

新世纪土木工程系列教材

结构稳定理论

周绪红 主 编

郑 宏 副主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

新世纪土木工程系列教材

结构稳定理论

JIEGOU WENDING LILUN

周绪红 主 编

郑 宏 副主编

 高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS · BEIJING

内容提要

本书是新世纪土木工程系列教材之一。

本书紧密结合钢结构课程所涉及的结构稳定问题,介绍了结构稳定理论的基本原理和计算临界荷载的常用方法。全书共8章,主要内容包括结构稳定问题概述、结构稳定计算的能量法、轴心受压杆件的整体稳定、杆件的扭转与梁的弯扭屈曲、受压杆件的扭转屈曲与弯扭屈曲、压弯杆件在弯矩作用平面内的稳定、刚架的稳定及薄板的屈曲。

本书可作为高等学校土木工程专业高年级本科生教材,也可供相关专业的研究生、教师和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构稳定理论 / 周绪红主编. —北京: 高等教育出版社, 2010. 11

新世纪土木工程系列教材

ISBN 978-7-04-030838-9

I. ①结… II. ①周… III. ①结构稳定性—理论—高等学校—教材 IV. ①TU311. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 173360 号

策划编辑 赵湘慧

责任绘图 尹莉

责任印制 韩刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京民族印务有限责任公司

开 本 787 × 960 1/16
印 张 9.75
字 数 170 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2010 年 11 月第 1 版
印 次 2010 年 11 月第 1 次印刷
定 价 16.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 30838-00

教育部高等教育出版社土建类系列教材

编辑委员会委员名单

主任委员：沈蒲生(湖南大学)

副主任委员：(按姓氏笔画排序)

叶志明(上海大学)

白国良(西安建筑科技大学)

吴胜兴(河海大学)

邹超英(哈尔滨工业大学)

周绪红(兰州大学)

强士中(西南交通大学)

委员：(按姓氏笔画排序)

卫 军(中南大学)

王 健(北京建筑工程学院)

王 湛(华南理工大学)

王清湘(大连理工大学)

朱彦鹏(兰州理工大学)

刘 明(沈阳建筑大学)

江见鲸(清华大学)

杨和礼(武汉大学)

李远富(西南交通大学)

沙爱民(长安大学)

张印阁(东北林业大学)

张家良(辽宁工业大学)

尚守平(湖南大学)

周 云(广州大学)

赵明华(湖南大学)

高 波(西南交通大学)

黄政宇(湖南大学)

黄醒春(上海交通大学)

梁兴文(西安建筑科技大学) 廖红建(西安交通大学)

霍 达(北京工业大学)

出版者的话

新世纪土木工程系列教材是我社组织编写出版的“大土木”范畴的专业系列教材。1998年教育部颁布了新修订的《普通高等学校本科专业目录和专业介绍》，新专业目录中土建类土木工程专业覆盖了原来建筑工程和交通土建工程等8个专业。1999年各高校已按新的专业目录招生。开设土木工程专业的各院校把近年来在教育思想与教学观念、教学内容与课程体系、教学方法与教学手段等方面取得的改革成果固化到教学计划和人才培养过程中，设计了从教学思想到教学模式等一系列教学改革方案。大家在教学实践中体会到：专业、课程教学改革必然引起相应的教材改革。我社从1999年开始进行土木工程专业系列教材的策划工作，并于2000年成立了“教育部高等教育出版社土建类系列教材编委会”。

我们编辑出版土木工程系列教材的指导思想是：

1. 紧密结合人才培养模式改革，根据拓宽专业基础、提高综合素质、增强创新能力的要求，调整学生的知识结构。

2. 从各院校调整土建类各专业教学计划出发，加强基础课程到专业课程的有机沟通，用系统的观点和方法建立新的课程体系结构，包括对课程的整合与集成，组织和建设专业核心课程，成套成系列地推出土木工程系列教材。

3. 各门课程教材要具有与本门学科发展相适应的学科水平，以科技进步和社会发展的最新成果充实、更新教材内容，贯彻理论联系实际的原则。

4. 要正确处理继承、借鉴和创新的关系，不能简单地以传统和现代划线，决定取舍，而应根据教学要求进行取舍。继承、借鉴历史和国外的经验，注意研究结合我国的现实情况，择善而从，消化创新。

5. 随着高新技术、特别是数字化和网络化技术的发展，在土木工程系列教材建设中，要充分考虑文字教材与音像、电子、网络教材的综合发展，发挥综合媒体在教学中的优势，提高教学效率。在开发研制教学软件的同时，要注意使文字教材与先进的软件接轨，明确不同形式教材之间的关系是相辅相成、相互补充的。

6. 坚持质量第一。图书是特殊的商品，教材是特殊的图书。教材质量

的优劣直接影响教学质量和教学秩序,最终影响学校人才培养的质量。教材不仅具有传播知识、服务教育、积累文化的功能,也是沟通作者、编辑、读者的桥梁,一定程度上还代表着国家学术文化或学校教学、科研水平。因此,遴选作者、审订教材、贯彻国家标准和规范等方面需严格把关。

为了实现本套教材的指导思想,我们组建了由有丰富的教学经验、有较高的学术水平和学术声望的教师组成的编委会,由编委会研究提出土木工程系列教材的选题及其基本内容与编审原则,并推荐作者。

我们出版本系列教材,旨在为新世纪的土木工程专业学生提供一套经过整合优化的比较系统的专业系列教材,以期为我国的土木工程专业教材建设贡献自己的一份力量。

本系列教材第1版出版之后,在教学实践基础上,将组织修订出版第2版、第3版,希望在不断修订过程中更新内容、消除疏漏,更加适应教学需要。

本系列教材的编写大纲和初稿、修订稿都经过了编委会的审阅,以求教材质量更臻完善。如有疏漏之处,请读者批评指正!

高等教育出版社
建筑与力学分社
2006年3月

前 言

“结构稳定理论”课程是土木工程专业本科教学中的一门专业基础课,是“钢结构”专业课的先修课程。“结构稳定理论”课程难度较大、学时较少,又由于较多地涉及抽象的力学理论,使学生难学、老师难教,如何教好这门课程是编者多年探索的问题。本书是编者根据多年教学经验,在讲义的基础上逐步精炼修改而成的,是一本适合高等学校建筑工程、交通土建专业高年级本科生的教材,也可作为相关专业研究生、教师和工程技术人员的参考书。

本书具有以下两个特点:

(1) 不追求全面系统地介绍结构稳定理论,而是紧密结合钢结构课程所涉及的结构稳定问题,有针对性地介绍结构稳定理论的基本原理和常用的临界荷载计算方法,使读者在后续钢结构课程学习中能够准确理解钢结构稳定设计理论和设计公式的来龙去脉。与其他结构稳定理论著作相比较,本书舍弃了一些复杂的、与钢结构课程不直接相关的内容,使读者能在有限的学时内构建起结构稳定理论的知识结构。

(2) 尽量以材料力学、结构力学和弹性力学基本知识为基础,深入浅出地分析钢结构的屈曲现象和屈曲特性,探索采用简单的方法解决问题,避免复杂的力学理论,使读者容易理解和接受。

全书共分8章,主要内容包括结构稳定问题概述、结构稳定计算的能量法、轴心受压杆件的整体稳定、杆件的扭转与梁的弯扭屈曲、受压杆件的扭转屈曲与弯扭屈曲、压弯杆件在弯矩作用平面内的稳定、刚架的稳定及薄板的屈曲。其中,第1~5章由兰州大学周绪红执笔,第6~8章由长安大学郑宏执笔。全书由周绪红统稿。

在本书编写过程中,引用了大量的参考文献。湖南大学贺拥军教授对书稿提出了宝贵意见。在此,谨向所有文献作者和贺拥军教授表示衷心的感谢!

由于编者水平所限,书中难免存在缺点和不足,诚请读者批评指正。

编 者
2010年4月

目 录

第 1 章 结构稳定问题概述	1
1.1 引言	1
1.2 结构稳定问题及其分类	1
1.3 判断平衡的稳定性准则与确定临界荷载的基本方法	4
1.3.1 静力准则与静力法	4
1.3.2 能量准则与能量法	7
1.3.3 动力准则与动力法	8
1.4 钢结构稳定问题与强度问题的区别	9
习题	11
第 2 章 结构稳定计算的能量法	12
2.1 引言	12
2.2 铁摩辛柯能量法	12
2.3 势能驻值原理和最小势能原理	18
2.4 瑞利-里兹法	19
2.5 迦辽金法	22
习题	24
第 3 章 轴心受压杆件的整体稳定	26
3.1 引言	26
3.2 轴心受压杆件的弯曲失稳	27
3.2.1 理想轴心受压杆件弯曲失稳的临界荷载	27
3.2.2 弹塑性弯曲失稳	31
3.2.3 初弯曲(初挠度)的影响	33
3.2.4 初偏心的影响	35
3.2.5 残余应力的影响	38
3.2.6 有弹性支承的轴心受压杆件的稳定	40
3.2.7 变截面轴心压杆的稳定	44
3.3 格构式轴心受压杆件的稳定	46
3.3.1 剪切变形对临界力的影响	47
3.3.2 缀条式轴心受压杆件的临界荷载	49
3.3.3 缀板式轴心受压杆件的临界荷载	51
习题	55

第 4 章 杆件的扭转与梁的弯扭屈曲	58
4.1 引言	58
4.2 自由扭转	58
4.3 约束扭转	60
4.3.1 约束扭转的平衡微分方程	61
4.3.2 约束扭转的翘曲正应力与翘曲切应力	63
4.4 梁的弯扭屈曲	65
4.5 用能量法计算工字梁的弯扭屈曲临界荷载	70
4.5.1 均匀弯矩作用、两端简支的工字梁	70
4.5.2 均匀弯矩作用、两端固定的工字梁	74
习题	75
第 5 章 受压杆件的扭转屈曲与弯扭屈曲	76
5.1 引言	76
5.2 轴心压杆的扭转屈曲和弯扭屈曲	76
5.2.1 扭转屈曲	76
5.2.2 弯扭屈曲	78
5.2.3 计算弯扭屈曲的换算长细比法	81
5.3 偏心压杆的弯扭屈曲	83
5.4 用能量法计算开口薄壁轴心压杆的屈曲荷载	86
5.5 用能量法计算开口薄壁偏心压杆的屈曲荷载	91
习题	95
第 6 章 压弯杆件在弯矩作用平面内的稳定	97
6.1 引言	97
6.2 横向均布荷载作用的压弯杆件	97
6.3 横向集中荷载作用的压弯杆件	99
6.4 两端等弯矩作用的压弯杆件	100
6.5 压弯杆件的等效弯矩系数	102
6.6 压弯杆件在弯矩作用平面内的稳定计算	104
习题	106
第 7 章 刚架的稳定	107
7.1 引言	107
7.2 平衡法计算刚架的临界荷载	108
7.3 考虑轴力效应的转角位移方程	110
7.3.1 无侧移弹性压弯杆件的转角位移方程	111
7.3.2 有侧移弹性压弯杆件的转角位移方程	112

7.4 用位移法计算刚架的临界荷载	115
7.5 单层刚架柱的计算长度系数	117
习题	118
第 8 章 薄板的屈曲	120
8.1 引言	120
8.2 薄板屈曲的小挠度理论	120
8.2.1 采用小挠度理论的三个假定	120
8.2.2 薄板的力矩位移方程——物理条件与几何条件	123
8.2.3 薄板屈曲的平衡微分方程	124
8.3 平衡法求解单向均匀受压四边简支板的临界荷载	127
8.4 用瑞利-里兹法计算薄板的临界荷载	130
8.4.1 求解薄板屈曲问题的瑞利-里兹法	130
8.4.2 均匀受压三边简支一边自由矩形板的屈曲荷载	132
8.4.3 非均匀受压四边简支矩形薄板的屈曲荷载	133
8.5 用迦辽金法计算薄板的临界荷载	136
8.5.1 求解薄板屈曲问题的迦辽金法	136
8.5.2 均匀受压两加载边简支、两非加载边固定的矩形板的屈曲荷载	136
8.5.3 均匀受剪四边简支矩形板的屈曲荷载	138
习题	140
参考文献	142

第 1 章

结构稳定问题概述

1.1 引言

钢结构因其优良的性能被广泛地应用于多高层建筑、工业厂房、大跨度结构、高耸构筑物、轻型钢结构和桥梁结构等。由于钢材的强度高,所制成的构件比较细长、板件比较宽薄,容易发生整体失稳或局部失稳,因此稳定问题是钢结构的突出问题。

因稳定问题处理不当造成的重大事故时有发生。1907年,加拿大圣劳伦斯河上的魁北克桥,在用悬臂法架设桥的中跨桥架时,由于悬臂的受压下弦失稳,导致桥架倒塌,9 000 t 钢结构全部坠入河中,桥上施工人员 75 人罹难。美国哈特福德市(Hartford City)一座体育馆的网架屋盖,平面尺寸为 92 m×110 m,该体育馆 1971 年开始施工,1975 年建成,交付使用后于 1987 年 1 月 18 日突然坍塌。苏联古比雪夫列宁冶金厂锻压车间在 1957 年末,因 7 榀钢屋架压杆屈曲,导致 1 200 m²屋盖突然塌落。苏联在 1951—1977 年期间所发生的 59 起重大钢结构事故中,有 17 起事故是由于结构的整体或局部失稳造成的。在我国,也发生了一些钢网架、钢桁架、门式刚架、输电塔等钢结构失稳破坏的事故。由此可见,钢结构的稳定设计不好,将会导致钢结构的失稳破坏或重大事故,除了会造成严重的经济损失,还会造成人员的伤亡。

钢结构的稳定问题是钢结构设计中必须解决的重要问题,学习和掌握结构稳定理论及其设计方法,对保证钢结构设计的安全性至关重要。

1.2 结构稳定问题及其分类

为了理解结构稳定问题的概念,可用刚性球在曲面上的稳定性来说明。将一个刚性球分别放在三个不同的曲面上,表示三种不同性质的平衡状态,如图 1.1 所示。图 1.1a 所示的球在一个凹面的底部处于平衡状态,如果有一侧向扰

动力使球偏离底部(图中虚线球位置),当撤去侧向扰动力后,球在重力作用下,经过摆动仍恢复到原来的平衡位置,则这种平衡状态是稳定的平衡状态。图 1.1b 所示的球在一个平面上处于平衡状态,如果有侧向扰动力使球偏离原来的平衡位置,当撤去扰动力后,球体不再回到原来的平衡位置,而是停留在一个新的平衡位置(图中虚线球位置),这种推到何处就停在何处的状态称为随遇平衡状态或中性平衡状态。图 1.1c 所示的球在凸面顶点处于平衡状态,如果有一侧向扰动力使球偏离顶点(图中虚线球位置),撤去侧向扰动力后,球不仅不能恢复到顶点,反而继续沿着凸面滚动,远离原来的平衡位置,因此这种平衡状态是不稳定的平衡状态。

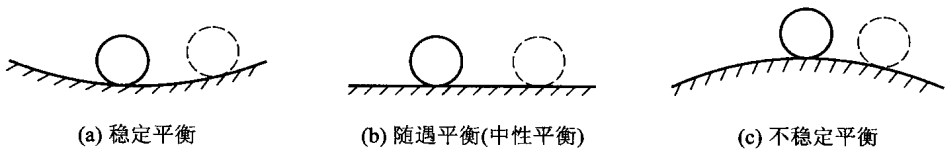


图 1.1 刚体的平衡状态

上述现象与说明,有助于理解轴心压杆的稳定问题。假定图 1.2 所示受压杆件两端铰支、荷载作用于形心轴(即轴心受压)、杆轴线沿杆长完全平直、横截面双轴对称且沿杆长均匀不变、杆件内无初应力、材料符合胡克定律。一般说来,实际杆件很难满足上述假定,因此称符合上述假定的压杆为理想压杆,理想轴心压杆的稳定问题是最基本的结构稳定问题。当轴向荷载较小时,杆件只产生轴向压缩变形,杆件仍然保持平直的直线平衡状态,此时若给杆件施加一微小扰动水平力,使杆件发生微小弯曲,而当取消这一扰动后,杆件将恢复到原来的直线平衡状态,故此平衡状态是稳定的(图 1.2a)。当逐渐加大轴向荷载达到某一值 F_{cr} 时,施加微小的扰动水平力使杆件发生弯曲,当取消这一扰动后,杆件仍然保持微弯状态而不再恢复到原来的直线平衡状态,此平衡状态是随遇的,称为随遇平衡或中性平衡(图 1.2b)。由此可见,在轴向荷载达到 F_{cr} 时,杆件除存在直线平衡状态外,还存在微弯曲平衡状态,这种现象称为“平衡分支”现象。当轴向荷载超过 F_{cr} 时,微小的扰动将使杆件产生很大的弯曲变形,从而导致杆件破坏,此时的直线平衡状态是不稳定的,这种现象称为杆件的弯曲屈曲或弯曲失稳。弯曲失稳是杆件丧失整体稳定的一种形式。杆件弯曲失稳时,杆件由直线平衡形式变为弯曲平衡形式,这种失稳前后平衡形式发生变化的失稳现象称为丧失了第一类稳定,也可称为分支点失稳。中性平衡状态是从稳定平衡过渡到不稳定平衡的一种临界状态,发生中性平衡时所施加的轴向荷载 F_{cr} 称为临界荷载或临界力,相应的截面应力称为临界应力 σ_{cr} ,临界荷载也是保持杆件呈微弯

曲状态时的轴向荷载。图 1.2c 表示上述理想压杆的轴向荷载 F 与杆件中点的挠度 δ 的关系。当 $F < F_{cr}$ 时,为稳定平衡;当 $F > F_{cr}$ 时,为不稳定平衡;当 $F = F_{cr}$ 时,为中性平衡,出现平衡分支现象。荷载达到临界荷载 F_{cr} 就出现了平衡分支点 A ,也就意味着稳定平衡终止,不稳定平衡开始。

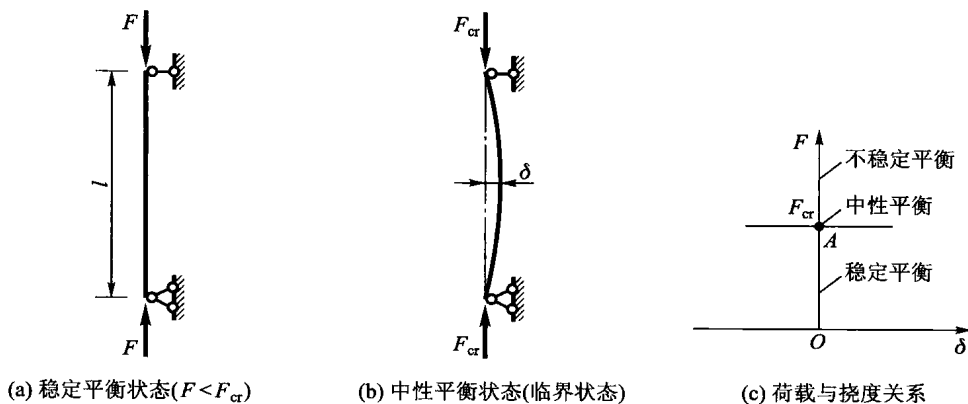


图 1.2 轴心压杆的平衡状态

丧失第一类稳定的特征是结构在失稳前后的变形产生了性质上的改变,即原来的平衡形式不稳定后,可能出现与原来平衡形式有本质区别的新平衡形式,如理想轴心压杆失稳,杆件由直线平衡形式突然变为弯曲平衡形式,这种改变是突然性的。丧失第一类稳定不只是发生在理想压杆中,在其他结构(如梁、薄板、承受静水压力的圆弧拱、节点承受集中荷载的刚架等)中也可能出现。

除上述第一类稳定问题外,还有第二类稳定问题。丧失第二类稳定的特征是结构在失稳前后变形的性质不变,只是原来的变形大大发展直到破坏,不会出现新的变形形式。如图 1.3 所示偏心压力 F 作用下的两端铰支偏心压杆,不论 F 为何值,杆件总是同时发生压缩和弯曲变形。当 F 达到临界荷载 F_u 之前,如果荷载不继续增大,则杆件的变形不会增大。当 F 达到临界荷载 F_u 后,即使不增大荷载,甚至减小荷载,变形仍将继续增大直到破坏,但失稳前后杆件弯曲变形的性质始终不变,这种失稳前后变形形式不发生变化的失稳现象称为丧失了第二类稳定。从图 1.3 中可以看出, A 点为稳定平衡状态过渡到不稳定平衡的临界点,也是极值点,相应的临界荷载 F_u 为偏心压杆的最大承载力,也称为极限荷载或压溃荷载,因此第二类失稳又可称为极值点失稳。

实际工程结构中,杆件通常处于压弯状态,存在初弯曲、荷载初偏心、残余应力等缺陷,所以第一类稳定问题只是一种理想情况,实际结构中并不存在。尽管如此,与第二类稳定问题比较,由于解决第一类稳定问题比较简便,理论也比较

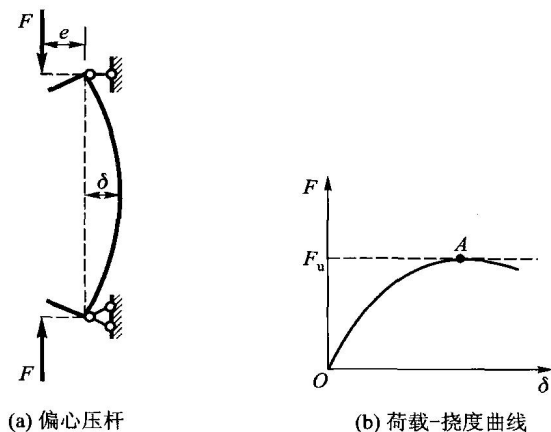


图 1.3 极值点失稳

成熟,因此很多问题仍然按第一类稳定问题对待,而采用安全系数等方式来考虑初始缺陷等因素的影响。

以上两类稳定问题是按照结构或构件在失稳前后变形形式是否发生质变这一观点来划分的。实际上,除了这两类基本稳定问题外,还可按照另外的观点将结构的稳定问题进行分类,在此不再赘述。

1.3 判断平衡的稳定性准则与确定临界荷载的基本方法

判断平衡的稳定性通常有三个准则,即静力准则、能量准则和动力准则。稳定计算的主要目的在于确定临界荷载值,对应于静力准则、能量准则和动力准则,有确定临界荷载的静力法、能量法和动力法,分别介绍如下。

1.3.1 静力准则与静力法

处于平衡状态的结构体系,受到微小扰动力后,若在体系上产生一指向直线平衡位置的力(正恢复力),当扰动除去后结构恢复到原来的平衡位置,则平衡是稳定的;若产生负恢复力,则平衡是不稳定的;若不产生任何作用力,则体系处于中性平衡,处于中性平衡状态的荷载就是临界荷载,这就是判定体系平衡稳定性的静力准则。对于理想压杆而言,当荷载达到临界荷载时,压杆可能有直线和曲线两种平衡形式,而原来的直线平衡形式是不稳定的。因此,可以在压杆微弯曲的中性平衡状态下建立平衡微分方程来求解临界荷载,这就是静力法,有时也称为平衡法,它是求解结构临界荷载最基本的方法。在一般情况下,采用静力法

可以求得临界荷载的精确解。需指出的是,静力法只能求解临界荷载,不能判断结构平衡状态的稳定性。下面以图 1.4 所示两端铰接轴心受压理想直杆来说明静力法的计算原理。

当荷载达到临界荷载($F = F_{cr}$)时,压杆会突然弯曲,由原来的直线平衡状态转变到微弯的曲线平衡状态(图 1.4a)。此时杆件除弯曲外,还受压缩及剪切作用,由于压缩和剪切的影响很小,一般忽略不计,则任一截面(图 1.4b)内力矩与外力矩的平衡关系为

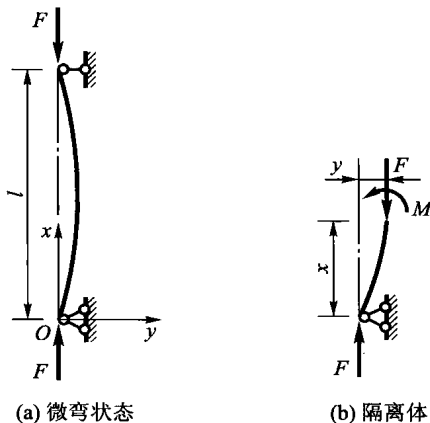


图 1.4 两端铰接的轴心压杆

$$M = Fy \quad (1.1)$$

在图 1.4b 的微弯曲状态下,压杆的近似平衡微分方程为

$$-EIy'' = M \quad (1.2)$$

即

$$EIy'' + Fy = 0 \quad (1.3)$$

式中, E 为材料弹性模量; I 为杆件截面惯性矩。设 $\alpha^2 = F/(EI)$, 式(1.3)为一常数系数齐次线性微分方程

$$y'' + \alpha^2 y = 0 \quad (1.4)$$

其通解为

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x \quad (1.5)$$

式中,任意常数 C_1 和 C_2 可由杆件的边界条件确定。两端铰接杆件的边界条件包括

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ 时, } y=0 \\ x=l \text{ 时, } y=0 \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

将边界条件式(1.6)代入式(1.5),得如下齐次方程组

$$\left. \begin{aligned} C_1 \times 0 + C_2 \times 1 &= 0 \\ C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

当 $C_1 = C_2 = 0$ 时,满足式(1.7),但由式(1.5)知,此时 $y = 0$,表示杆件处于直线平衡状态,不是所研究的微弯曲状态(图 1.4b)。对应杆件曲线平衡状态,要求 $y \neq 0$,即 C_1 、 C_2 有非零解,为此,要求方程组(1.7)的系数行列式必须等于零,即

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l \end{vmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

上式 $D(\alpha) = 0$ 称为稳定特征方程,解得

$$\sin \alpha l = 0 \quad (1.9)$$

则有

$$\alpha l = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.10)$$

即

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (1.11)$$

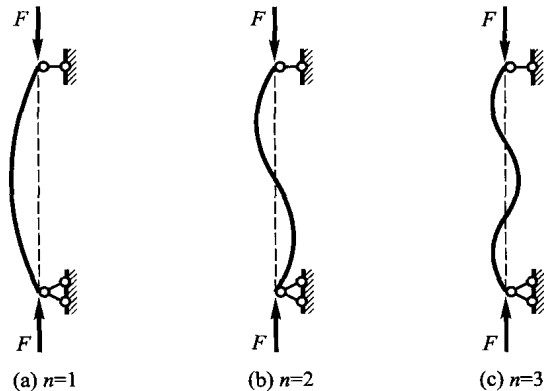


图 1.5 两端铰接轴心受压压杆挠度曲线

将式(1.11)代入 $\alpha^2 = F/(EI)$ 中,得 $\alpha = n\pi/l$,又从式(1.7)第二式知 $C_2 = 0$,于是由式(1.5)得到相应的挠曲曲线为

$$y = C_1 \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1.12)$$

式中 $n = 1, 2, 3, \dots$ 表示挠曲曲线的半波数目(图 1.5)。实际上,在式(1.11)中,当 $n = 1$ 时,相对应的临界荷载最小,此时杆件已经失稳,因此 $n = 2, 3, \dots$ 对应的

临界荷载不会再存在。可见,临界荷载是杆件保持中性平衡状态的最小荷载。于是,得到相应的临界荷载和挠曲曲线分别为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (1.13)$$

$$y = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1.14)$$

式(1.13)通常称为欧拉(Euler)临界荷载。

如果用杆件的横截面面积 A 去除式(1.13),就得到杆件的欧拉临界应力为

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2} = \frac{\pi^2 E}{(l/i)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (1.15)$$

式中 $I=Ai^2$, i 是截面的回转半径, $\lambda=l/i$ 为杆件的长细比。

采用静力求临界荷载时,首先假定杆件处于微弯曲中性平衡状态,然后取出隔离体列出平衡微分方程,求解此方程得到通解。再将边界条件代入通解,得出一组与未知常数数目相等的齐次方程组。齐次方程组有非零解,则令其系数行列式等于零,即 $D=0$,从而解出临界荷载 F_{cr} 。因临界荷载 F_{cr} 是由 $D=0$ 解出,所以 $D=0$ 是稳定的一个准则,通常称为稳定特征方程,或简称为稳定方程。不过,稳定方程一般是超越方程,求解是很麻烦的。

1.3.2 能量准则与能量法

图 1.1 为处于曲面上三种不同位置的刚性球,当球在凹面的底部处于稳定平衡状态时,如果有一侧向扰动力使球偏离底部,则球的重心位置抬高,其势能 will 增加。当除去侧向扰动力后,球在重力作用下又恢复到原来的平衡位置,因此稳定平衡的势能最小。当球在凸面顶点处于不稳定平衡状态时,如果有一侧向扰动力使球偏离顶点,则球的重心位置降低,其势能 will 减小。当除去侧向扰动力后,球将远离原来的平衡位置,因此不稳定平衡的势能最大。当球在平面上处于随遇平衡状态,如果有侧向扰动力使球偏离原来的平衡位置,则对于任何偏离,刚性球的势能并不发生变化。

上述能量特征同样适用于结构体系。结构体系的总势能 $E_p = E_s + (-W)$, E_s 是体系的内力势能(应变能), $-W$ 是外力势能(W 是外力功)。如果结构体系受微小扰动作用,在初始平衡位置的足够小邻域内发生某一可能变形,则体系的总势能 E_p 存在一个增量 ΔE_p 。当 $\Delta E_p > 0$,则总势能是增加的(E_p 为最小值),说明初始平衡位置是稳定的;当 $\Delta E_p < 0$,则总势能是减少的(E_p 为最大值),初始平衡位置不稳定;当 $\Delta E_p = 0$,则总势能 E_p 保持不变,说明初始平衡位置是中性平衡的。这就是判定体系平衡的稳定性能量准则。

当结构体系处于稳定平衡时,微小的扰动使总势能增加,也就是扰动后应变