

现代数值天气预报

讲义

周毅 刘宇迪 李昕东

编写

解放军理工大学气象学院

二〇〇〇年五月

说 明

本书是为我院天气动力学专业硕士研究生编写的教材，可供 60 学时的“现代数值天气预报”课的教学使用。本书包括数值模式的设计、物理过程的处理、客观分析与四维同化三部分内容。考虑到学员在本科学习阶段已经掌握了数值天气预报的一些基本原理和基础知识，本书在选材上力求反映近年来数值预报领域中的新技术、新方法和新成果。此外，还汇集了本书内容所涉及的参考文献，为学员进一步研究问题提供方便。

由于编写的时间比较仓促，书中肯定有不少错误和疏漏之处，恳请大家批评指正，提出修改意见。

目 录

第一章 数值方法

- § 1. 差分方法概述..... (1)
- § 2. 守恒差分格式的构造..... (7)
- § 3. 原始方程模式的时间积分方案..... (13)
- § 4. 模式网格的设计原则..... (21)

第二章 套网格与自适应网格

- § 1. 套网格技术..... (29)
- § 2. 自适应网格..... (40)
- § 3. 多重网格法在加速自适应网格生成中的应用..... (64)

第三章 谱模式

- § 1. 谱方法基础..... (80)
- § 2. 球面谱模式的基础知识..... (86)
- § 3. 离散傅立叶变换与勒让德变换..... (92)
- § 4. 正压涡度方程谱模式..... (102)

第四章 边界层过程的处理方法

- § 1. 平均运动方程组与次网格过程参数化..... (109)
- § 2. 边界层参数化理论..... (112)
- § 3. 整体边界层参数化方案..... (122)
- § 4. 高分辨率边界层参数化方案..... (125)
- § 5. 地表面的处理方法..... (127)

第五章 积云对流参数化

- § 1. 概述..... (140)
- § 2. 对流调整式方案..... (144)
- § 3. 大尺度水汽辐合式方案..... (151)

§ 4. 对流质量通量式方案.....	(159)
---------------------	-------

§ 5. 有效位能释放式方案.....	(167)
---------------------	-------

第六章 客观分析与资料同化

§ 1. 资料处理与质量控制.....	(173)
---------------------	-------

§ 2. 逐步订正法.....	(178)
-----------------	-------

§ 3. 最优插值法.....	(183)
-----------------	-------

§ 4. 四维资料同化.....	(190)
------------------	-------

第七章 四维变分资料同化

§ 1. 变分同化的基本原理.....	(197)
---------------------	-------

§ 2. 下降算法.....	(198)
----------------	-------

§ 3. 共轭方程理论与伴随方法.....	(203)
-----------------------	-------

§ 4. 伴随模式中湿物理过程的处理方法.....	(210)
---------------------------	-------

§ 5. 卫星资料的变分同化.....	(213)
---------------------	-------

§ 6. 四维变分资料同化系统的应用前景.....	(216)
---------------------------	-------

第一章 数值方法

数值天气预报是通过求解大气运动方程来预报气象要素的未来变化。由于模式方程组是非线性的偏微分方程组，目前还没有普遍的解析求解方法。因此必须将模式方程组离散化，然后采用相应的数值方法进行求解。离散化的方法大体可分为三种类型，一是用差商代替微商，把偏微分方程变成差分方程，以便用代数方法求解，称为差分法；二是用某种基函数（如球谐函数）将场变量展开为有限项的线性组合，再利用基函数的特性，将偏微分方程化为以展开系数及其对时间微商的常微分方程组，然后再用差商代替微商求数值解，称为谱方法；三是把偏微分方程问题变为泛函极小问题求解，如里兹法和有限元法。目前这三种方法中，应用最广泛且最简便的是差分法，而随着计算机和计算方法的发展，谱方法也越来越显示出它的优越性，在全球范围的中期模式和大气环流模式中被广泛使用。

本章主要介绍差分方法的基本概念，守恒差分格式的构造，时间积分格式以及网格设计等内容。关于谱方法的应用及模式物理过程的处理方法将在其后的有关章节中讨论。

§ 1 差分方法概述

差分方法是把偏微分方程直接转化为代数方程然后对其求解，这是一种离散近似的计算方法，得到的不是域内的连续函数而是域内各节点上函数的近似值。用差分格式计算某一物理量时，只需选取有一定精度和物理上合理的形式即可。但是作为预报问题，为了能够得到原物理问题的正确的近似解，还需要考虑在计算域内使差分运算和微分运算在总体数学和物理性质上保持一致，即所采用的差分格式不仅要具有一定的精度和计算稳定性，还应尽可能地保持连续大气的若干整体性质。本节着重介绍有限差分法的几个基本概念，并说明它们的意义及分析方法。

1.1 差分近似的相容性

对一个微分方程可用不同的方法构造出不同的差分格式，对差分格式的一个基本要求就是能使差分方程近似于微分方程。即要求在时间步长和空间步长趋于零的极限条件下差分方程收敛于微分方程，这就是差分近似的相容性（或一致性）。相容性保证了差分方程是微分方程的一个合理近似。如果这个条件不满足，该差分格式绝不可能正确模拟我们所研究的

初值问题。以一维平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

为例，分别取时间前差，空间后差和时间中央差，空间中央差格式可得

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + C \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad O(\Delta t, \Delta x) \quad (1.2)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + C \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad O(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (1.3)$$

显然，当 $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ 时，截断误差 $O(\Delta t, \Delta x)$ ， $O(\Delta t^2, \Delta x^2) \rightarrow 0$ ，故(1.2)和(1.3)式分别逼近于微分方程(1.1)式，即差分方程与微分方程是相容的。

1.2 差分近似的收敛性

当我们把 $\Delta t, \Delta x$ 取得充分小时，可以使得差分格式的截断误差达到所要求的精度，但不能保证数值解的误差一定随之而减小。在求解域内的所有网格点上，固定 $n\Delta t$ ，考察微分方程初值问题的真解 $u(j\Delta x, n\Delta t)$ 和与其相容的差分格式的数值解 u_j^n 之差，当 $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ 时，在求解域内满足 $\text{Max}\{u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)\} \rightarrow 0$ ，则称差分格式是收敛的，即差分方程的解收敛于微分方程的解，这就是差分格式的收敛性问题。

令 $\mu = \frac{C\Delta t}{\Delta x}$ ，格式(1.2)可写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \mu(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (1.4)$$

根据(1.4)式， u_j^1 完全由图 1.1 中线段 A_0B_0 上的 u_j^0 所决定，而 u_j^2 又由线段 A_1B_1 上的 u_j^1 所决定，从而也是由 A_0B_0 上的 u_j^0 所决定。依次类推，在 P 点的 u_j^n 也完全由 A_0B_0 上的 u_j^0 所决定，即 P 点的数值解依赖于线段 A_0B_0 上的初值，所以，通常称线段 A_0B_0 为 $(u_j^n)_p$ 的依赖区间。另一方面，我们知道，方程(1.1)的精确解是

$$u(x, t) = u(x - Ct, 0) \quad (1.5)$$

其中 C 表示波速，如果其通过 P 点的特征线与 x 轴相交于 Q 点，那么， P

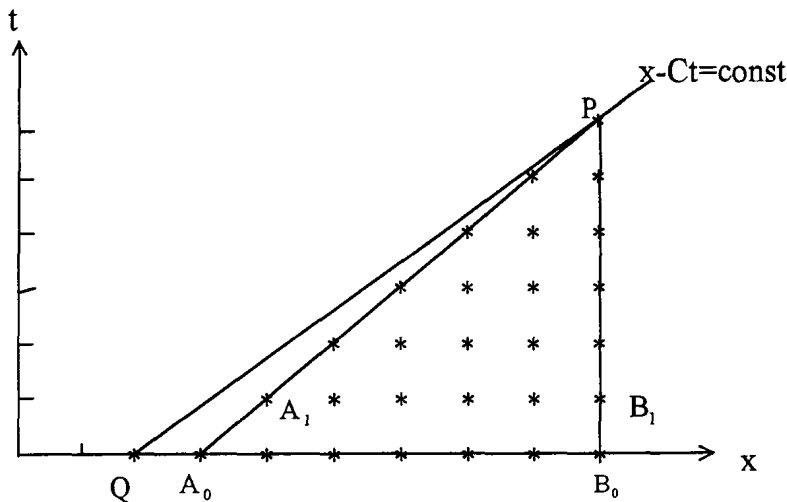


图 1.1 差分格式收敛性示意图

点的真解 $u(j\Delta x,n\Delta t)$ 仅与 Q 点的初值在关。所以，如果 Q 点在 A_0B_0 之外，则该点的初值与 A_0B_0 上的初值毫无关系，无论 $\Delta t,\Delta x$ 取得如何小，格式(1.4)的数值解也不可能收敛到偏微分方程(1.1)的精确解。反之，如果 Q 点在 A_0B_0 之内，则数值解可能收敛。因此，差分格式的数值解收敛于精确解的必要条件是： Q 点必须在依赖区间内，即 $\mu \leq 1$ ，或

$$\frac{C\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{1.6}$$

条件(1.6)又称为柯朗条件。由前面的讨论可知，差分格式(1.4)虽然是相容的，但当条件(1.6)不满足时，它是不收敛的，这表明差分格式的相容性并不能保证它的收敛性。

1.3 差分近似的稳定性

在用差分方法求数值解的过程中，是按时间逐层计算的，因此，计算 u_i^n 时的舍入误差必然会影响到 $n+1$ 层及其以后层次上的值。如果这种误差的影响保持一定或越来越小，就能在一定的精度内保证数值解的质量。否则，这种计算的误差随着计算的进展不断累积变得越来越大，不仅会造成数值解被严重歪曲，甚至会使计算无法进行下去。由于气象问题的精确

解通常是有界的，因此差分格式的数值解也应该是有界的。差分近似的稳定性是指，对于任意给定的初值，当 n 无限增大时，任意时刻的数值解是否有界的问题。

例如对于格式(1.4)，若满足条件(1.6)，则有

$$|u_j^{n+1}| \leq (1 - \mu)|u_j^n| + \mu|u_{j-1}^n|$$

并且

$$\max_j |u_j^{n+1}| \leq (1 - \mu)\max_j |u_j^n| + \mu \max_j |u_j^n| = \max_j |u_j^n|$$

据此递推有

$$\max_j |u_j^{n+1}| \leq \max_j |u_j^0|$$

这表明 $\mu \leq 1$ 时，格式(1.4)的数值解是有界的，因此数值解的误差 $(u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t))$ 也是有界的，不会随时间而无限增长。具有这种性质的格式即为计算稳定性格式。

从以上讨论可以看出，对于格式 (1.4) 来说， $\mu \leq 1$ 既是数值解收敛于精确解的必要条件，又是数值解计算稳定的充分条件，这表明收敛性与稳定性之间有着密切的联系。著名的拉克斯(Lax)等价定理给出了相容性、收敛性和稳定性之间的相互关系，即对于一个适定的初值问题和它的一个具有相容性的差分格式，其计算稳定性是收敛性的充分必要条件。根据 Lax 定理，如果问题是适定的，格式是相容的，则只需证明格式的稳定性，即可保证格式的收敛性。

需要指出的是，以上结论是由线性平流方程(1.1)式得到的，因此条件(1.6)式称为线性稳定性判据。1982 年，Courant, Friedrichs 和 Lewy 证明了条件(1.6)式对于所有线性方程的差分格式都能成立，所以，线性稳定性判据常简称为 CFL 判据。数值预报模式方程组是偏微分方程组，对相应的线性化方程的稳定性分析只能给出非线性差分方程计算稳定性的必要条件，所得到的判据并不能保证计算稳定，但对格式的线性计算稳定性的分析讨论仍然是十分重要且必不可少的。

1.4 分析计算稳定性的方法

前面用来证明格式(1.4)的计算稳定性的方法，称为直接法。这种方法虽然简单可靠，但对一般的格式并不适用，最常用的分析计算稳定性的方法有谐波分析法和能量分析法。前者适用于分析常系数线性方程的计算稳定性，后者适用于分析非线性方程的计算稳定性。

一、谐波分析法

由于线性问题满足叠加原理，因此可以通过测试差分格式数值解的一个谐波分量的稳定性，来研究差分格式的稳定性。

一维线性平流方程(1.1)式的解可表示为

$$u(x, t) = Ae^{ik(x-ct)} \quad (1.7)$$

差分格式(1.4)的数值解可类似表示为

$$u_j^n = A^n e^{ikj\Delta x} \quad (1.8)$$

式中 k 为波数, $i = \sqrt{-1}$ 。

定义一个增幅因 G , 使得

$$A^n = GA^{n-1} \quad (1.9)$$

递推可得

$$A^n = G^n A^0 \quad (1.10)$$

代入(1.8)式可得

$$u_j^n = A^0 G^n e^{ikj\Delta x} \quad (1.11)$$

由(1.11)式可以看出, 为了使数值解 u_j^n 当 $n \rightarrow \infty$ 时有界, 必须满足

$$|G| = \left| \frac{A^{n+1}}{A^n} \right| \leq 1 \quad (1.12)$$

即数值解的振幅不会随 n 的增加而增大, 这就是冯纽曼的计算稳定性必要条件。实际上, 条件(1.12)在限制误差增长的同时, 也限制了数值解的增长, 因而是一种不太合理的限制。由(1.10)式可得

$$|A^n| = |G|^n |A^0|$$

如果计算稳定, 应当要求

$$|A^n| = |G|^n |A^0| < B$$

式中 B 为一大于零的有界的实常数, 于是

$$n \ln|G| < \ln(B/|A^0|) \equiv B'$$

式中 B' 是另一常数。因 $n = t/\Delta t$, 故要计算稳定, 必须满足

$$\ln|G| < \frac{B'}{t} \Delta t$$

对于有限的时间, 上式可改写为

$$\ln|G| \leq O(\Delta t) \quad (1.13)$$

令 $|G| = 1 + \delta$ ，将 $\ln(1 + \delta)$ 按幂级数展开，不难证明计算稳定性条件(1.13)等价于

$$|G| \leq 1 + O(\Delta t) \quad (1.14)$$

与条件(1.12)相比较可以看出，条件(1.14)是一个比较宽的计算稳定性的必要条件，仍然能够保证数值解是有界的。对于具体的差分格式，只需将形式解(1.8)式代入，分析条件(1.12)或(1.14)是否成立，即可判断差分格式的计算稳定性。

二、能量分析法

如已知偏微分方程的精确解是有界的，则可以通过检查 $\sum_j (u_j^n)^2$ 是否有界，来判断差分格式的计算稳定性。例如，对格式(1.4)两端取平方后求和可得

$$\sum_j (u_j^{n+1})^2 = \sum_j \left[(1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + 2\mu(1 - \mu)(u_j^n)(u_{j-1}^n) + \mu^2 (u_{j-1}^n)^2 \right]$$

采用周期性边界条件可得

$$\sum_j (u_{j-1}^n)^2 = \sum_j (u_j^n)^2$$

利用上式和施瓦兹(H.A.Schwarz)不等式

$$\sum_j a_j b_j \leq \sqrt{\sum_j a_j^2} \sqrt{\sum_j b_j^2}$$

可以得到

$$\sum_j u_j^n u_{j-1}^n \leq \sqrt{\sum_j (u_j^n)^2} \sqrt{\sum_j (u_{j-1}^n)^2} = \sum_j (u_j^n)^2$$

若满足条件： $0 \leq \mu \leq 1$ ，则有

$$\sum_j (u_j^{n+1})^2 \leq \left[(1 - \mu)^2 + 2\mu(1 - \mu) + \mu^2 \right] \sum_j (u_j^n)^2$$

或

$$\sum_j (u_j^{n+1})^2 \leq \sum_j (u_j^n)^2$$

因此， $0 \leq \mu \leq 1$ 连同周期性边界条件是格式(1.4)的计算稳定性的充分条件。

§ 2 守恒差分格式的构造

数值天气预报是关于一组时变偏微分方程的数值求解问题，它不同于一般的数值计算方法，对离散后的差分格式有着特殊的要求。首先在数值计算过程中，必须尽可能多地保持原方程组的整体性质和守恒属性，才能保证数值计算结果的合理性，其次由于初始资料的密度和精度都有一定的限度，因此研究有限格距下的误差传播演变总是比研究格距趋于零时的问题更富有实际意义。此外，数值天气预报一般要求作较长时间的数值积分，因此差分格式必须具有良好的稳定性和省时性。可见，构造守恒的差分格式和经济算法是数值计算获得成功的关键。所谓守恒的差分格式就是能够保持连续大气的某些重要积分关系和守恒性质的格式。因为时间差分的截断误差通常远小于空间差分的截断误差，所以本节着重讨论空间差分格式的构造问题，关于高效率的时间积分方案将在下一节讨论。

满足多种积分约束条件的差分格式不可能直接写出来，因此构造守恒差分格式的一般方法是首先根据明显容易满足的约束条件（如质量守恒、动量守恒等一次量的守恒性质）设计出较为普遍的形式，其中包括一些待定的系数，再根据其它约束条件（如能量守恒、位涡拟能守恒等二次量的守恒性质）来逐步确定未知的待定系数，减少格式的自由度，最后得到一种满足多种重要约束条件的差分方程。按以上方法构造的差分格式一般比较复杂，虽然具有很好的守恒性质和计算稳定性，但过于耗费机时，计算效率不高。季仲贞等 80 年代以来逐步发展出一套适用于大气海洋模式的完全能量守恒差分法，不仅解决了守恒差分格式的构造问题，而且还保证了格式的计算稳定性和计算省时性。已展现出广泛的应用前景。下面对他们的工作作一简要介绍。

2.1 计算稳定性、算子非负性和能量守恒性之间的关系

如前所述，大气海洋方程常常是一组非定常的流体力学方程组，为了讨论问题方便，一般可以归结为如下形式的“发展方程”

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \tilde{A}F = 0 \quad (1.15)$$

式中 $F = F(x, t)$ 是待求的函数。 $\tilde{A} = \tilde{A}(F, x, t)$ 是一个非线性的算子， $x = x(x_1, x_2, \dots, x_k)$

是空间坐标， k 是空间维数， t 是时间坐标。在 (x, t) 空间布网 (x_i, t_n) ， $t_n = n\tau$ ，

$n = 0, 1, 2, \dots$ ， $x_i = ih$ ， $i = 1, 2, \dots, k$ ， τ 和 h 分别为时间步长和空间步长。记函数 F 在 t_n 时

刻的值为 F^n ，在点 (x_i, t_n) 的值为 F_m^n ，于是与(1.15)式相应的差分格式可写为：

$$\frac{F^{n+1} - F^n}{\tau} + A_\theta(F^*)[\alpha F^{n+1} + (1-\alpha)F^n] = 0 \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (1.16)$$

式中 A_θ 是与 $\tilde{A}$ 相应的差分算子, F^* 为 F 的某种光滑值。定义两个网格函数 F 和 G 的内积为

$$(G, F) = \sum_i F_i G_i \Delta_i \quad (1.17)$$

在一维情形 $\Delta_i = h$, 在二维情形 $\Delta_i = h^2$, 而范数则取为

$$\|F\| = (F, F)^{1/2} \quad (1.18)$$

定义 1. 当 τ 足够小时, 若由差分法算得的解满足

$$\|F^{n+1}\| \leq \|F^n\| \quad (1.19)$$

则称差分格式为计算稳定的。

定义 2. 如果差分算子 A 满足

$$(AF, F) \geq 0 \quad (1.20)$$

则称 A 为非负的; 而当等式成立时, 则称 A 为反对称的。

由于我们面临的方程常常是非线性的, 即使满足柯朗条件, 在近似计算时仍会出现非线性计算不稳定。为了保证计算格式是稳定的, 我们已证明了如下定理。

定理 1. 若 A 为非负算子, 则格式(1.16)当 $1 \geq \alpha \geq \frac{1}{2}$ 时, 无条件稳定; 若 A 为反对称

的而且 $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ 时, 则格式(1.16)绝对不稳定。

定理 2. 若 $(AF, F) = 0$ 且 $\alpha = \frac{1}{2}$, 则格式(1.16)有如下守恒性:

(1) 能量守恒

$$\|F^{n+1}\|^2 = \|F^n\|^2 = \|F^0\|^2 \quad (1.21)$$

(2) “广义能量”守恒

$$\|F^n\|^2 + \frac{\tau^2}{4} \|AF^n\|^2 = \text{常数} \quad (1.22)$$

(3) “平均尺度”守恒

$$\frac{\|F^n\|^2}{\|AF^n\|} = \text{常数} \quad (1.23)$$

定理 3. 对于格式(1.16)，如果采用如下预估—校正法计算：

$$\begin{cases} F^* = F^n - \tau A_\theta(F^n)F^n \\ F^{n+1} = F^n - \tau A_\theta(F^*)[\alpha F^{n+1} + (1-\alpha)F^n] \end{cases} \quad (1.24)$$

那么，只要算子 A 是非负的且 $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ 时，则算法(1.24)总是计算稳定的。

上述定理 1 和定理 2 是两个较普遍的定理，它们把计算稳定性、算子非负性和能量守恒性之间的密切关系揭示出来，使我们能把讨论格式稳定性问题转化为构造非负差分算子的问题，并为构造完全能量守恒格式奠定了理论基础，这是十分有意义的。

2.2 隐式完全能量守恒差分格式的构造

从定理 1 和定理 2 我们已看到，只要差分算子 A 是非负的，在强隐式情形（即 $1 \geq \alpha \geq \frac{1}{2}$ ）格式(1.16)是绝对稳定的。如何才能保证差分算子 A 是非负的呢？下面，从一个简单例子出发，着重介绍跳点格网（C 网格）情况下隐式的完全平方守恒（包括完全能量守恒）格式的构造方法。

考虑一维重力波方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

显然(1.25)式也易于写成算子方程(1.15)的形式。不难验证(1.25)具有如下能量守恒性

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{1}{2} [ghu^2 + (gh)^2] dx = 0 \quad (1.26)$$

为了便于构造出保持相应能量性质的差分格式，今取如图 1.2 所示的交错网格，并把方程(1.25)改写为如下形式

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial u U}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Cu) = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

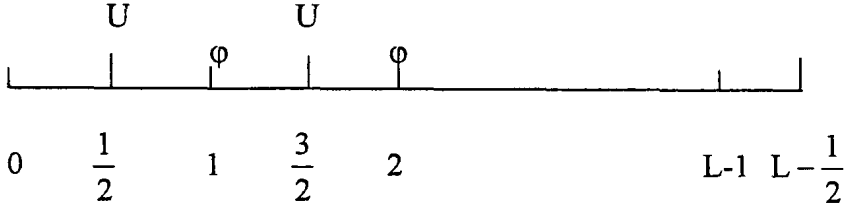


图 1.2 变量配置示意图

式中 $U = Cu$, $C = \sqrt{\phi}$, $\phi = gh$ 令

$$\begin{cases} F_t = \frac{F^{n+1} - F^n}{\tau}, \bar{F} = \frac{F^{n+1} + F^n}{2} \\ \bar{F}_{i+1/2}^x = \frac{F_{i+1} + F_i}{2}, \bar{F}_i^x = \frac{F_{i+1/2} + F_{i-1/2}}{2} \\ (F_x)_{i+1/2} = \frac{F_{i+1} - F_i}{h}, (F_x)_i = \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{h} \end{cases} \quad (1.28)$$

式中 $i = 1, 2, \dots, L-1$, F 可取为 u , U 或 ϕ 等变量。

于是, 与(1.27)式对应的差分格式可写为

$$\begin{cases} (U_t)_{i+\frac{1}{2}} + \left[(\overline{u^x U^x})_x - \frac{1}{2} U \overline{u_x^x} \right]_{i+\frac{1}{2}} + (\overline{C^x \phi_x})_{i+\frac{1}{2}} = 0 \\ (\phi_t)_i + \left[(\overline{C^x U})_x \right]_i = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

今假设 F , G 为在区间 $(0, L)$ 上定义的任意两个网格函数, 利用(1.28)不难验证如下三个恒等式成立

$$\sum_{i=1}^{L-1} (FG_x)_i + \sum_{i=1}^{L-1} (FG_x)_{i+\frac{1}{2}} = F_L G_{L-1/2} - F_0 G_{1/2} \quad (1.30)$$

$$\left[(\bar{F}^x \bar{G}_x) \right]_{i+1/2} = (G \bar{F}_x^x)_{i+1/2} + \left[(\bar{F}^x G_x) \right]_{i+1/2}^x \quad (1.31)$$

$$\left[(\bar{F}^x \tilde{G}^2)_x \right]_{i+1/2} = (G^2 \bar{F}_x^x)_{i+1/2} + 2 \left[G (\bar{F}^x G_x) \right]_{i+1/2}^x \quad (1.32)$$

式中 $\tilde{G}^2 = G_{i+1/2} G_{i-1/2}$

利用(1.31)式可得

$$\begin{aligned} & \left[\overline{u^x u^x} \right]_x \Big|_{i+1/2} - \frac{1}{2} \left(\overline{u u^x} \right)_{i+1/2} = \left(\overline{u u^x} \right)_{i+1/2} + \overline{\left(u^x u_x \right)^x} \Big|_{i+1/2} - \frac{1}{2} \left(\overline{u u^x} \right)_{i+1/2} \\ & = \frac{1}{2} \left[\left(\overline{u u^x} \right)_{i+1/2} + 2 \overline{\left(u^x u_x \right)^x} \Big|_{i+1/2} \right] \end{aligned}$$

在(1.33)式两边同乘 $U_{i+1/2}$ 并对 i 求和, 利用(1.32)式可得:

$$\begin{aligned} & \sum_i U_{i+1/2} \left[\left(\overline{u^x u^x} \right)_x - \frac{1}{2} \left(\overline{u u^x} \right) \right] \Big|_{i+1/2} \\ & = \sum_i U_{i+1/2}^2 \left(\overline{u^x} \right)_{i+1/2} + \sum_i 2 \left[U \overline{\left(u^x u_x \right)^x} \right] \Big|_{i+1/2} \\ & = \sum_i \left[\overline{u^x} \tilde{U}^2 \right]_x \Big|_{i+1/2} = \text{边界项} = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

此外, 利用(1.29)式可得

$$\sum_i U_{i+1/2} \left(\overline{C^x} \varphi_x \right)_{i+1/2} + \sum_i \varphi_i \left[\overline{C^x} U \right]_x \Big|_i = \text{边界项} = 0 \quad (1.35)$$

如果把(1.29)式中的各空间差分项均取为隐式的, 即以 $\bar{U}$ 代 U , 以 $\bar{u}$ 代 u , 以 $\bar{\varphi}$ 代 φ 等, 并用 $U_{i+1/2}$ 和 φ_i 分别乘(1.28)的两式, 求和后再相加之, 利用上述的(1.34)和(1.35)式, 即可得

$$\sum_i \left[\frac{\left(U^{n+1} \right)^2 - \left(U^n \right)^2}{\tau} \right] \Big|_{i+1/2} + \sum_i \left[\frac{\left(\varphi^{n+1} \right)^2 - \left(\varphi^n \right)^2}{\tau} \right] \Big|_i = 0 \quad (1.36)$$

这就是(1.26)式在差分离散化情况下的表现形式, 它表明差分格式(1.29)满足总能量守恒。

上述办法完全可以推广到二维、三维情形。

2.3 显式完全平方守恒格式的构造

前述的隐式完全平方守恒格式虽然是稳定的, 但具体求解不甚方便, 甚至是较费机时的。为了克服这个困难, 下面进一步阐述显式完全平方守恒差分格式的构造方法。

今考虑发展方程

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\tilde{A}F \quad (1.37)$$

对 t 微分一次得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -\frac{\partial \tilde{A}F}{\partial t} \quad (1.38)$$

对网格函数 F_j^{n+1} 关于 F_j^n 作 Taylor 展开可得

$$F_j^{n+1} = F_j^n + \tau \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)_j^n + \dots \quad (1.39)$$

将(1.37)和(1.38)式代入(1.39)式可得

$$F_j^{n+1} = F_j^n - \tau (\tilde{A}F)_j^n - \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial \tilde{A}F}{\partial t} \right)_j^n + \dots \quad (1.40)$$

(1.40)式可改写为

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau} + (AF)_j^n + \varepsilon_n \frac{\tau}{2} \left(\frac{\delta AF}{\delta t} \right)_j^n = 0 \quad (1.41)$$

式中 $(A)^n$ 为 t_n 时对应于 $\tilde{A}$ 的空间差分算子, $\left(\frac{\delta AF}{\delta t} \right)_j^n$ 为 t_n 时相应于 $\frac{\partial \tilde{A}F}{\partial t}$ 的差分表达式,

ε_n 为待定系数, 或称为灵活性系数, 可通过适当选取系数 ε_n 达到使(1.41)式保持完全平方守恒的目的。

为了讨论方便, 不妨把(1.41)式左边第三项推广写为 $\varepsilon_n \tau B$ 的形式, 式中 B 称之为耗散算子, ε_n 可称之为耗散系数, 令

$$(L_n F)_j^n = (A_n F)_j^n + \varepsilon_n \tau (B_n F)_j^n \quad (1.42)$$

于是(1.41)可改写为

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau} + (L_n F)_j^n = 0 \quad (1.43)$$

可以证明如下定理。

定理 4. 若成立关系式

$$\tau \|L_n F^n\|^2 - 2(L_n F^n, F^n) = 0 \quad (1.44)$$

则(1.43)为显式完全平方守恒的差分格式。

定理 5. 设 A_n 为反对称算子, B 为正算子, 且 $(B_n F)^n \leq O(1)$ 和 $2K_3 \frac{\tau}{h} < 1$, 则当

$$\varepsilon_n = K_1 / \left[\left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 \right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 \right)^2 - \left(\frac{\tau}{h} K_3 \right)^2} \right] \quad (1.45)$$

时, 格式(1.43)为定时间步长的显式完全平方守恒的差分格式。其中

$$\begin{cases} K_1 = \|A_n F^n\|^2 / (B_n F^n, F^n) \\ K_2 = (B_n F^n, A_n F^n) h / (B_n F^n, F^n) \\ K_3 = \|A_n F^n\| \cdot \|A_n F^n\| h / (B_n F^n, F^n) \end{cases} \quad (1.46)$$

定理 6. 在定理 4 中, 若取

$$B_n F^n = \frac{A_n F^n - A_{n-1} F^{n-1}}{\tau}; \text{ 或} \quad (1.47)$$

$$B_n F^n = \frac{A_n \tilde{F}^{n+1} - A_n F^n}{\tau}, \quad \tilde{F}^{n+1} = F^n - \tau A_n F^n, \text{ 或} \quad (1.48)$$

$$B_n F^n = \frac{A_n F^{n+1} - A_{n-1} F^{n-1}}{2\tau} \quad (1.49)$$

则定理 4 成立。只要算子 A 和 B 是可交换的, 不难证明上述显式完全平方守恒差分格式也具有“广义能量”守恒和“平均尺度”守恒的性质。

显式完全平方守恒差分格式的优点在于它既能保持原方程的物理特性—能量守恒, 又能直接显式求解, 无需进行迭代, 而且明显的节省时间, 大致只需隐式方案计算时间的 $\frac{1}{3} \sim \frac{1}{5}$ 左右。

§ 3 原始方程模式的时间积分方案

由于原始方程模式既包含慢波解, 也包含快波解, 二者的相速相差一个数量级, 为了满足柯朗条件, 原始方程模式的时间步长比过滤模式大大缩短。因而花费的计算量也会成倍增长。为了减少原始方程模式的计算量, 提高预报时效, 研究和采用高效率的时间积分方案, 具有十分重要的实际的意义。目前, 原始方程模式中采用较多, 效果较好的时间积分方案有显式分离算法和半拉格朗日法, 以下分别予以介绍。