经典数学

JING DIAN SHU XUE

美丽的数学

1 2 3 4 5 β Σ φ

赵海均、杜彬、刘海英 等 主编

远方出版社

科学文库 · 经典数学

美丽的数学

赵海均、杜彬、刘海英 等/编

远方出版社

责任编辑:胡丽娟
封面设计:杨　静

科学文库·经典数学

美丽的数学

编 著 者　赵海均、杜彬、刘海英　等
出　　版　远方出版社
社　　址　呼和浩特市乌兰察布东路 666 号
邮　　编　010010
发　　行　新华书店
印　　刷　北京兴达印刷有限公司
版　　次　2005 年 1 月第 1 版
印　　次　2005 年 1 月第 1 次印刷
开　　本　850×1168　　1/32
印　　张　680
字　　数　4860 千
印　　数　5000
标准书号　ISBN 7－80723－000－2/G·1
总 定 价　1500.00 元
本册定价　22.00 元

赵海均校长简介

89年参加工作，连续多年担任高三毕业班的数学教学并取得优异成绩。曾被评为金华市优秀教师、金华市教育学会会员新秀、金东区首届“十大优秀青年”、金华市第六届“十大杰出青年”、金华市名校长、浙江省优秀教育工作者；现为中国数学学会会员、中国西部地区教育顾问、艾青中学校长、金东区教文体局副局长、中澳班在职研究生。

所著《建筑理论对中学数学教学的启发》、《数学高考复习与能力训练》、《加强学法指导减轻学生负担》等十几篇论文在市级以上刊物发表或获奖；99年担任由贵州教育出版社出版的《中国高考数学知识分解评分测试》一书主编；主编校本课程《走进艾青》一书，获2002—2003年度金华市教学专著评比二等奖；担任省教育教学正点规划课程《艾青中学校园文化建设》负责人。

98年担任艾青中学校长至今，学校一年上一个新台阶。98年12月学校通过“省A级重点中学”的评估验收。99年学校被评为“省级文明学校”，同年12月又顺利通过“省三级重点中学”的评估验收。2000年艾青

中学扩建工程被金华市政府列入省“9761”重点建设工程，2001年学校又被列为省级现代教育技术实验学校，2002年学校通过“省二级重点中学”的评估验收。同年开始筹建艾青中学新校区，新校区建设项目被列入2003年浙江省重点建设项目。2004年10月艾青中学从鞋塘整体搬迁至金华新校区，顺应了教育改革和发展的潮流，为今后学校的进一步发展开辟了广阔的空间。

任校长以来，狠抓教育质量，教学成绩喜人：高考升学率均在90%以上，上本科线率在60%以上，在同类学校中遥遥领先，近三年的全国、省学科竞赛中有20余人次获奖，其中国家二等奖1人，国家三等奖2人，省一等奖3人，省二等奖3人，省三等奖11人，全校教研气氛浓厚，教师积极参与教学研究，撰写论文，发表文章，其中市级以上发表文章112篇，获奖论文74篇，学校参加研究国家级课题2项、省级课题2项、市级7项，参与课题研究教师77人，占专任教师总数60.2%。

目　录

数学与美学 …………………………………………………… (1)

一、数学美的简洁性 ………………………………………… (20)

二、数学美的和谐性 ………………………………………… (93)

三、数学美的奇异性 ………………………………………… (155)

四、美的扭曲 ………………………………………………… (249)

五、数学美学研究的意义 …………………………………… (259)

美在数学中 …………………………………………………… (276)

数学美在生活中 ……………………………………………… (280)

数学与美学

社会的进步就是人类对美的追求的结晶。

——马克思

数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也具有至高的美。

——罗素

人类社会历史的发展和自然界的进化告诉人们：一切事物生存和发展所共同遵守的法则是美战胜丑。为此，美学家断言：美是一切事物生存和发展的本质特征。

什么是美？美是借物的形象来表现情趣，是合规律性与合目的性的统一（朱光潜语）。美又是自由的形式：完好、和谐、鲜明。真与善、规律性与目的性的统一，就是美的本质和根源（李泽厚语）。然而人们认识美、探索美的秘密却是一个极为古老的课题。

美的秘密世世代代搅挠着人类的思维。在历史上，关于美的谈论相当相当多（尽管是只言片语）。

最古老的文明遗留下的古迹中，无不打上古代人们的世界观和审美观。

苏格拉底认为：最有益的即是最美的。因而古希腊的美学

是知识不可分割的一部分,这恰恰由于当时许多学科的幼芽尚未从人类知识大树上长成独立的枝干。当时的哲人们认为:美和宇宙之美是统一的。

毕达哥拉斯学派(请注意这是一个数学团体)认为世界是严整的宇宙,整个天体就是和谐数。正是这个学派在研究音乐时最早使用了数学(他们试图提出一个声调对比关系的数学公式:八度音与基本音调之比为1:2,五度音等于2:3,四度音等于3:4等等),这也是人们最早用数学方法研究美的实践与创始。

古希腊哲人赫拉克利特认为:和谐不是静止的平衡。而是运动着的活动状态。

恩培多克勒认为:生物的进化与世界之美的完善,与美、与和谐形成是等过程的。

原子论者德谟克利特认为:生活需要有美的享受。

苏格拉底认为:“美是许多现象所固有的一个唯一的东西,是具有最普遍的具体性”,但“美是难以捉摸的”。

亚里士多德认为:数学能促进人们对美的特性:数值、比例、秩序等的认识。

黑格尔在哲学史稿中说:“美包含在体积和秩序中。”

十八世纪法国启蒙主义者伏尔泰、狄德罗等人认为“美是大自然本身的自然属性。”

德国哲学家黑格尔把美看作是精神的(绝对观念的)整个世界运动的阶段之一,观念得到完善的、相同的表现形式,这就是美。

俄国文学家车尔尼切夫斯基认为:美就是生活。

从以上的叙述中我们可以看到:人们对于美的认识是一个古老而又漫长的过程,人们也提出了各种观念,大体上可总结为下面几种模式:(1)美是绝对观念在具体事物和现象中的表现或体现;(2)美是有意向的,从主观上认识事物的结果;(3)美是生活的本质同作为美的尺度的人相比,或者同他的实际需要、同他的理想和关于美好生活观念相比较的结果;(4)美是自然现象的自然属性。

当代美学家们则认为:美应包含下列各项:

$$\text{美}\left\{\begin{array}{c}\text{审美对象}\\ \uparrow\\ \text{审美性质}\\ \uparrow\\ \text{美的本质}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{自然美}\\ \text{社会美}\end{array}\Big\}\begin{array}{c}\text{科学美}\\ \text{艺术美}\end{array}$$

说得具体点,美的基本类别(客观来源)有二:自然美和社会美。自然事物或自然界中的美叫自然美;社会事物的美叫社会美。

美的社会形态也有二:艺术美和科学美(更确切地讲是科技美)。艺术美是艺术家通过艺术形象再现生活中的美;科学美主要指理论美(技术美还包括技术规律和创造),其内涵是指结构美和公式美。艺术美和科学美都是自然美和社会美的客观

反映，只不过方法与侧重点不同罢了。艺术美侧重于表现社会，既使表示自然也是通过人的社会感情去实现。而科学美则侧重于表示自然，且逐步向社会现象渗透。

这正如著名物理学家海森堡说的那样：美的王国远远延伸到艺术领域之外，它无疑包括精神生活的其他领域，自然美也反映自然科学的美之中。物理学中包含了两个极端：实验与想象、逻辑与直觉、客观的真实与主观的美感。（顺便一提：技术美是人类将技术规律纳入人的目的的轨道，在造物活动中把物的尺度与人的社会尺度结合在一起而创造的美，它使得技术产品不再是与人对立的异己力量，而是使之成为具有亲合力的人的有效工具。）

在当今的科学分类研究中，许多学者称哲学和数学是普遍科学，且认为二者可应用于任何学科和任何领域，其差别在于刻画现实世界时使用的方法和语言不同：哲学使用的是自然语言，数学使用的是人工语言（数学符号）；哲学使用的是辩证逻辑方法，而数学使用的是形式逻辑与数理逻辑方法。这样哲学家有时可以“感觉到”思维的和谐，而数学家则有时可以“感觉到”公式与定理的和谐，即美。

数学也是自然科学的语言，故它具有一般语言文学与艺术所共有的美的特点，即数学在其内容结构上、方法上也都具有自身的某种美，即所谓数学美。因而数学美是具体、形象、生动的。数学美的起源遥远、历史悠久。

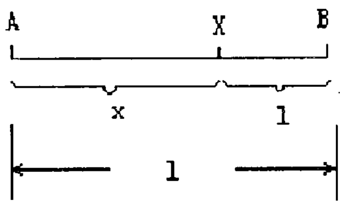
古希腊著名的学者毕达哥拉斯对数学有很深的造诣，其中

毕氏定理(在我国称勾股定理)正是他的杰作(为此他的弟子们曾举行了盛大的“百牛大祭”以资庆贺)。

他还在现今称为库洛的地方领导了一个数学学术团体,成员们经常聚在一起研究、讨论、交流各自的学习心得,他们的成果对外人是严格保密的。每个成员都守口如瓶,否则会遭杀身之祸。这样一个团体,成员们都有一个特殊的标志,即是用五角星作图案的徽章,并在角顶上分别注上希文 v、γ、ι、θ 和 χ,按顺序把它们读下来(逆时针)即 vγιθχ,意思为“健康”。

五角星是他们经过筛选、研究过,并十分喜欢的图形。他们为何对五角星独有偏爱?因为五角星是一个美的图形,它里面包含许多有趣的比。

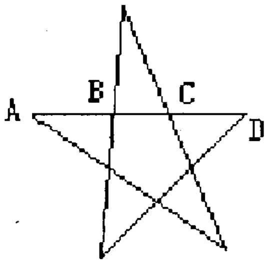
几何上,我们学过“黄金分割”,即把线段 1 分成 x 和 1 - x 两段,使其比满足:



$$x:1=(1-x):x$$

这样解得 x≈0.6181,这种分割称为“黄金分割”。

我们可以证明(见下图)在五角星里,角星里:



BC: AB = AB: AC = AC: AD。

显然,毕达哥拉斯学派的学者们发现了它,并且喜欢这种比。

进一步计算还可知它们的比值均为0.618……,0.618……这是被中世纪学者、艺术家达·芬奇誉为“黄金数”的重要数值,它也曾被德国科学家开卜勒赞为几何学中两大“瑰宝”之一(另一件即为“勾股定理”)。

顾名思意,黄金数当有着黄金一样的价值,人们喜欢它。事实上,黄金比值一直统治着中世纪西方建筑艺术,无论是古埃及的金字塔,还是古雅典的他侬神庙;无论是印度的泰姬陵,还是今日的巴黎埃菲尔铁塔,这些世人瞩目的建筑中都蕴藏着0.618……这一黄金比数(这显然展示着数学美感)。

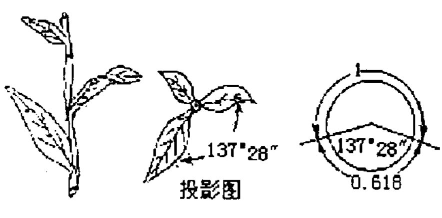
一些著名的艺术佳作也处处体现了黄金比值——许多名画的主题都是在画面的黄金分割点处,不少著名乐章的高潮在全曲的0.618……处。

更有趣的是,人体中有着许多黄金分割的例子,比如:人的

肚脐是人体长的黄金分割点，而膝盖又是人体肚脐以下部分体长的黄金分割点。在口腔比较解剖学范畴内，符合 0.618……这个比例的六龄牙(六岁时萌出的第一颗大磨牙)，由于其牙冠大、牙尖多、咀嚼面积广、牙根分叉结实等特点，显出它“与众不同来”，它不仅在咀嚼食物时发挥作用最集中、担负咀嚼压力最大，同时它在维持颜面下三分之一部位的端正(面容)，和保持上、下牙弓间的咬合关系，均起着重要的作用。

德国天文学家开卜勒研究植物叶序问题(即叶子在茎上的排列顺序)时发现：叶子在茎上的排列也遵循黄金比。

我们知道：植物叶子在茎上的排布是呈螺旋状的，你细心观察一下，不少植物叶状虽然不同，但其排布却有相似之处。比如相邻两张叶片在与茎垂直的平面上的投影夹角是 137°28′，科学家们经计算表明：这个角度对植物叶子通风、采光来讲，都是最佳的(正因为此，建筑学家们仿照植物叶子在茎上的排列方式设计、建造了的新式仿生房屋，不仅外形新颖、别致、美观、大方，同时还有优良的通风、采光性能)。



有趣的是：这个角度正是把圆周分为1∶0.618……的两条半径的夹角。

开卜勒还发现：叶子在茎上环绕的圈数和它绕一个周期时茎上叶数之比 ω 随植物不同而异。他观察后发现了许多种树的 ω 值，比如榆树为$\frac{1}{2}$，山毛榉为$\frac{1}{3}$，樱桃$\frac{2}{5}$，梨为$\frac{3}{8}$，柳为$\frac{5}{13}$，……

请注意它们的分子和分母分别是：

1，1，2，3，5，……

2，3，5，8，13，……

这恰恰是两列斐波那契数列（这个数列的特点是从第三项起，每项均为其前面两项之和）。

有人还从花的瓣数中，找到了这个数列（花瓣通常只是2，3，5，……瓣）。

在股票分析中，美国人艾略特于1934年在研究股指（股票指数）变化规律时，提出了所谓"波浪理论"（他于1942年出版了《宇宙奥秘之自然规律》一书），该理论可对许多经济活动作出预测和估计，而其中重要结论是：这类经济活动的指数波动中遵循斐波那契数列规律而变化。

此外，人们还在许多领域中发现了该数列的身影，比如在晶体结构研究中，人们对某些准晶体中结点分布规律里，也发现与该数列有关。

更为有趣的是：这个数列前后两项之比，越来越接近黄金比

值 0.618……

上世纪德国一位心理学家曾做过一次试验:他展出 20 种不同规格的(即长宽比例不一的)长方形,让参观者从中选出自己认为最美的,结果多数人选择了长:宽 = 1:0.618……或接近这个比的长方形。

由于 0.618……满足关系式 $x^2+x-1=0$,而它的倒数 u 满足 $u^2-u-1=0$,即因为 $u=(1+\sqrt{5})/2$,故 $u^{-1}=0.618\cdots\cdots$。

考察数列 $1,u,u^2,\cdots,u^n\cdots$,注意到

$u^3=u\cdot u^2=u(1+u)=u+u^2=u+(1+u)=2u+1$,

$u^4=u\cdot u^3=u(2u+1)=2u^2+u=2(1+u)+u=3u+2$,

$u^5=u\cdot u^4=u(3u+2)=3(1+u)+2u=5u+3$,

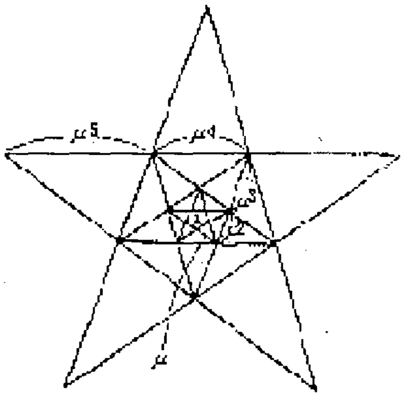
一般地,$u^n=nu+(n-2)$。

又 $u^n=u^{n-1}+u^{n-2}(n\geqslant 2)$。

故 $u^2,u^3,u^4,\cdots\cdots$恰好也构成一个斐波那契级数(指广义的,确切地讲应称为鲁卡斯数列)。

而 $1,u,u^2,\cdots\cdots$也恰好在下页嵌套的五角星群中体现:

这些除了"黄金分割"自身直觉的美感外,还有一种奇异美(即它的许多美妙性质),比如:人们还发现这个数与其它一些数有密切联系:除了前面提到的斐波那契数列中前后两项比的极限是 0.618……外,它还和"杨辉三角"有关系。

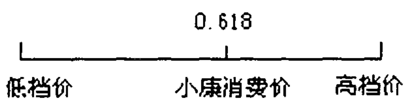


近年来,人们又在最优化方法中找到了这个数的应用,比如优选学中的“0.618……方法”,就是利用了黄金数去选优(它显然应视为数学美的一个应用)。

笔者还曾以 0.618 为尺度,提出过一个“小康型购物公式”,它先后被国内不少家报刊转载,从中亦可见人们对这个“黄金数”的偏爱。这个公式是这样的:

小康型消费价格 = 0.618 ×(高档消费价格 - 低档消费价格)+ 低档消费价格。

它的图示见下图:



这就是说:您在选购商品时,您据自己的财力状况若认为高

档价格过于昂贵，而低档价格的商品款式、性能等不尽人意，那么您可以选购价格为上面公式所给出的档次的商品——它的价格中等偏上，堪称得上“小康”水准。

当然，这里的高、低档概念与界限系依个人财力（经济状况）、爱好（包括习惯）、市场现状等等诸多因素决定的，它会因人而异，也会因时而别（十年前彩电系高档商品，如今已相当普及），特别是高档的涵义是对您自己而言，而非市场现有的或者是你盲目追求，但不切实际的奢望。

就拿彩电来讲，商店中的高、低档价格相去数万元，那里的高档非一般家庭能力所及，这样你在选购前先确定你打算购买的基本档次（包括规格），比如你打算买台 21 吋国产机，这类彩电中高档的（平面、直角、遥控、多画面）价格在 2800 元左右，而低档的（非平面直角）价格在 1800 元左右，那么您的小康消费水准为：

$$(2800-1800)\times 0.618+1800=2418(\text{元}),$$

换言之，价格为 2400 元左右的为宜。这正是大多数家庭喜欢，且能够接受的档次（市场调查发现。此档次彩电销量最大）。

上述公式对指导商品生产也有实际价值。

数学自身的美，还体现在许许多多方面。

哲理是抽象的，常常使人感到枯燥无味，难以理解，但是用数学知识来做比喻却能使许多哲理富有形象，生动感人，发人深思。