

# 信息光学教程

李俊昌 熊秉衡 等/编著



科学出版社

# 信息光学教程

李俊昌 熊秉衡 等 编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

为适应面向 21 世纪的信息光学教学需要,本书除系统介绍衍射的数值计算方法外,还包含了目前大学本科信息光学教材的主要内容.全书内容包括:二维线性系统、标量衍射理论、衍射积分的快速傅里叶变换计算、衍射受限成像及成像系统、部分相干理论、光学信息处理、全息照相、全息干涉计量、数字全息以及光波分复用中的基本器件与网络.本书所附光盘中提供了全书的习题及参考答案,附录提供了 MATLAB 语言编写的基本衍射计算及数字全息波前重建程序,并介绍了程序的运行方法.

本书可作为高等学校“信息光学”教材或相关的专业课教材及参考书.书中打“\*”号部分主要适于研究生及科技工作者参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

信息光学教程/李俊昌等编著. —北京:科学出版社,2011

ISBN 978-7-03-029460-9

I. ①信… II. ①李… III. ①信息光学-高等学校-教材 IV. ①O438

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 216767 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏志印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2011 年 1 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2011 年 1 月第一次印刷 印张: 18 3/4

印数: 1—3 000 字数: 440 000

定价: 41.00 元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 前 言

在信息光学研究领域中,光波的衍射理论是最基础的理论,如果要定量描述信息光学的实际技术问题,几乎都涉及衍射计算.由于实际的衍射问题几乎无解析解,必须借助于计算机作数值计算,随着计算机技术的飞速发展,信息光学技术已经与计算机结下不解之缘.然而,衍射计算通常是十分困难的工作,正如玻恩(M. Born)及沃尔夫(E. Wolf)在他们的名著《光学原理》(Principles of Optics)一书中指出的那样:“衍射问题是光学中遇到的最困难的问题之一,在衍射理论中很少存在某种意义上可以认为是严格的解……”在目前流行的信息光学著作或教材中,衍射计算方法的讨论较少,这在一定程度上成为学习和研究光信息技术的障碍.从光传播的物理概念出发,通过对不同形式衍射积分的研究,对目前流行的计算方法作简要总结,为相关专业的大学生、研究生及科技工作者提供方便,是本书的一个重要宗旨.

为适应面向 21 世纪的信息光学教学需要,本书除系统介绍衍射的数值计算方法外,还包含大学本科信息光学教材的主要内容.全书的结构为:第 1 章,数学预备知识;第 2 章,标量衍射理论;第 3 章,衍射积分的快速傅里叶变换计算;第 4 章,衍射受限成像及成像系统;第 5 章,部分相干理论;第 6 章,光学信息处理;第 7 章,全息照相;第 8 章,全息干涉计量;第 9 章,数字全息;第 10 章,光波分复用中的基本器件与网络.

为方便读者学习,本书附录 A 提供了 MATLAB 语言编写的衍射计算及数字全息波前重建程序,所附光盘除提供全书的习题及参考答案外,还介绍了附录 A 中程序的运行方法及运行程序时的相关文件.读者不但可以利用这些程序验证书中衍射计算及数字全息的主要内容,而且能解决许多实际问题.为了让本书既适用于本科生教学,又能为相关专业的研究生及科技工作者提供有益的参考,我们在书的目录中用“\*”号标注了部分章节,这些内容主要适用于研究生及科技工作者参考.

本书作者均长期在光信息技术第一线从事教学及科研工作,各章撰写分工如下:宫爱玲教授,第 1 章;李俊昌教授,第 2、3、4、9 章及计算程序;钱晓帆教授,第 5 章;伏云昌教授,第 6 章;熊秉衡教授,第 7、8 章;李川教授,第 10 章.全书由李俊昌及熊秉衡教授统稿.由于作者水平有限,书中不足及疏漏之处敬请读者指正.

李俊昌 熊秉衡  
2010 年 6 月

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 数学预备知识</b> .....	1
1.1 常用的几种非初等函数.....	1
1.1.1 矩形函数 .....	1
1.1.2 sinc 函数 .....	2
1.1.3 阶跃函数 .....	3
1.1.4 符号函数 .....	3
1.1.5 三角函数 .....	4
1.1.6 高斯函数 .....	4
1.1.7 圆域函数 .....	5
1.1.8 狄拉克 $\delta$ 函数 .....	5
1.1.9 梳状函数 .....	7
1.2 二维傅里叶变换.....	7
1.2.1 二维傅里叶变换的定义和存在条件.....	8
1.2.2 傅里叶变换定理 .....	9
1.2.3 二维傅里叶变换在极坐标下的表示 .....	10
1.3 线性系统 .....	10
1.3.1 线性系统的定义 .....	11
1.3.2 脉冲响应和叠加积分 .....	11
1.3.3 二维线性不变系统的定义.....	12
1.3.4 线性不变系统的传递函数和本征函数 .....	12
1.4 二维抽样定理 .....	13
1.4.1 函数的抽样 .....	13
1.4.2 原函数的复原 .....	14
1.4.3 空间-带宽积 .....	15
习题 1 .....	15
参考文献.....	16
<b>第 2 章 标量衍射理论</b> .....	17
2.1 光波的复函数表示 .....	17
2.1.1 单色光的复函数表示 .....	17
2.1.2 三维空间中光波场的表达式 .....	18
2.1.3 空间平面上平面波及球面波的复振幅 .....	19
2.2 标量衍射理论 .....	20

2.2.1	波动方程	20
2.2.2	衍射的角谱理论	21
2.2.3	基尔霍夫公式及瑞利-索末菲公式	23
2.2.4	衍射问题的傍轴近似——菲涅耳衍射积分	24
2.2.5	夫琅禾费衍射	26
2.3	夫琅禾费衍射的计算实例	27
2.3.1	矩形孔在透镜焦平面上的衍射图像	27
2.3.2	圆形孔的夫琅禾费衍射	28
2.3.3	振幅型正弦光栅的夫琅禾费衍射	29
2.4	菲涅耳衍射积分的计算及应用实例	30
2.4.1	正弦振幅光栅的菲涅耳衍射	30
2.4.2	矩形孔的菲涅耳衍射	32
2.4.3	直边衍射条纹的间距公式	34
2.5	柯林斯公式	35
2.5.1	傍轴光学系统的 $ABCD$ 矩阵表示	36
2.5.2	矩阵元素分别取零值时光学系统的性质	39
2.5.3	柯林斯公式	40
2.5.4	柯林斯公式与菲涅耳衍射积分的比较	40
	习题 2	42
	参考文献	44
<b>第 3 章</b>	<b>衍射积分的快速傅里叶变换计算</b>	<b>45</b>
3.1	离散傅里叶变换与傅里叶变换的关系	45
3.1.1	空域连续函数的离散及延拓	45
3.1.2	离散傅里叶变换与傅里叶变换的关系	46
3.2	菲涅耳衍射积分的快速傅里叶变换计算	48
3.2.1	菲涅耳衍射积分的 S-FFT 算法	49
3.2.2	菲涅耳衍射的 S-FFT 计算与实际测量的比较	51
3.2.3	菲涅耳衍射的 D-FFT 算法	51
3.2.4	使用解析形式的传递函数计算衍射的实验证明	53
*3.3	菲涅耳衍射变换及其在二元光学设计中的应用	55
3.3.1	菲涅耳衍射变换	55
3.3.2	二元光学元件	55
3.3.3	二元光学元件设计的 Gerchberg-Saxton(GS)算法	56
3.3.4	二元光学标记元件设计实例	57
*3.4	经典衍射公式及其快速傅里叶变换计算	58
3.4.1	基尔霍夫公式及瑞利-索末菲公式的卷积形式	58
3.4.2	经典衍射公式的统一表述	59
3.4.3	经典衍射公式 D-FFT 计算取样条件的讨论	60
3.4.4	基于能量守恒原理对实际取样条件的讨论	61

3.4.5	不同衍射积分的计算实例	61
3.4.6	不同衍射公式的 FFT 计算研究小结	63
	习题 3	64
	参考文献	65
<b>第 4 章</b>	<b>衍射受限成像及成像系统</b>	<b>66</b>
4.1	基于柯林斯公式讨论透镜的光学变换性质	66
4.1.1	物体在透镜前	66
4.1.2	物体在透镜后	69
4.1.3	透镜孔径引起的渐晕效应	70
4.2	衍射受限成像	72
4.2.1	衍射受限成像系统的脉冲响应	72
4.2.2	衍射受限成像系统像光场的计算	74
4.2.3	衍射受限成像实验及理论模拟	75
4.3	衍射受限成像系统的相干传递函数	76
4.3.1	出射光瞳较大时成像系统的脉冲响应	76
4.3.2	衍射受限成像系统的相干传递函数	77
4.3.3	像差对系统传递函数的影响	78
4.4	衍射受限系统的非相干传递函数	79
4.4.1	衍射受限系统的光学传递函数	79
4.4.2	衍射受限系统的光学传递函数和相干传递函数的关系	80
4.4.3	光学传递函数的一般性质和意义	81
4.4.4	衍射受限系统的 OTF 的计算	83
4.4.5	有像差的光学传递函数 OTF	85
4.4.6	有离焦像差的光学传递函数及成像计算	86
*4.5	相干成像与非相干成像系统的比较	91
4.5.1	两个点物像分辨极限的比较	91
4.5.2	像强度频谱的比较	92
4.5.3	图像阶跃边沿响应的比较与分析	93
4.5.4	相干光照明的散斑效应	96
	习题 4	98
	参考文献	98
<b>第 5 章</b>	<b>部分相干理论</b>	<b>100</b>
5.1	引言	100
5.2	可见度	102
5.3	互相干函数及相干度	104
5.4	时间相干和空间相干	107
5.5	恒星干涉仪	110
	习题 5	112
	参考文献	112

<b>第 6 章 光学信息处理</b> .....	113
6.1 阿贝二次成像理论和阿贝-波特实验空间频率滤波系统 .....	113
6.1.1 阿贝二次成像理论 .....	113
6.1.2 阿贝-波特实验 .....	114
6.2 空间频率滤波系统和空间滤波器.....	117
6.2.1 空间频率滤波系统 .....	117
6.2.2 空间滤波器 .....	118
6.2.3 Vanderlugt 滤波器 .....	119
6.2.4 Vanderlugt 滤波器的使用 .....	121
6.3 空间滤波器的应用实例.....	122
6.3.1 策尼克相衬显微镜 .....	122
6.3.2 Maréchal 的工作和补偿滤波器 .....	124
6.4 相干光信息处理系统.....	124
6.4.1 多重像的实现 .....	125
6.4.2 图像的相减和相加 .....	126
6.4.3 图像的特征识别 .....	127
6.4.4 逆滤波器和图像的恢复 .....	130
6.5 非相干光信息处理系统.....	131
6.5.1 两幅图像乘积的积分 .....	132
6.5.2 两幅图像的卷积和相关运算 .....	132
习题 6 .....	133
参考文献 .....	134
<b>第 7 章 全息照相</b> .....	135
7.1 全息照相的基本原理.....	135
7.1.1 平面波形成的全息图——全息光栅 .....	136
7.1.2 点光源形成的全息图(点源全息图) .....	146
7.1.3 同轴全息图和离轴全息图 .....	153
7.1.4 菲涅耳全息图和夫琅禾费全息图及傅里叶变换全息图 .....	156
7.2 几种其他主要类型的全息图.....	161
7.2.1 体积(厚)全息图 .....	161
7.2.2 白光再现全息图 .....	166
7.2.3 浮雕全息图 .....	170
7.2.4 脉冲全息图 .....	173
7.3 全息照相的应用概况.....	173
7.3.1 全息显示 .....	173
7.3.2 全息光学元件 HOE .....	175
7.3.3 全息信息存储 .....	176
习题 7 .....	177
参考文献 .....	178



<b>第 8 章 全息干涉计量</b> .....	180
8.1 单曝光法或实时全息法.....	180
8.1.1 基本原理 .....	180
8.1.2 实验方法和装置 .....	182
8.1.3 实时全息干涉计量实例 .....	185
8.2 二次曝光全息干涉计量或双曝光法.....	187
8.2.1 基本原理 .....	187
8.2.2 应用实例 .....	188
8.3 时间平均法原理及其应用.....	200
8.4 全息系统的智能化、小型化、多功能化.....	203
习题 8 .....	206
参考文献 .....	208
<b>第 9 章 数字全息</b> .....	210
9.1 离轴数字全息及波前的 1-FFT 重建 .....	210
9.1.1 离轴数字全息记录系统 .....	210
9.1.2 数字全息图的记录及重建过程中透射光的传播特性.....	211
9.1.3 离轴数字全息系统的设计 .....	214
9.1.4 数字全息系统的优化模拟及实验研究 .....	215
9.2 1-FFT 方法重建波前的噪声研究及消除 .....	217
9.2.1 数字全息图的衍射效率 .....	217
9.2.2 零级衍射干扰的直接消除 .....	217
9.3 可控放大率波前重建.....	219
9.3.1 可控放大率波前重建方法简介 .....	219
9.3.2 可控放大率 2-FFT 波前重建实验 .....	221
9.4 可控放大率波前重建中零级衍射干扰的抑制.....	223
9.4.1 球面波照射下数字全息图透射波的频谱分析 .....	223
9.4.2 抑制零级衍射干扰的两种方法 .....	224
*9.5 物光通过光学系统的波前重建.....	227
*9.6 数字全息在光学检测中的应用.....	228
9.6.1 实时数字全息检测透明物应力分布 .....	228
9.6.2 物体三维形貌的数字全息检测 .....	231
9.6.3 三维粒子场检测 .....	231
9.6.4 时间平均法数字全息振动分析 .....	234
9.6.5 飞秒级瞬态过程的数字全息检测技术 .....	235
9.6.6 多功能数字全息检测系统 .....	237
习题 9 .....	238
参考文献 .....	239
<b>第 10 章 光波分复用中的基本器件与网络</b> .....	242
10.1 光波在光纤中的传播 .....	242

---

10.1.1	光纤中光传播的几何光学近似 .....	243
10.1.2	光纤中光传播的波动光学理论 .....	245
10.2	光纤布拉格光栅 .....	251
10.3	光波在波导中的传播 .....	253
10.3.1	波导中光传播的几何光学近似 .....	253
10.3.2	波导中光传播的波动光学理论 .....	255
10.4	平面阵列波导光栅 .....	263
10.5	光信号的发送、接收和放大 .....	264
10.5.1	半导体激光器 .....	264
10.5.2	半导体光探测器 .....	267
10.5.3	光纤放大器 .....	268
10.6	光波分复用网络 .....	270
习题 10	.....	271
参考文献	.....	272
附录 A	衍射计算及数字全息的 MATLAB 基本程序 .....	274
附录 B	信息光学教程光盘内容 .....	288

# 第 1 章 数学预备知识

光是电磁波,光波的传播满足麦克斯韦方程.基于麦克斯韦方程并利用标量衍射理论研究光信息的产生、传播、获取、处理及应用,是信息光学的基本研究内容.在标量衍射的理论框架下,光波在介质空间及不同形式光学系统中的传播可以视为二维信息通过线性系统的过程.由于载有信息的光波场的表述涉及一些重要的数学函数,光波通过线性系统时受到的变换涉及基本的数学工具——傅里叶变换,光信息的数字化处理还涉及对光波场的合理离散及取样问题.因此,作为学习信息光学的数学预备知识,本章对常用的数学函数<sup>[1-4]</sup>、二维傅里叶变换、二维线性系统,以及取样定理进行介绍.

## 1.1 常用的几种非初等函数

### 1.1.1 矩形函数

宽度为  $a(a>0)$ 、中心在  $x_0$  的一维矩形函数定义为

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases} 1, & \left|\frac{x-x_0}{a}\right|\leq 1/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-1)$$

图 1-1-1 是该函数的图像.

当用  $x$  代表时间变量时,可以用一维矩形函数来描述照相机的快门,这时式(1-1-1)中的  $a$  就表示曝光时间;当用  $x$  代表空间变量时,可以用该函数表示无限大不透明屏上一个宽度为  $a$  的狭缝的透过率.

二维矩形函数可用两个一维矩形函数的乘积表示

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right), \quad a>0, b>0 \quad (1-1-2)$$

它表示  $xOy$  平面上以点  $(x_0, y_0)$  为中心的  $a\times b$  矩形区域内矩形函数取值为 1,其他地方处处等于 0,如图 1-1-2 所示为中心在原点、宽度为  $a\times b$  的二维矩形函数示意图.

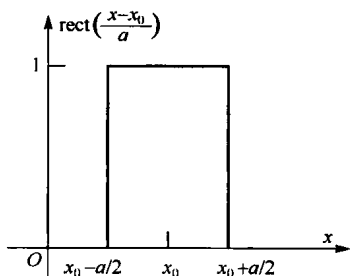


图 1-1-1 中心在  $x_0$ 、宽度为  $a$  的一维矩形函数

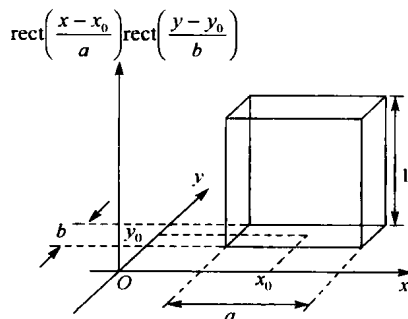


图 1-1-2 中心在原点、宽度为  $a\times b$  的矩形函数

二维矩形函数可用来描述无限大不透明屏上矩形孔的透过率,用它与某函数(或图像)相乘,可以截取矩形孔范围内的函数值,其他位置处赋予零值.图 1-1-3 描述了一幅二维图像的截取过程.图 1-1-3(b)中用黑色代表 0,白色代表 1,图 1-1-3(c)给出了截取结果.三幅图像的数学描述可以分别写为:图 1-1-3(a)  $I(x, y)$ ,图 1-1-3(b)  $\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$ ,图 1-1-3(c)  $I(x, y) \times \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$ .

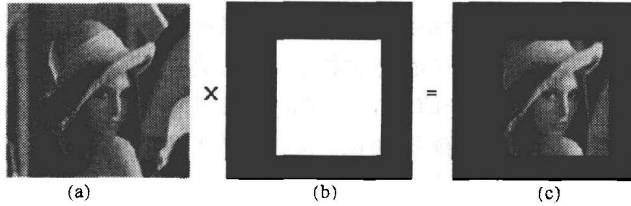


图 1-1-3 矩形函数截取二维图像的过程

### 1.1.2 sinc 函数

一维 sinc 函数定义为

$$\text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a}, \quad a > 0 \quad (1-1-3)$$

该函数在原点处有最大值 1,而在  $x = \pm na (n = 1, 2, 3, \dots)$  处的值等于 0,其函数图形如图 1-1-4 所示,原点两侧第一级零点之间的宽度(称为 sinc 函数的主瓣宽度)为  $2a$ ,并且它的面积(包括正波瓣和负波瓣)刚好等于  $a$ .

二维 sinc 函数定义为

$$\text{sinc}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)\text{sinc}\left(\frac{y}{b}\right), \quad a > 0, b > 0 \quad (1-1-4)$$

该函数是两个一维 sinc 函数的乘积,零点位置在  $(\pm ma, \pm nb)$ ,  $m, n$  均为正整数.

在光波衍射研究中将看到,一维 sinc 函数表示单缝(即一维矩形函数)的夫琅禾费衍射的振幅分布,二维 sinc 函数可以表示矩孔(即二维矩形函数)的夫琅禾费衍射的振幅分布,其平方则表示衍射的光强分布图样.图 1-1-5 是一个二维 sinc 函数的平方值分布图像.

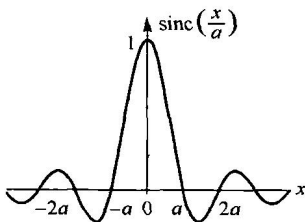


图 1-1-4 一维 sinc 函数图像

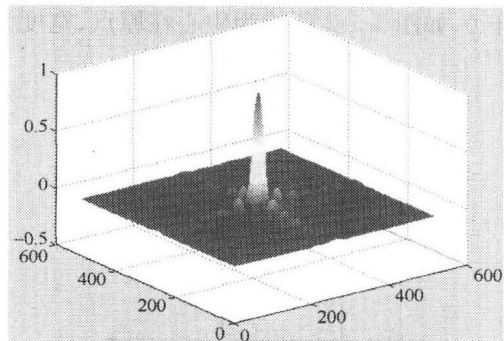


图 1-1-5 中心在(257,257)、瓣宽  $20 \times 20$  的二维 sinc 函数平方值分布图像

### 1.1.3 阶跃函数

一维阶跃函数定义为

$$\text{step}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{x}{a} < 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{x}{a} = 0 \\ 1, & \frac{x}{a} > 0 \end{cases} \quad (1-1-5)$$

其函数图形如图 1-1-6 所示.

该函数在原点  $x = 0$  处有一个间断点, 取值为  $\frac{1}{2}$ , 因此在这种情况下讨论函数的宽度是没有意义的. 将一维阶跃函数与某函数相乘时, 在  $x > 0$  的部分, 乘积等于该函数值; 在  $x < 0$  的部分, 乘积恒等于 0. 因而一维阶跃函数的作用如同一个“开关”, 可在原点处“开启”或“关闭”另一个函数, 而实际应用中该开关点也可以选在非原点处, 用它乘以某函数(或图像)可使开关点一侧的函数保留原值, 另一侧则赋予零值. 开关点处取函数值的一半, 但在图像处理中这只是对应整幅图像上的一个取值点, 通常无关紧要.

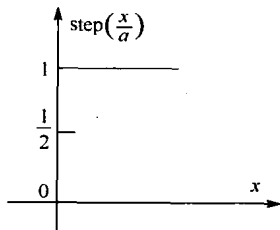


图 1-1-6 中心在原点的一维阶跃函数

二维阶跃函数定义为

$$f(x, y) = \text{step}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (1-1-6)$$

二维阶跃函数在  $y$  方向上等于常数, 而在  $x$  方向上等同于一维阶跃函数, 即相当于一维阶跃函数在  $y$  方向上延伸. 参照图 1-1-3, 这种函数可以用来描述光学直边(或刀口)的透过率.

### 1.1.4 符号函数

一维符号函数定义为

$$\text{sgn}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} +1, & \frac{x}{a} > 0 \\ 0, & \frac{x}{a} = 0 \\ -1, & \frac{x}{a} < 0 \end{cases} \quad (1-1-7)$$

其函数图形如图 1-1-7 所示.

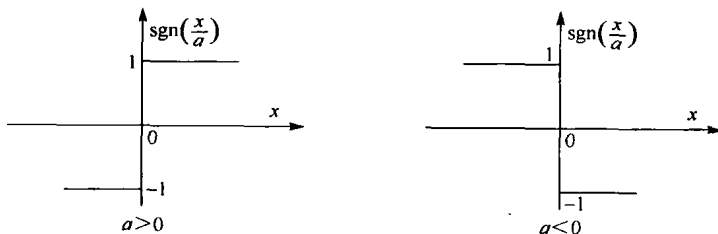


图 1-1-7  $a > 0$  及  $a < 0$  时中心在原点的符号函数示意图

符号函数  $\text{sgn}(x)$  与某函数相乘, 可使被乘函数以某点为界, 此点一侧的函数值极性发生翻转. 在实际应用中, 如可用于表示某光学孔径的一半嵌有  $\pi$  相位板, 与另一半的相位相反, 符号函数描述该光学孔径的负振幅透过率.

### 1.1.5 三角函数

一维三角函数定义为

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & \frac{|x|}{a} < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad a > 0 \quad (1-1-8)$$

该函数表示底边宽度为  $2a$ 、高度为 1 的三角形, 函数图形如图 1-1-8 所示.

二维三角形函数定义为

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \Lambda\left(\frac{x}{a}\right)\Lambda\left(\frac{y}{b}\right) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right)\left(1 - \frac{|y|}{b}\right), & \frac{|x|}{a}, \frac{|y|}{b} < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-9)$$

式中,  $a > 0, b > 0$ . 该函数可视为两个一维三角函数的乘积, 其函数图形如图 1-1-9 所示.

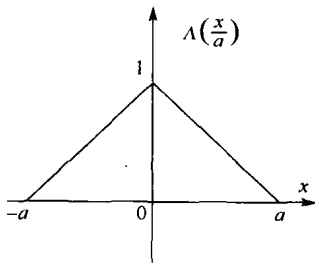


图 1-1-8 中心在原点、宽度为  $2a$  的一维三角函数

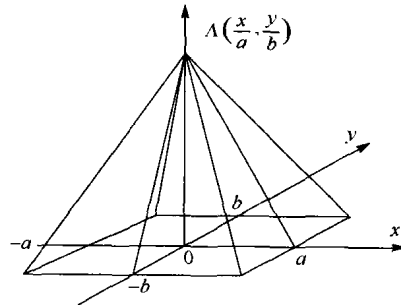


图 1-1-9 中心在原点、宽度为  $a \times a$  的二维三角函数

在第 5 章关于光学成像的讨论中将看到, 二维三角函数可用来表示一个光瞳为矩形的非相干成像系统的光学传递函数.

### 1.1.6 高斯函数

一维高斯函数定义为

$$\text{Gauss}\left(\frac{x}{a}\right) = \exp\left(-\pi \frac{x^2}{a^2}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{(a/\sqrt{\pi})^2}\right), \quad a > 0 \quad (1-1-10)$$

函数图形如图 1-1-10 所示, 通常将  $a/\sqrt{\pi}$  称为高斯函数半径. 当  $x = a/\sqrt{\pi}$  时, 函数值变为  $1/e$ .

二维高斯函数定义为

$$\text{Gauss}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \exp\left(-\pi \frac{x^2}{a^2} - \pi \frac{y^2}{b^2}\right), \quad a > 0, b > 0 \quad (1-1-11)$$

通常用二维高斯函数表示基横模激光束在垂直于传播方向的振幅分布. 由于光波场强度与振幅平方成正比, 功率为  $P_0$ 、半径为  $w$  的高斯光束的强度分布为

$$I_{\text{Gauss}}(x, y) = \frac{2P_0}{\pi w^2} \exp\left(-2 \frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) \quad (1-1-12)$$

式中,  $\frac{2P_0}{\pi w^2}$  为归一化因子. 容易证明, 式(1-1-12)在  $xy$  平面的积分值为  $P_0$ .

高斯函数是光滑函数, 且各阶导数都是连续的. 在傅里叶变换研究中将看到, 高斯函数的傅里叶变换也是高斯函数.

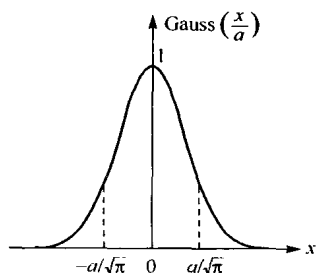


图 1-1-10 中心在原点的一维高斯函数

### 1.1.7 圆域函数

圆域函数通常用于极坐标中涉及圆孔衍射问题的计算, 在极坐标及直角坐标系中的定义分别如下:

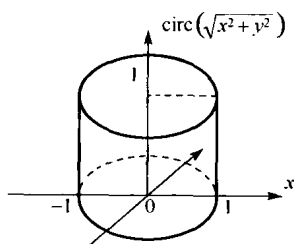


图 1-1-11 圆域函数的图像

$$\text{circ}(r) = \text{circ}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \begin{cases} 1, & r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0, & r = \sqrt{x^2 + y^2} > 1 \end{cases} \quad (1-1-13)$$

圆域函数的图像绘于图 1-1-11. 不透明屏  $xy$  上中心在  $(x_0, y_0)$ 、半径为  $a$  的圆孔的透过率可以表示为

$$\text{circ}\left(\frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{a}\right)$$

### 1.1.8 狄拉克 $\delta$ 函数

#### 1. $\delta$ 函数的定义

狄拉克  $\delta$  函数(简称  $\delta$  函数)用于描述脉冲这一类物理现象, 如单位能量的瞬间电脉冲可用时间为变量的  $\delta(t)$  来描述; 空间变量的  $\delta$  函数可以表述单位电量点电荷的电流密度及单位质量质点的质量密度. 在信息光学研究中, 空间变量的  $\delta$  函数通常用于表示单位光通量的点光源. 这些物理量的特点在数学上可抽象为在脉冲所在点之外其值为零, 而包含脉冲所在点内的任意范围的积分等于 1. 数学上将具有这种性质的函数定义为  $\delta$  函数. 定义  $\delta$  函数的数学表达式有多种, 以下导出其中一种表达式.

分析函数序列  $f_N(x) = N \text{rect}(Nx)$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ). 图 1-1-12 给出了  $N = 1, 2, 4$  时的函数图像. 由图可见, 当  $N$  逐渐变大时, 函数不为零的范围逐渐变小, 而在此范围内的函数值却逐渐变大. 不难想象, 当  $N$  增大至无穷时, 函数的值也将增到无穷大, 但无论如何, 函数曲线与横轴围成的面积始终为 1. 于是, 利用矩形函数可以将  $\delta$  函数定义为

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{rect}(Nx)$$

利用类似的方法, 还可以得出  $\delta$  函数的如下表达式:

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \exp(-N^2 \pi x^2)$$

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{sinc}(Nx)$$

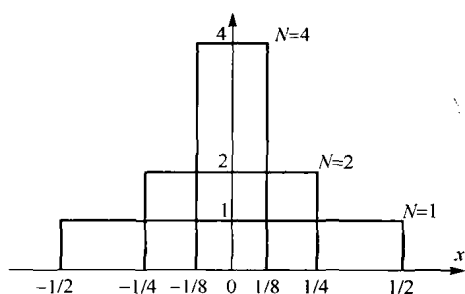


图 1-1-12  $N = 1, 2, 4$  时  $f_N(x) = N \text{rect}(Nx)$  的函数图像

二维  $\delta$  函数是一维  $\delta$  函数的简单推广, 下面列举几种常用的定义:

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \text{rect}(Nx) \text{rect}(Ny) \quad (1-1-14)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi(x^2 + y^2)] \quad (1-1-15)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \text{sinc}(Nx) \text{sinc}(Ny) \quad (1-1-16)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2}{\pi} \text{circ}(N \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (1-1-17)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \frac{J_1(2\pi N \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1-1-18)$$

以上最后一个表达式中  $J_1$  为一阶贝塞尔函数, 实际应用中,  $\delta$  函数的某种定义可能会比另一种定义使用起来更方便些, 因此可以根据情况选择相应的表达式. 按照同样的原则, 我们可以对三维甚至多维空间的  $\delta$  函数作出恰当的定义.

## 2. $\delta$ 函数的主要性质

### 1) $\delta$ 函数的坐标缩放性质

若  $a$  为任意常数, 则

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (1-1-19)$$

### 2) $\delta$ 函数的相乘性质

若  $\varphi(x)$  在  $x_0$  点连续, 则

$$\varphi(x) \delta(x - x_0) = \varphi(x_0) \delta(x - x_0) \quad (1-1-20)$$

### 3) $\delta$ 函数的卷积性质

定义如下表达式为  $\delta$  函数与函数  $\varphi$  的卷积:

$$\delta(x) * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0) \varphi(x - x_0) dx_0$$

则有

$$\delta(x) * \varphi(x) = \varphi(x) * \delta(x) = \varphi(x) \quad (1-1-21)$$

### 4) $\delta$ 函数的筛选性质

$\delta$  函数的筛选性质在进行分析和计算中非常有用, 仅以一维  $\delta$  函数为例介绍其性质, 并给出相应证明.



若  $\varphi(x)$  在  $x$  点连续, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\varphi(x)dx = \varphi(x_0) \quad (1-1-22)$$

**证明** 令  $x-x_0 = x'$ , 式(1-1-22)左边可重写为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x+x_0)dx &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} \delta(x)\varphi(x+x_0)dx + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x)\varphi(x+x_0)dx \\ &\quad + \int_{+\epsilon}^{\infty} \delta(x)\varphi(x+x_0)dx \end{aligned}$$

当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 上式第一、三项仍然为零, 于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\varphi(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x)\varphi(x+x_0)dx = \varphi(x_0) \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x)dx = \varphi(x_0)$$

对于二维以上的  $\delta$  函数, 通过类似的讨论也可以证明其具有相似的筛选特性.

### 1.1.9 梳状函数

$\delta$  函数可以用来描述线光源或点光源, 若在同一直线排列无穷多个等距离的这样的点光源, 则可以用该直线上无穷多个等距离的  $\delta$  函数之和来表示. 同样, 若在一个平面上纵横排列着无穷多个各自等距离的点光源, 则可用该平面上无穷多个等间隔排列的  $\delta$  函数之和来表示. 为了描述这种情况, 引入梳状函数.

梳状函数是一等距离排列的  $\delta$  函数, 由于在描述光栅这一类光学器件的透过率并将连续函数离散时很方便, 一维梳状函数定义如下:

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1-1-23)$$

图 1-1-13 给出了  $\delta(x)$  函数及梳状函数  $\text{comb}(x)$  的图像.

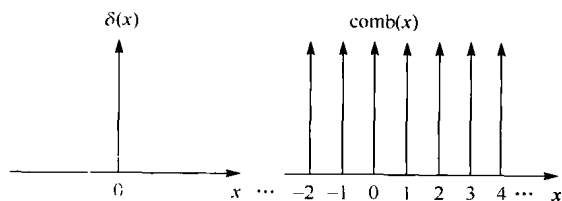


图 1-1-13  $\delta(x)$  函数及梳状函数  $\text{comb}(x)$  的图像

二维梳状函数可基于一维定义表示为

$$\text{comb}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(y-m), \quad n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (1-1-24)$$

梳状函数与普通函数的乘积, 可以视为对该函数进行等间距的抽样, 只取梳状函数有值的位置点处的函数值, 所以梳状函数又称为普通函数的抽样函数, 在讨论图像的抽样理论时极为有用.

## 1.2 二维傅里叶变换

傅里叶变换对于分析线性及非线性问题是一个有力的数学工具. 由于光波场的传播过程可视为由广义的“物”光场到“像”光场二维分布的一个线性变换, 现对二维傅里叶变换作介绍.