



高教版考试用书
www.eduexam.com.cn



2012年 全国硕士研究生 入学统一考试 数学120种 常考题型精解

- 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会
- 主审 赵达夫 铁 军 叶盛标



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2012 NIAN QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE TONGYI KAOSHI
SHUXUE 120 ZHONG CHANGKAO TIXING JINGJIE



2012 年

全国硕士研究生 入学统一考试 数学120种 常考题型精解

- 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会
- 主 审 赵达夫 铁 军 叶盛标
- 参编人员 邬丽丽 丁 勇 张 强
陈一鸣 王彩霞 王 丹
李兰巧 马 媛 张 彬

图书在版编目(CIP)数据

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学 120 种常考
题型精解/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委
会编. —北京:高等教育出版社,2011.3

ISBN 978 - 7 - 04 - 032044 - 2

I. ①2… II. ①全… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学
考试 - 题解 IV. ①O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 039799 号

策划编辑 刘 佳 责任编辑 雷旭波 封面设计 王凌波
责任校对 胡晓琪 责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京市白帆印务有限公司

开 本 787 × 1092 1/16
印 张 15.00
字 数 520 000

购书热线 010 - 58581118
咨询电话 400 - 810 - 0598 800 - 810 - 0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2011 年 3 月第 1 版
印 次 2011 年 3 月第 1 次印刷
定 价 32.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 32044 - 00

前言

近几年来,对全国硕士研究生入学统一考试数学试题的难度,考生评价不一,这表明考研数学命题在不断进步,对学生考查的知识、能力和数学的基本方法也在不断创新和加强。从历年的考试情况来看,往往被考生认为相对较容易的题目反而得分并不高,这也说明很多考生尚未完全领会和掌握所学的知识和方法,想当然地按照自己的方式做题,从而跳入命题老师的陷阱。

《2012年全国硕士研究生入学统一考试数学120种常考题型精解》主要通过将知识点与历年考试中考查的题型相结合的方式,进一步强化考生对考研数学中知识点的理解与运用,增加考生对解题方法的思维训练,锻炼考生的实际动手解题能力,使考生能够真正掌握基础、吃透考研数学题型规律,并运用这些规律达到解题的目的,从而在考试中灵活运用,最终取得优异成绩。

本书严格按照《数学考试大纲》的知识体系编写,每章的体例中均包含“本章命题规律”和“本章重要题型”两部分。

1. 命题规律部分内容导读

本书以章节为序,主要将考试大纲对考研数学所要求的考试内容按照题型方式进行归纳,并总结历年的考试情况,指出每一章的考查形式、考试内容、考试题型及在整个试卷中的比例,使考生熟悉历年真题中各章的考查重点、难点、易错点。

2. 重要题型部分内容导读

该部分主要包括三个方面的内容:“历年真题链接”,“题型攻关点拨”,“典型例题”。其中,“历年真题链接”主要是帮助考生总结历年考试对本章命题的次数、频率、分值情况,使考生对重要题型有进一步的认识;“题型攻关点拨”主要是对本部分所归纳的重要题型进行解题方法、题型应对策略等方面的重要指导,使考生对本题型的学习能够举一反三,容易掌握;“典型例题”主要是根据所讲的方法和题型应对策略举例说明,使考生在学习中对题型、方法不断进行强化认识,逐步提高自己的解题能力。

本书旨在对各章重要题型进行总结,对题型应对策略全面讲解,建议考生在使用本书的时候仔细体会“题型攻关点拨”和题目后的“评注”部分,对可能出现的错误要尽量避免,并将书中所讲述的方法转换成自己的解题方法。

由于篇章有限,本书的“典型例题”部分精选了最典型、最重要的部分题型,建议考生在学习的时候先不要看答案,根据“题型攻关点拨”,先自己动手解题,然后再对照答案,发现自己存在的不足和问题,提高复习效率,养成独立思考的习惯,这会让考生在考研复习过程中受益匪浅。

本书重点在讲解题型和对题型的归纳,学习完本书后建议考生独立完成几套历年真题试卷,以增加对本书的认识和方法的体会。做题时建议考生严格按照考试时间要求进行,以便及时发现自己的不足,及时查漏补缺,以达到演练的目的。

由于时间所限,本书中错误之处在所难免,如有不当之处,恳请考生和老师给予批评指正。

万学海文教学研究中心

2011年2月

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续	1	第六章 重积分	73
第二章 一元函数微分学	14	第七章 曲线积分和曲面积分 (仅数学一要求)	80
第三章 一元函数积分学	34	第八章 无穷级数(仅数学一和 数学三要求)	89
第四章 向量代数和空间解析几何 (仅数学一要求)	58	第九章 常微分方程	101
第五章 多元函数微分学	62		

第二篇 线性代数

第一章 行列式	113	第四章 线性方程组	146
第二章 矩阵	123	第五章 矩阵的特征值和特征向量	156
第三章 向量	134	第六章 二次型	164

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率	172	第五章 大数定律和中心极限定理	218
第二章 随机变量及其分布	181	第六章 数理统计的基本概念	220
第三章 多维随机变量及其分布	189	第七章 参数估计	225
第四章 随机变量的数字特征	204	第八章 假设检验(仅数学一要求)	234

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续

一、本章命题规律

本章函数部分主要是从构建函数关系,或确定函数表达式等方面进行考查;而作为高等数学理论基础的极限,不仅需要准确理解极限的概念、性质和存在的条件,而且要学会利用各种方法求出函数(或数列)的极限,此外,还要会根据题目所给的极限得到相应结论;连续是可导与可积的重要条件,因此要熟练掌握判断函数连续性及间断点类型的方法,特别是分段函数在分段点处的连续性,与此同时,还要了解连续函数的相关性质(如有界性、介值定理、零点定理、最值定理等),这些内容往往会与其他知识点结合起来考查.

本章的知识点可以以多种形式(选择题、填空题、解答题均可)考查,平均来看,本章内容在历年考研试卷中数学一、数学三大约占10分,数学二大约占19分.

二、本章重要题型

重要题型一 求函数的表达式或判断函数的性质

1. 历年真题链接

【数学一】 90—(3)题3分*,99二(1)题3分,05二(8)题4分.

【数学二】 90—(5)题3分,92二(2)题3分,95三(3)题5分,97二(5)题3分,99二(3)题3分,01二(1)题3分,01六题7分,04三(16)题10分.

【数学三】 90二(1)题3分,04二(7)题4分.

2. 题型攻关点拨

求函数的表达式通常出现在客观题中,或作为解答题的一部分.对函数几何特性的考查也主要在客观题中出现,而且这些性质往往会结合其他知识点成为解题的必要条件.

【点拨一】 常见函数表达式的求法:

- (1) 代入法:将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替换.
- (2) 分析法:抓住外层函数的定义域和内层函数的值域之间的关系进行分析,并由此得出结论.
- (3) 图示法:借助函数的直观性将函数进行复合.

【点拨二】 函数奇偶性的判定方法:

- (1) 利用奇函数和偶函数的定义.
- (2) 利用奇函数和偶函数的运算性质:奇函数的代数和为奇函数,偶函数的代数和为偶函数;偶函数之积为偶函数,偶数个奇函数之积为偶函数,奇数个奇函数之积为奇函数,一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.
- (3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若函数的定义域关于原点不对称,那么函数就无奇偶性可言.

【点拨三】 函数(或数列)有界性的判定方法:

* 90—(3)题3分,是指1990年第一大题第(3)小题,分值3分.05二(8)题4分,是指2005年第二大题第(8)小题,分值4分.其余以此类推.

- (1) 利用有界的定义.
- (2) 闭区间上的连续函数是有界函数.
- (3) 若数列的极限存在,则此数列必有界.
- (4) 函数极限的局部有界性:当 $x \rightarrow x_0$ 时,若函数 $f(x)$ 的极限存在,则 $f(x)$ 在 x_0 的某个领域内必有界.
- (5) 若 $|f(x)| \leq M, x \in I, I$ 为有限区间,则 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

【点拨四】 函数周期性的判定方法:

- (1) 利用周期函数的定义.
- (2) 若 T 为函数 $f(x)$ 的周期,则函数 $f(ax+b)$ ($a \neq 0$) 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.
- (3) 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.
- (4) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 T_1, T_2 ($T_1 \neq T_2$) 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

【点拨五】 函数单调性的判定方法:

- (1) 利用单调性的定义:在函数 $f(x)$ 的定义域内任取两点 x_1, x_2 ,不妨设 $x_1 < x_2$,若 $f(x_1) < f(x_2)$,则函数 $f(x)$ 单调递增;若 $f(x_1) > f(x_2)$,则函数 $f(x)$ 单调递减.
- (2) 利用函数一阶导数的符号与单调性的关系:设 $x \in I$,若 $f'(x) > 0$,则函数 $f(x)$ 在 I 内单调递增;若 $f'(x) < 0$,则函数 $f(x)$ 在 I 内单调递减.

3. 典型例题

【例1】 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x + |x|), & |x| > 1, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

分析 本题是求分段函数的复合函数问题.

解 利用分析法求解.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x + |x|), & |x| > 1, \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ x, & x > 1, \\ 0, & x < -1, \end{cases}$$

且

$$f[g(x)] = \begin{cases} -1, & |g(x)| \leq 1, \\ 1, & |g(x)| > 1. \end{cases}$$

(1) 要使 $|g(x)| \leq 1$:

当 $|x| \leq 1$ 时, $|g(x)| = |x^2 - 1| \leq 1$; 当 $x < -1$ 时, $|g(x)| = 0 < 1$. 即当 $x \leq 1$ 时, $|g(x)| \leq 1$.

(2) 要使 $|g(x)| > 1$:

当 $x > 1$ 时, $|g(x)| > 1$.

综上所述,可得

$$f[g(x)] = \begin{cases} -1, & x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

评注 通常情况下,对于初等函数的复合,可采用代入法.如:已知 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f[f(x)]$.

【例2】 $f(x) = \frac{\sin x}{x} e^{\sin x}$ (其中 $x \neq 0$) 是().

A. 周期函数 B. 奇函数 C. 单调函数 D. 有界函数

分析 函数的周期性、奇偶性一般用定义判定;单调性则更多是采用导数的符号来判定;而有界性一般是利用函数极限存在的局部有界性来判定.

解法一 排除法.

(1) 虽然 $\sin x$ 是周期函数,但 $\frac{\sin x}{x}$ 不是周期函数,所以 $f(x)$ 不是周期函数,排除选项 A.

(2) 因为 $f(-x) = \frac{-\sin x}{-x} e^{-\sin x} = \frac{\sin x}{x} e^{-\sin x} \neq -f(x)$,所以 $f(x)$ 不是奇函数,排除选项 B.

(3) 当 $x=k\pi \neq 0$ 时, $f(x)=0$; 当 $x \neq k\pi$ 时, $f(x) \neq 0$. 故 $f(x)$ 不是单调函数, 排除选项 C.

由排除法知, 应选 D.

解法二 直接验证 $f(x)$ 是有界函数.

因 $f(x)$ 为初等函数, 所以要验证 $f(x)$ 为有界函数, 只需证明 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 均存在.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} e^{\sin x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} e^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot (\sin x \cdot e^{\sin x}) = 0,$$

所以 $f(x)$ 为有界函数, 故选 D.

重要题型二 求数列极限

1. 历年真题链接

【数学一】 96 三(2)题 5 分, 98 七题 6 分, 03 二(2)题 4 分, 06 三(16)题 12 分, 08 一(4)题 4 分, 11 三(18)题 10 分.

【数学二】 93 二(1)题 3 分, 94 三(3)题 5 分, 95 一(4)题 3 分, 98 二(1)题 3 分, 99 二(4)题 3 分, 99 十题 7 分, 02 一(4)题 3 分, 02 八题 8 分, 03 二(1)题 4 分, 03 二(2)题 4 分, 04 二(9)题 4 分, 06 三(18)题 12 分, 08 一(5)题 4 分, 11 三(19)题 10 分.

【数学三】 98 一(1)题 3 分, 02 一(1)题 3 分.

2. 题型攻关点拨

求数列极限的问题主要以下列三种形式出现.

【点拨一】 有关抽象数列的极限问题.

由于抽象数列的形式是未知的, 所以这类问题有一定的难度, 通常情况下在选择题中以判定数列收敛性的形式出现, 因此可以通过举反例的方法进行排除. 此外, 这类问题也可以按照定义、基本性质及运算法则等直接验证.

【点拨二】 求具体数列 $\{a_n\}$ 的极限, 可以采用以下几种方法:

(1) 利用单调有界必收敛准则求数列极限.

首先, 用数学归纳法或不等式的放缩法判断数列的单调性和有界性, 确定数列极限的存在性;

其次, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, 通过对等式两边取极限, 建立关于 l 的方程并求得 l 的值, 从而得到数列 $\{a_n\}$ 的极限值.

(2) 利用函数极限求数列极限.

数列极限不能直接用洛必达法则求解. 如果这个数列极限能看成某函数极限的特例, 即形如 $a_n = f(n)$, 根据函数极限和数列极限的关系, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 此时可以用洛必达法则求解.

【点拨三】 求 n 项和或 n 项积数列的极限, 主要有以下几种方法:

(1) 利用特殊级数求和法.

如果所求的 n 项和数列极限可以通过错位相消或者转化成极限已知的 n 项和数列极限, 那么通过整理直接就可以得到极限结果(如下面的例 3).

(2) 利用幂级数求和法.

若可以找到这个 n 项和所对应的幂级数, 则可以利用幂级数求和函数的方法把它所对应的和函数求出, 再根据这个极限的形式将相应的量代入到和函数中, 求出相应极限值.

(3) 利用定积分定义求极限.

若 n 项和式子中每一项均可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 剩余的项可用一个通项求和的形式表示, 则可以考虑用定积分定义求解(如下面的例 4).

(4) 利用夹逼定理求极限.

若数列的各项均可提出一个因子, 而剩余的项不能用一个通项表示, 但其各项是按递增或递减排列的, 则可以考虑用夹逼定理求 n 项和数列的极限.

(5) 求 n 项积数列的极限, 一般先取对数化为 n 项和的形式, 然后再利用求解 n 项和数列极限的方法进行计算.

另外还可以考虑用以下方法求解:

- ① 分子、分母同乘以一个因子,使分子、分母可进行化简.
 ② 拆通项或因式分解,使之成为两因式的乘积形式,在整个相乘过程中消去中间项,从而化繁为简求极限.

3. 典型例题

【例1】 已知 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ ($n=1, 2, \dots$), $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$ ($a < b$), 则数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ ().

- A. 都收敛于同一值
 B. 都收敛,但不一定收敛于同一值
 C. 都发散
 D. 无法判断敛散性

分析 根据常见不等式 $\sqrt{x_n y_n} \leq \frac{x_n + y_n}{2}$, 容易验证数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 的单调性和有界性,从而得出结论.

解 由已知易得 $x_n > 0, y_n > 0$. 因为

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \leq \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1},$$

所以

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n,$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{y_n + y_n}{2} = y_n,$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调递增, 数列 $\{y_n\}$ 单调递减. 又

$$a = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq y_n \leq \dots \leq y_1 = b,$$

所以数列 $\{x_n\}$, 数列 $\{y_n\}$ 都有界, 根据“单调有界数列必收敛”准则, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 都存在, 故排除选项 C 和 D.

下面讨论两个数列是否收敛于同一值.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 由 $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + y_n}{2}, \text{ 即 } B = \frac{A+B}{2},$$

解得 $A=B$, 故选 A.

【例2】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{an} - 1)$ ($a > 0$).

分析 $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1, \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), 所以此题为“ $\infty \cdot 0$ ”型极限, 一般转化成函数极限, 再用洛必达法则求解.

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{an} = 1$ 可知

$$\sqrt[n]{an} - 1 = e^{\frac{1}{n} \ln(an)} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln(an) \quad (n \rightarrow \infty),$$

用等价无穷小量替换, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{an} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \frac{1}{n} \ln(an) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(an)}{\sqrt[n]{n}},$$

由此转化为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式. 为使用洛必达法则求解, 引入函数 $f(x) = \frac{\ln(ax^2)}{x}$ ($x > 0$), 则有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ax^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln a + 2 \ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln a}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} \\ &\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{1}{x} = 0, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{an} - 1) = 0.$$

【例3】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

分析 数列通项 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 可采用裂项错位相消, 求得 n 项和数列的极限.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1.$

【例4】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1^2+1} + \frac{2}{n^2+2^2+2} + \frac{3}{n^2+3^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2+n} \right).$

分析 此题为求 n 项和数列的极限,由通项的形式,可先将数列的通项适当放大或缩小,再利用定积分的定义或夹逼定理求解.

解 $\frac{1}{n^2+1^2+1} + \frac{2}{n^2+2^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2+n} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2+k},$

且有 $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2},$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$

又 $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1-1}{n^2+(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{n^2+(k+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+(k+1)^2},$

因为 $0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+(k+1)^2} = 0,$

而 $\sum_{k=1}^n \frac{k+1}{n^2+(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} + \frac{n+1}{n^2+(n+1)^2} - \frac{1}{n^2+1},$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2} - \frac{1}{n^2+1} \right] = 0,$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+(k+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{n^2+(k+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{2} \ln 2.$

由夹逼定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2+k} = \frac{1}{2} \ln 2.$

【例5】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sqrt{(n+1)^2(n+2)^2 \cdots (2n)^2}.$

分析 对于 n 项积的数列极限,可利用对数恒等式化为求 n 项和数列的极限.

解 因为 $\ln \left[\frac{1}{n^2} \sqrt{(n+1)^2(n+2)^2 \cdots (2n)^2} \right] = \frac{2}{n} [\ln(n+1) + \ln(n+2) + \cdots + \ln(2n)] - 2 \ln n$
 $= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) - 2 \ln n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n [\ln(n+k) - \ln n]$
 $= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right),$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sqrt{(n+1)^2(n+2)^2 \cdots (2n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \left[\frac{1}{n^2} \sqrt{(n+1)^2(n+2)^2 \cdots (2n)^2} \right]}$
 $= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)} = e^{2 \int_0^1 \ln(1+x) dx},$

其中 $\int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x+1} dx$
 $= \ln 2 - \left[x - \ln(1+x) \right] \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1,$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sqrt{(n+1)^2(n+2)^2 \cdots (2n)^2} = e^{2(2 \ln 2 - 1)} = \frac{16}{e^2}.$

重要题型三 求函数的极限

1. 历年真题链接

【数学一】 92 二(1)题 3 分,97 一(1)题 3 分,98 一(1)题 3 分,99 一(1)题 3 分,00 三题 5 分,03 一(1)题 4 分,06 一(1)题 4 分,08 三(15)题 9 分,10 一(1)题 4 分,11 三(15)题 10 分.

【数学二】 89 一(1)题 3 分,89 二(3)题 4 分,91 一(5)题 3 分,91 三(3)题 5 分,92 一(3)题 3 分,92 三(1)题 5 分,93 一(2)题 3 分,93 三(2)题 5 分,95 三(1)题 5 分,96 一(4)题 3 分,97 三(1)题 5 分,98 一(2)题 3 分,99 三题 5 分,00 一(1)题 3 分,00 二(4)题 3 分,01 一(1)题 3 分,02 二(3)题 3 分,02 五题 7 分,04 三(15)题 10 分,05 三(15)题 11 分,08 三(15)题 9 分,09 三(15)题 9 分,11 二(9)题 4 分.

【数学三】 89 三(1)题 5 分,90 一(1)题 3 分,91 二(1)题 3 分,91 三题 5 分,93 一(1)题 3 分,98 二(2)题 3 分,02 一(1)题 3 分,02 三题 5 分,04 三(15)题 8 分,05 一(1)题 4 分,05 三(15)题 8 分,08 三(15)题 9 分,10 三(15)题 10 分,11 三(15)题 10 分.

2. 题型攻关点拨

【点拨一】 函数极限存在的充要条件:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

在讨论分段函数在分段点处的极限时多用此结论.

【点拨二】 等价无穷小量替换.

常用的等价无穷小量替换有:当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x,$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

要特别注意的是,只有被替换项为整个表达式的乘积因子时,才能进行等价无穷小量替换.

【点拨三】 求函数极限在客观题、解答题中均有出现,主要是求七种未定式的极限.这七种未定式是:“ $\frac{0}{0}$ ”型、

“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型、“ $0 \cdot \infty$ ”型、“ $\infty - \infty$ ”型、“ 1^∞ ”型、“ 0^0 ”型和“ ∞^0 ”型.

(1) “ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式是最基本的未定式,解此类问题的方法可以归纳为以下几种:

- ① 通过恒等变形约去分子、分母中极限为 0 或 ∞ 的因子,然后用极限四则运算法则求解.
- ② 用洛必达法则求解.
- ③ 用泰勒展开式求解.
- ④ 用变量替换与重要极限公式求解.
- ⑤ 用等价无穷小量替换求解.

(2) “ $0 \cdot \infty$ ”型未定式,要先转化成“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式,再利用求“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式极限的方法求此极限.

(3) “ $\infty - \infty$ ”型未定式也是要先转化成“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式再求解,其方法有:

- ① 若是分式函数之差的“ $\infty - \infty$ ”型未定式,通分可将其化为“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式.
- ② 若是与根式函数的和、差有关的“ $\infty - \infty$ ”型未定式,有理化、提取公因式等方法可将其化为“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式.
- ③ 若是多项式或其他函数之差的“ $\infty - \infty$ ”型未定式,提取公因式或变量替换可将其化为“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式.

(4) 求“ 1^∞ ”型、“ 0^0 ”型和“ ∞^0 ”型未定式的极限.

① 根据指数和底数的变化趋势可以将幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的极限分为“ 1^∞ ”型、“ 0^0 ”型和“ ∞^0 ”型. 由于 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, 故 $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}$, 将幂指函数的未定式转化为“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式的极限, 最后再化为求“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式的极限.

② 对于“ 1^∞ ”型未定式, 拆底数、配指数后可利用第二个重要极限公式, 有

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim \{1 + [f(x) - 1]\}^{\frac{1}{f(x)-1} [f(x)-1] g(x)} = e^{\lim [f(x)-1] g(x)}.$$

3. 典型例题

【例1】求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[2x - x^2 \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

分析 本题为“ $\infty - \infty$ ”型未定式, 作变量替换 $t = \frac{1}{x}$ 后未定式化为“ $\frac{0}{0}$ ”型.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2x - x^2 \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right] & \stackrel{\text{令 } t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - \ln(1+2t)}{t^2} \\ & \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{2}{1+2t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{t(1+2t)} \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{1+2t} = 2. \end{aligned}$$

【例2】求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{2}{x}} + \cdots + a^{\frac{n}{x}}}{n} \right)^x \quad (a > 0).$

分析 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $a^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{2}{x}} + \cdots + a^{\frac{n}{x}} \rightarrow n$, 故此极限是“ 1^∞ ”型未定式, 可转化为指数函数 $e^{g(x) \ln f(x)}$ 后求 $g(x) \ln f(x)$ 的极限, 即化为“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 再化为“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式. 本题也可以利用公式 $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim [f(x)-1] g(x)}$ 求解.

$$\begin{aligned} \text{解法一} \quad \text{原式} &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{a^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{2}{x}} + \cdots + a^{\frac{n}{x}}}{n}} \stackrel{\text{令 } t = \frac{1}{x}}{=} e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(a^t + a^{2t} + \cdots + a^{nt}) - \ln n}{t}} \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t \ln a + 2a^{2t} \ln a + \cdots + na^{nt} \ln a}{a^t + a^{2t} + \cdots + a^{nt}}} = e^{\frac{(1+2+\cdots+n) \ln a}{n}} \\ &= e^{\frac{n(n+1)}{2n} \ln a} = e^{\frac{(n+1) \ln a}{2}} = a^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法二} \quad \text{原式} &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{x}} + \cdots + a^{\frac{n}{x}}} - n}{n} \cdot x} \stackrel{\text{令 } t = \frac{1}{x}}{=} e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t + \cdots + a^{nt} - n}{nt}} \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t \ln a + 2a^{2t} \ln a + \cdots + na^{nt} \ln a}{n}} \\ &= e^{\frac{n(n+1)}{2n} \ln a} = e^{\frac{(n+1) \ln a}{2}} = a^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

【例3】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \left(1 + e^{\frac{2}{x}} \right)}{\ln \left(1 + e^{\frac{1}{2x}} \right)} - 4[x] \right]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

分析 本题为求隐含的分段函数的极限, 在分段点处应根据极限的充要条件来求解: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

而 $x \rightarrow 0^+$ 时 $[x] = 0, e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty; x \rightarrow 0^-$ 时 $[x] = -1, e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$.

解 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln \left(1 + e^{\frac{2}{x}} \right)}{\ln \left(1 + e^{\frac{1}{2x}} \right)} - 4[x] \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left[e^{\frac{2}{x}} \left(e^{-\frac{2}{x}} + 1 \right) \right]}{\ln \left[e^{\frac{1}{2x}} \left(e^{-\frac{1}{2x}} + 1 \right) \right]} - 4 \times 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln e^{\frac{2}{x}} + \ln \left(1 + e^{-\frac{2}{x}} \right)}{\ln e^{\frac{1}{2x}} + \ln \left(1 + e^{-\frac{1}{2x}} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x} + \ln \left(1 + e^{-\frac{2}{x}} \right)}{\frac{1}{2x} + \ln \left(1 + e^{-\frac{1}{2x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 + 2x \ln \left(1 + e^{-\frac{2}{x}} \right)}{1 + 2x \ln \left(1 + e^{-\frac{1}{2x}} \right)} = 4;
\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 0^-$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\ln \left(1 + e^{\frac{2}{x}} \right)}{\ln \left(1 + e^{\frac{1}{2x}} \right)} - 4[x] \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln \left(1 + e^{\frac{2}{x}} \right)}{\ln \left(1 + e^{\frac{1}{2x}} \right)} - 4 \times (-1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln \left(1 + e^{\frac{2}{x}} \right)}{\ln \left(1 + e^{\frac{1}{2x}} \right)} + 4 \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{2x}} + 4 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{e^{\frac{2}{x}}} + 4 = 4,
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \left(1 + e^{\frac{2}{x}} \right)}{\ln \left(1 + e^{\frac{1}{2x}} \right)} - 4[x] \right] = 4.$$

评注 求分段函数在分段点处的极限, 或函数表达式中含有左、右极限不相等的项 (如 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\frac{1}{x}}$, $\arctan \frac{1}{x}$ 和取整函数 $[x]$ 等) 时, 要分别求出左、右极限, 以此判断函数极限是否存在.

【例 4】 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$, 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} e^t f(1 + e^{\sin^2 x} - e^t) dt}{x^2 \ln(\cos x)}.$$

分析 由已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$, 故有 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, 且

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1.$$

显然, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + \cos x - 1) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2.$$

又因极限式中含有变限积分, 且为“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式, 考虑用洛必达法则.

令 $1 + e^{\sin^2 x} - e^t = u$, 当 $t=0$ 时 $u = e^{\sin^2 x}$, 当 $t = \sin^2 x$ 时 $u = 1$, 且 $d(1 + e^{\sin^2 x} - e^t) = du$, 即 $-e^t dt = du$, 则有

$$\int_0^{\sin^2 x} e^t f(1 + e^{\sin^2 x} - e^t) dt = - \int_{e^{\sin^2 x}}^1 f(u) du = \int_1^{e^{\sin^2 x}} f(u) du.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} e^t f(1 + e^{\sin^2 x} - e^t) dt}{x^2 \ln(\cos x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{e^{\sin^2 x}} f(u) du}{-x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{\sin^2 x}) e^{\sin^2 x} 2 \sin x \cos x}{2x^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{\sin^2 x}) \sin 2x}{2x^3} e^{\sin^2 x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{\sin^2 x})}{2x^3} 2x = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{\sin^2 x})}{x^2} \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{\sin^2 x}) - f(1)}{e^{\sin^2 x} - 1} \cdot \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{\sin^2 x}) - f(1)}{e^{\sin^2 x} - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{x^2} \\
&= -f'(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = -f'(1) \cdot 1 = -1.
\end{aligned}$$

评注 利用洛必达法则求“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式的极限时应注意以下几点:

- (1) 含有典型的“极限不存在因子”时,一般先不用洛必达法则.
- (2) 每用一次洛必达法则后,应整理极限不为零的因子,将其值先求出.
- (3) 优先考虑等价无穷小量替换,以简化运算.
- (4) 求含有变限积分的极限问题,一般先利用洛必达法则或积分中值定理去掉积分号.

重要题型四 已知极限求待定参数

1. 历年真题链接

【数学一】 96 —(1) 题 3 分.

【数学二】 90 二(1) 题 3 分, 90 三(1) 题 5 分, 94 二(1) 题 3 分, 98 四题 5 分, 00 二(1) 题 3 分, 08 二(9) 题 4 分, 10 —(1) 题 4 分.

【数学三】 01 四题 6 分, 04 —(1) 题 4 分, 10 —(1) 题 4 分, 11 —(1) 题 4 分.

2. 题型攻关点拨

已知函数极限求其中的参数,主要是根据极限存在这一前提,确定此函数每一部分的趋势或之间的关系,进而建立等式关系,最后求出相应参数.

【点拨一】 对于含有一个参数的极限问题,一般是先求出含有参数的极限,再从对应极限的等式中解出参数.

【点拨二】 对于含有多个参数的极限问题,一般是由代数、三角的恒等变形、等价无穷小量替换、洛必达法则、极限四则运算或根式有理化、函数连续的充分必要条件等,得到确定参数的方程组,最后解得参数值.

3. 典型例题

【例】 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + b \cos x - 1}{\int_0^{x^2} \ln(1+ct) dt} = 1$ ($c \neq 0$), 求实数 a, b, c 的值.

分析 此类题属于含有多个参数的极限问题,可以根据极限关系确定参数满足的方程.

解 由已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + b \cos x - 1}{\int_0^{x^2} \ln(1+ct) dt}$ 存在,又因为分母极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{x^2} \ln(1+ct) dt = 0$, 所以分子极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + b \cos x - 1) = 0$, 由此解得 $b - 1 = 0$, 即 $b = 1$.

把 $b = 1$ 代入原极限,得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + \cos x - 1}{\int_0^{x^2} \ln(1+ct) dt} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - \sin x}{2x \cdot \ln(1+cx^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - \sin x}{2x \cdot cx^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a - \cos x}{2cx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a - \cos x}{6cx^2}.
\end{aligned}$$

(*)

又由于 $\lim_{x \rightarrow 0} 6cx^2 = 0$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} (2a - \cos x) = 0$, 即有 $2a = 1, a = \frac{1}{2}$.

把 $a = \frac{1}{2}$ 代入(*)式,得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6cx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{6cx^2} = \frac{1}{12c} = 1,$$

解得 $c = \frac{1}{12}$.

综上可得 $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{1}{12}$.

评注 已知极限求参数问题是考研数学试题中的常见题型之一,与此类似的题型还有:已知含有参数的函数在某一点处的连续性或可导性,要求确定式中参数的值.

重要题型五 无穷小量的比较与无穷小量阶的确定

1. 历年真题链接

【数学一】 04 二(7)题 4 分,07 一(1)题 4 分,09 一(1)题 4 分.

【数学二】 92 二(1)题 3 分,96 二(1)题 3 分,97 二(1)题 3 分,99 二(2)题 3 分,01 二(2)题 3 分,02 十题 8 分,03 一(1)题 4 分,04 二(7)题 4 分,05 一(5)题 4 分,06 三(15)题 10 分,07 一(1)题 4 分,09 一(2)题 4 分,11 一(1)题 4 分.

【数学三】 89 二(1)题 3 分,92 二(2)题 3 分,97 二(1)题 3 分,07 一(1)题 4 分.

2. 题型攻关键点

【点拨一】 无穷小量的比较或确定无穷小量的阶.

比较无穷小量阶的高低,也就是判断一个无穷小量是另一个无穷小量的高阶、同阶、等价或低阶无穷小量,其实质就是求“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式的极限,所以有关求解“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式极限的方法都可以用,具体可参照重要题型三.

当 $x \rightarrow x_0$ 时,若是对 3 个或 3 个以上的无穷小量 $f_m(x)$ ($m=1,2,\dots$) 进行比较,那么可考虑分别先与一个参照量如 $(x-x_0)^n$ 进行比较,由 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_m(x)}{(x-x_0)^n}$ 存在且不等于零定出常数 $n_m > 0$,确定 $f_m(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的 n_m 阶无穷小量后,再比较 n_m ($m=1,2,\dots$) 的大小.

【点拨二】 由无穷小量的关系,确定一些参数.

此类问题的实质是由无穷小量的关系,转化为已知极限确定参数的问题,此时,可以用洛必达法则、等价无穷小量替换等方法解决,具体可参照重要题型四.

3. 典型例题

【例 1】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{f(x)}{x^3} + \frac{\sin x^3}{x^4} \right] = 5$, 则 $f(x)$ 是 x 的 ().

A. 等价无穷小量 B. 同阶但不等价的无穷小量 C. 高阶无穷小量 D. 低阶无穷小量

分析 判断 $f(x)$ 是 x 的何种无穷小量,实质就是求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$. 根据已知条件先构造 $f(x)$ 的解析式,再求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

解 已知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{f(x)}{x^3} + \frac{\sin x^3}{x^4} \right] = 5, \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - xf(x)}{x^4} = 5,$$

可知

$$f(x) = \frac{\sin x^3 - 5x^4 + o(x^4)}{x},$$

则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 - 5x^4 + o(x^4)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^2} - 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^2} = 0, \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小量,故选 C.

【例 2】 试求当 k 为何值时, $\int_0^x \sin t^2 \cdot (e^{t^2} - 1) dt$ 与 x^k 是同阶无穷小量,并求出此时的极限值

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 \cdot (e^{t^2} - 1) dt}{x^k}.$$

分析 根据同阶无穷小量的定义, 本题实质就是求 k 为何值时, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 \cdot (e^{t^2} - 1) dt}{x^k}$ 存在且不等于 0.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 \cdot (e^{t^2} - 1) dt}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^{k-2}} \\ &\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{(k-2)x^{k-3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(k-2)x^{k-3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(k-2)x^{k-5}}, \end{aligned}$$

要使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(k-2)x^{k-5}}$ 存在且不等于 0, 必须满足 $k-5=0$, 即 $k=5$.

当 $k=5$ 时, $\int_0^x \sin t^2 \cdot (e^{t^2} - 1) dt$ 与 x^5 是同阶无穷小量, 此时

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 \cdot (e^{t^2} - 1) dt}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(5-2) \cdot x^0} = \frac{1}{3}.$$

重要题型六 讨论函数的连续性与间断点的类型

1. 历年真题链接

【数学二】 89—(6)题 3 分, 90 二(5)题 3 分, 93 二(2)题 3 分, 94—(1)题 3 分, 95 二(1)题 3 分, 97—(1)题 3 分, 98 三题 5 分, 00 二(1)题 3 分, 01 四题 7 分, 02—(1)题 3 分, 03 三题 10 分, 04—(1)题 4 分, 05 二(12)题 4 分, 06—(2)题 4 分, 07—(2)题 4 分, 08—(4)题 4 分, 09—(1)题 4 分, 10—(1)题 4 分.

【数学三】 90—(2)题 3 分, 92 三题 5 分, 98 二(2)题 3 分, 03 二(1)题 4 分, 03 三题 8 分, 04 二(8)题 4 分.

2. 题型攻关点拨

【点拨一】 判断函数连续性的方法:

- (1) 根据连续函数的四则运算法则、复合运算法则判断函数的连续性.
- (2) 基本初等函数在定义域内是连续的.
- (3) 初等函数在定义区间内是连续的.

【点拨二】 确定函数的间断点可以按以下步骤进行:

- (1) 找出函数的定义域, 若函数在某点无意义, 则该点为间断点; 若函数在该点有定义, 再检验下一步.
- (2) 检查该点是否为初等函数定义区间内的点, 若是, 则该点为函数的连续点; 否则看函数在这一点极限是否存在, 若极限不存在, 则该点为函数的间断点, 若极限存在, 再检查下一步.
- (3) 若函数在该点的极限值等于函数值, 则为连续点; 若不相等, 则为间断点. 最后根据定义, 判断该点是哪种类型的间断点.

【点拨三】 判断函数间断点的类型:

- (1) 设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0+0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0-0)$ 存在, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点.
 - ① 若 $f(x_0+0) = f(x_0-0) \neq f(x_0)$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点.
 - ② 若 $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.
- (2) 若 $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ 至少有一个不存在, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

【点拨四】 已知函数的连续性, 确定其中参数.

由函数连续的充分必要条件可知,函数在一点连续,则函数在这点的左极限与右极限相等,且等于这点的函数值,因此,已知函数的连续性,确定其中参数的问题就可以转化为已知函数极限求其中参数的问题,具体求解方法可以参照重要题型四.

3. 典型例题

【例1】 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n + x^n)}{n+2}$ ($x > 0$), 则().

A. $x=3$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点 B. 函数 $f(x)$ 在定义域内连续

C. $x=3$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点 D. $x=3$ 为 $f(x)$ 的可去间断点

分析 先求极限确定 $f(x)$ 的表达式,再利用连续的定义判定函数在定义域内是否连续,如果不连续,再进一步判断间断点类型.

解 当 $0 < x \leq 3$ 时,有

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\{ 3^n \left[1 + \left(\frac{x}{3} \right)^n \right] \right\}}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 3 + \ln \left[1 + \left(\frac{x}{3} \right)^n \right]}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 3}{n+2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left[1 + \left(\frac{x}{3} \right)^n \right]}{n+2} \quad \left(0 < \frac{x}{3} \leq 1 \right) \\ &= \ln 3 + 0 = \ln 3; \end{aligned}$$

当 $x > 3$ 时,有

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\{ x^n \left[\left(\frac{3}{x} \right)^n + 1 \right] \right\}}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln x + \ln \left[\left(\frac{3}{x} \right)^n + 1 \right]}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln x}{n+2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left[\left(\frac{3}{x} \right)^n + 1 \right]}{n+2} \quad \left(0 < \frac{3}{x} < 1 \right) \\ &= \ln x + 0 = \ln x, \end{aligned}$$

所以 $f(x) = \begin{cases} \ln 3, & 0 < x \leq 3, \\ \ln x, & x > 3, \end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续,故选 B.

评注 讨论函数连续性时,题目给出的函数可能不是具体函数,这时需要先把函数形式确定下来,然后再进一步讨论.

【例2】 设函数 $g(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上连续,则 $x=0$ 是函数 $f(x) = \frac{\int_0^{3x} g(t) dt}{x}$ 的().

A. 跳跃间断点 B. 可去间断点 C. 无穷间断点 D. 振荡间断点

分析 为判断间断点类型,需考察间断点处的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} g(x) dt}{x}$.

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} g(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3g(3x) = 3g(0),$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义,所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点,故选 B.

【例3】 设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续,且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x} = m$. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^1 g(x^2 t) dt - 1}{x^2}, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ \frac{-m + n \cos x + e^x - x}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$