $x=1$ 点的左、右极限都存在,但不相等

13. 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(x)>0$,则方程$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在区间(a,b) 内的根是(　　).

(A) 0 个　(B) 1 个　(C) 2 个　(D) 3 个

14. $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(\mathrm{e}^x-x)]^x=$(　　).

(A) 0　(B) e　(C) $\frac{1}{\mathrm{e}}$　(D) 1

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1-\ln(2+x)}{x}=$____________.

2. 设函数 $f(x)$在 x_0 点可导,则 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=$____________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x^2+\mathrm{e}^{2x}}=$____________.

4. 设 $f'(1)=4$,则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{f(3-2x)-f(1)}=$____________.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2]}{(\mathrm{e}^x-1)\ln(\mathrm{e}^x-x)}=$____________.

6. 已知 $f(x)=\begin{cases}-2x^3, & -1\leqslant x<1,\\ -2\sqrt{x}, & 1\leqslant x<4,\\ -x, & x\geqslant 4,\end{cases}$ 则 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域为____________.

7. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上满足 $2f(1+x)+f(1-x)=3\mathrm{e}^x$,则 $f(x)=$____________.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$____________.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+x^3-\ln x}{5^x+x^4+3\ln x}=$____________.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{5^n+3}{n}}=$____________.

11. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则 $a=$____________.

12. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则函数 $f(x)$的间断点为____________.

13. $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=$____________.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=$____________.

15. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x=$____________.

三、计算题

1. 设函数 $f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$，试判别函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$与 $h(x)=f(x)-f(-x)$的奇偶性.

2. 已知函数 $f(x)$满足 $f(x^3)+2f\left(\dfrac{1}{x^3}\right)=3x$，$x\neq0$，试求 $f(x)$.

3. 判别下列函数的奇偶性：

(1) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(2) $y=\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}$；

(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(4) $y=\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)$.

5. 分别求出在 x 趋于 1,0 和∞时，函数$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^3}{2x+3x^3}$的极限值.

6. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ 存在，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

7. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3x)}{x}=A$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$.

8. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

10. 若函数 $f(x)$在 $x=1$ 点处连续，且极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(3-2x)+2}{x-1}$存在，试求 $f(1)$.

11. 证明方程 $x^5-3x-1=0$ 在$(1,2)$内至少有一个实根.

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+\ln(1-x)}{e^x+(x+1)}$.

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}[1+\ln(1+x)]^{\ln x}$.

14. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

15. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

16. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，其中 $x_n=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}_{n\text{重}}$.

17. 试求函数 $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^2}{(x^2+x-2)(1+e^{\frac{1}{x}})}$的连续区间、间断点及其类型.

18. $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x^2+1, & 0<x<2,\end{cases}$求定义域.

19. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & x\geqslant 100,\\ 0, & x<100,\end{cases}$求定义域.

20. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=e^{\ln^2\frac{1}{x}}$

(2) $y=\lg^2\sqrt{3x+1}$

21. 求下列函数的反函数及其定义域.

(1) $y=\dfrac{x}{x+2}$;

(2) $y=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$

答案与解析

一、选择题

1. **答案是**：(D).

解析　首先可知(A)不正确，例如 $y=\frac{1}{x}$，$x\in(0,1)$无界，但它有反函数

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{x},\quad x\in(1,+\infty).$$

其次，(B)，(C)也不正确，试看反例：

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,1],\\ 3-x, & x\in(1,2),\end{cases}$$

有反函数 $f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,1]\\ 3-x, & x\in(1,2)\end{cases}$ 存在，但显然 $f(x)$在$(0,2)$上无单调性.

2. **答案是**：(D).

解析　由$[x]$的定义可知，$[x+1]=1+[x]$，因此，对于任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=(x+1)-(1+[x])=x-[x]=f(x)$，可见 $f(x)$是周期 $T=1$ 的函数，它在一个周期$[0,1)$上的表达式为 $f(x)=x,x\in[0,1)$，所以易知(A)，(B)，(C)都不正确. 故应选(D).

3. **答案是**：(C).

解析　本题是“$0\cdot\infty$”型未定式的极限，可用洛必达法则. 但首先应将其化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，究竟化为哪一种，要视具体情况而定，如本题必须化为“$\frac{\infty}{\infty}$”型，即

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\xlongequal{洛}\lim_{x\to0}\frac{-2x^{-3}}{-2x^{-3}e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0.$$

4. **答案是**：(D).

解析　这是“∞^0”型未定式，可用洛必达法则，但必须先化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}$. 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$是“$0\cdot\infty$”型，若用洛必达法则去计算，则很难求出，这时必须用其他方法：

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$$

$$\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0,$$

于是可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^0=1$.

5. **答案是**：(B).

解析 因为极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$不存在，也不是未定式，所以无法用以上各种方法求此极限.

但是，由 $\lim\limits_{x\to0}\ln(2-e^x)=0$，且$\left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right|\leqslant1$，可知，当 $x\to0$ 时，$\ln(2-e^x)$为无穷小量，函数$\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$是有界函数，因此它们之积仍为无穷小量，即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2-e^x)}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

6. **答案是**：(A).

解析 因为有以下的不等式成立

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$
$$\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(n^2+n)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}.$$

由夹逼定理即知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

7. **答案是**：(D).

解析 取函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，$x\in[0,1]$，将区间$[0,1]$$n$ 等分，分点为 $x_n=\frac{i}{n}$，$i=0,1,\cdots,n$. 在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上取点 $\xi_i=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则函数$\frac{1}{1+x}$，

$x\in[0,1]$的积分和为

$$\sigma_n=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n},$$

于是由定积分的定义

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

8. **答案是**：(C).

解析 两个函数是否为同一函数，只与其定义域和对应法则有关，而与其他因素无关.

	定 义 域		对应法则	是否相等
(A)	① $x\in(3,+\infty)$ ② $x\in(-\infty,-3]\cup(3,+\infty)$	不相同	相同	否
(B)	① $x\in(0,+\infty)$ ② $x\in\mathbf{R}$	不相同	相同	否
(C)	① $x\in[-2,2)$ ② $u\in[-2,2)$	相同	相同	是
(D)	① $x\in(-\infty,+\infty)$ ② $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	不相同	相同	否

9. **答案是**：(A).

解析 因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,

所以 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$, $f(0)=0$.

因为 $0=f(0)=f(x-x)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$,

所以 $f(-x)=-f(x)$.

因此，$f(x)$是奇函数.

10. **答案是**：(B).

解析 (A)中，$n\to\infty$时，$n^2\to\infty$，发散；

(B)中，$n\to\infty$时，$-\frac{1}{n}\to 0$，$\mathrm{e}^{-1/n}\to 1$，收敛；

(C) 中，$n\to\infty$时，$n^2+1\to\infty$，发散；

(D) 中，$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\to 0$，$\frac{n}{n+2}\to 1$，其趋势不确定，发散.

11. **答案是**：(C).

解析 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，故有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

所以应选(C).

12. **答案是**：(D).

解析　$f(x)$的左极限：$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(4-x)=3$，$f(x)$的右极限：$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$，因此 $f(x)$的左、右极限都存在，但不相等，从而 $f(x)$在$x=1$点间断.

13. **答案是**：(B).

解析　令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,$$

$$F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0,$$

$$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0.$$

根据零点定理知，在(a,b)内至少存在一个根.

又因为 $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geqslant2>0$，即 $F(x)$在$[a,b]$上单调增加. 所以，$F(x)=0$在(a,b)内有且仅有一个根.

14. **答案是**：(D).

解析　这是“0^0”型未定式的极限，可用洛必达法则求之，即

$$\lim_{x\to0}[\ln(\mathrm{e}^x-x)]^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}x\ln\ln(\mathrm{e}^x-x)},$$

而

$$\lim_{x\to0}x\ln\ln(\mathrm{e}^x-x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\ln(\mathrm{e}^x-x)}{\frac{1}{x}}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{-x^{-2}[\ln(\mathrm{e}^x-x)](\mathrm{e}^x-x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\ln(\mathrm{e}^x-x)}\cdot\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\cdot\frac{(-1)}{\mathrm{e}^x-x}=\lim_{x\to0}\frac{-x^3}{\ln(\mathrm{e}^x-x)}$$

$$\overset{洛}{=\!=}-\lim_{x\to0}\frac{3x^2(\mathrm{e}^x-x)}{\mathrm{e}^x-1}=0,$$

因此有　$\lim\limits_{x\to0}[\ln(\mathrm{e}^x-x)]^x=\mathrm{e}^0=1$.

二、填空题

1. **答案是**：∞.

解析　因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}=2,\quad\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+x)}{x}=\infty,$$

所以应填∞.

2. **答案是**：不能确定.

解析　因为

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}+\frac{f(x_0-3t)-f(x_0)}{t}+\frac{2f(x_0)}{t}\right],$$

由于 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=f'(x_0)$， $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0-3t)-f(x_0)}{t}=-3f'(x_0)$

可知，当 $f(x_0)=0$ 时，有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=f'(x_0)-3f'(x_0)=-2f'(x_0)$$

当 $f(x_0)\neq 0$ 时，有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=\infty$$

所以该极限值不存在.

3. **答案是**：$1-\ln 2$.

解析 因为函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\ln(1+e^x)}{x^2+e^{2x}}$ 是初等函数且在 $x=0$ 点处有定义，可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，即有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=\left.\frac{\sqrt{x+1}-\ln(1+e^x)}{x^2+e^{2x}}\right|_{x=0}=1-\ln 2$.

4. **答案是**：$-\frac{1}{8}$.

解析 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(3-2x)-f(1)}\xlongequal{x-1=t}\lim_{t\to 0}\frac{t}{f(1-2t)-f(1)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{f(1-2t)-f(1)}{-2t}}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right).$$

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 点可导的定义，可知 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(1-2t)-f(1)}{-2t}=f'(1)=4$，由此可得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(3-2x)-f(1)}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{f'(1)}=-\frac{1}{8}.$$

5. **答案是**：$-\frac{1}{2}$.

解析 这是"$\frac{0}{0}$"型未定式的极限问题，可用洛必达法则求之. 但我们先用等价无穷小将问题化简，然后再用洛必达法则，可使计算更为简洁.

$$原式=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}\cdot\frac{e^x-1-x}{\ln[1+(e^x-1-x)]}\cdot\frac{x^2}{e^x-1-x}\cdot\frac{x}{e^x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1-x}$$

$$\xlongequal{洛}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}}{2x}\right]\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}\right)$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{4x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{2}.$$

6. **答案是**：$(-\infty,2]$.

解析 依题意，得

$-1\leqslant x<1$ 时，$f(x)=-2x^3$，则 $-2<f(x)\leqslant 2$；

$1\leqslant x<4$ 时，$f(x)=-2\sqrt{x}$，则 $-4<f(x)\leqslant -2$；

$x\geqslant 4$ 时，$f(x)=-x$，则 $f(x)\leqslant -4$.

即 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,2]$.

又因为 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域即为 $y=f(x)$ 的值域，故 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 $(-\infty,2]$.

7. **答案是**：$2e^{x-1}-e^{1-x}$.

解析 用 $-x$ 代入等式，有

$$\begin{cases}2f(1+x)+f(1-x)=3e^x,\\ 2f(1-x)+f(1+x)=3e^{-x},\end{cases}$$

由此可解得 $f(1+x)=2e^x-e^{-x}$，令 $1+x=t$，有

$$f(t)=2e^{t-1}-e^{1-t},$$

即知 $$f(x)=2e^{x-1}-e^{1-x}.$$

8. **答案是**：1.

解析 因为由已知条件知

$$|f(x)|\leqslant 1,\quad -\infty<x<+\infty,$$

所以由 $f(x)$ 及复合函数的定义知

$$f[f(x)]=1,\quad -\infty<x<+\infty.$$

9. **答案是**：0.

解析 利用在加减法中，较低阶的无穷大量与较高阶的无穷大量相比较可以忽略的性质求解.

因为 $x\to+\infty$ 时，分子 $2^x+x^3-\ln x$ 是无穷大量，且为几个无穷大量的和、差，并且 $2^x\gg x^3\gg\ln x$，所以 $\ln x, x^3$ 与 2^x 相比都可以忽略. 同理，分母中的 $3\ln x, x^4$ 与 5^x 相比也可以忽略，因此原极限可以看作是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{5^x}$，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+x^3-\ln x}{5^x+x^4+3\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x=0.$$

10. **答案是**：5.

解析 本题使用夹逼准则.

由于

$$\frac{5}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\frac{5^n}{n}}<\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}<\sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{n}}<5\sqrt[n]{\frac{2}{n}}=5\cdot\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$. 故由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}=5.$$

11. **答案是**：-2.

解析 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $f(x)$ 必在 $x=0$ 处连续. 即

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=a,$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}f(x)&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)+e^{2ax}-1}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^{2ax}-1}{x}=2+2a,\end{aligned}$$

所以 $2+2a=a$，则 $a=-2$.

12. **答案是**：$x=1$.

解析 当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$.

当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=0$.

故 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant-1,\\1+x, & -1<x<1,\\1, & x=1,\\0, & x>1.\end{cases}$

由于 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)=0$，所以 $x=-1$ 为连续点；而 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$，所以 $x=1$ 为间断点.

13. **答案是**：0.