高等学校教材

数学物理方程的近似解

刘志旺　何浩法　罗碧永　编著

林为干　审校

成都科技大学出版社

高 等 学 校 教 材

数学物理方程的近似解

刘志旺、何浩法、罗碧永　编著

林为干　审校

成都科技大学出版社

1992・11

(川)新登字015号

责任编辑：陈二林
封面设计：陆春熙

数学物理方程近似解

刘志旺　何浩法　罗碧永　编

成都科技大学出版社出版发行
电子科技大学出版社印刷厂印刷
开本 787×1092　1/16　印张 8.5
1992年11月第1版　1992年11月第1次印刷
印数 1-500　　字数 132千
ISBN7-5616-1505-1/O.99

定价：4.50元

内 容 提 要

本书包括三种近似解的理论和方法，内容为变分问题和有限元法及其在偏微分方程中的应用，积分方程及其矩量法，微分方程的摄动法。该书由浅入深，层次分明，论证清晰，方法新颖。每章配有相当数量的习题，并附答案。对读各掌握几种近似解的基本理论和基本方法打下良好的基础，并且也是一本有利于自学的好书。

本书可作为工科研究生和高年级学生的教材或参考书，并可供高等学校教师和工程技术人员阅读参考。

前　言

《数学物理方程近似解》是对实际应用工程与专业中的常微分方程、偏微分方程、积分方程近似解的基本理论和基本方法。内容是：偏微分方程有限方法，积分方程及其矩量法，微分方程的摄动法。本书是编者经过多年教学实践，并写讲义基础上经过修改补充而成。本书第一部份为有限元法及其在场方程中的应用。包括：泛函与变分，简要论述有关的数学基础理论，如函数空间，泛函分析，重点对变分法进行讨论；有限元法的基本原理和过程分析，掌握基本的计算方法和实施步骤；有限元法应用于场与波方程；

第二部份：积分方程及其矩量法。首先对积分方程的基本概念，积分方程与微分方程之间的联系以及有关理论给予必要的叙述；然后，讨论对有关场问题中常用的一种数值解法——矩量法求积分方程的近似解。

第三部份：微分方程的摄动法。这是一种渐近求解方法，我们主要对常微分方程和偏微分方程的应用问题用摄动方法求近似解。

本书可作为工科研究生和高年级本科生教材或教学参考书。阅读本书和学习此课程，应有高等数学、微分方程、线性代数等基础知识，并请参阅《数学物理方程和特殊函数》(刘志旺编著，电子科技大学出版社1988年出版)。

全书由林为干教授审核、并提出许多宝贵意见，在此表示感谢。

由于时间紧迫，加上编者水平有限，书中定有不少缺点和错误，对于不妥之处请批评指正。

编者

1990.4.23

目　　录

第一章　有限元法及其在偏微分方程中的应用

§1　泛函和变分

本章包含了为学习有限元法所需数学结构的最基本的材料，首先简要介绍泛函分析，然后主要讨论变分法。

§1.1　泛函分析概要

泛函是一广义函数。泛函分析也是广义函数的分析理论，它是研究无穷维线性空间上的泛函与算子的理论，无穷维线性空间是描述有无穷多自由度的物理系统的数学工具。因此，我们要对其中的一些基本概念和理论作简要的介绍。

I　**函数空间**

1. 线性空间(或向量空间)

线性空间是一个非空集合X。该空间的一个条件是：对于其中任意的两元素x和y，可用称为加法的过程组合起来，给出X中的一个元素$x+y$，其加法过程满足条件

(i)　$x+y=y+x$

(ii)　$x+(y+z)=(x+y)+z$，$Z\in X$

(iii)　存在一个零元素$\phi\in X$，使得对所有x，有

$$\phi+x=x+\phi=x$$

(iv)　对每个x，存在一个负元素$-x$，使得

$$x+(-x)=\phi$$

线性空间的另一个条件是，一元素$x\in X$可用数乘与任意实数或数量α($\alpha\in k$, k为一数域)组合起来给出一个元素αx，其数乘过程满足条件：

(v)　$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

(vi)　$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

(vii)　$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

(viii)　$1\cdot x=x$

线性空间的一个例子是n维向量的集合，或欧几里得($Euclid$)空间，记为R^n，其中，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 定义为

$$ai+bi=ci \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

$\alpha\vec{a}=\vec{d}$　定义为

$\alpha a_j = d_j \qquad (j=1、2、\cdots、n)$

2. 赋范线性空间($E.L.S$)

赋范线性空间是一个线性空间，在其上定义了范数$\|x\|$，使得

(1) $\|x\|>0$。

(2) $\|x\|=0 \Longleftrightarrow x=0$。

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$。

(4) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$。

满足上述(1)——(4)的性质，称为范数公理。

3. 内积空间($I.P.S$)

内积空间或数量积空间是一个线性空间，在其上定义了一个内积$(\cdot,\cdot)$：$X\times X\to K$，使得

① $(\alpha x+\beta y,\ z)=\alpha(x、z)+\beta(y、z)$、$Z\in X$

② $(x、y)=(y、x)$

③ $(x、x)\geqslant 0$，且等号只当$x=\phi$时成立。

具有①、②、③的性质称为内积公理

由上可见，范数与内积的关系为

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$$

并且，在有的书中，有长度、距离的类似定义，例如，在R^n空间中，设

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)$$
$$y=(y_1,\ y_2,\ \cdots y_n)$$

则其距离定义为

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

且可证明，它满足范数公理。

4. 希尔伯特(Hilbert)空间

定义1 若对于每个$\varepsilon>0$，存在某个$N=N(\varepsilon)$，使得对所有n，$m>N$，不等式

$$\|x_n-x_m\|<\varepsilon$$

成立，则称序列$\{x_n\}$是一个柯西($Cauchy$)序列。

定义2 若存在内积中的一点x，对每个$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)$，使得对一切$n\geqslant N$，成立$\|x_n-x\|<\varepsilon$则称序列$\{x_n\}$是一个收敛序列。

容易证明，收敛序列是柯西序列，但是，其逆不真。

定义3 如果内积空间X中，任何一个本来收敛的序列必收敛于X中的点，则称内积空间X是完备的。

定义4 使所有柯西序列是收敛序列的一个完备内积空间，称为希尔伯特空间，简写为H空间。

H空间是一切抽象空间中与欧氏空间R^n最相近似的空间。并且，R^n空间是H空间的特殊情形，可以证明，它满足内积公理。

此外：

定义在〔0,1〕上平方可积函数类(全体)的函数空间 L^2〔0,1〕，规定元素 f，g的内积，则 L^2〔0,1〕是H空间。

在一般的H空间中，若有一元素系

$$e_1,\ e_2\cdots,\ e_n,\ \cdots \tag{1—1}$$

满足内积关系式

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2\cdots) \tag{1—2}$$

则称元素系$\{e_i\}$为H空间的规范正交系，

当$n\to\infty$时，如果有

$$\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,\ e_i)e_i\|\to 0$$

则称系$\{e_i\}$是完全的规范正交系，并且称它是H空间的基。此时，我们便说是按H空间的范数收敛，记为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x,\ e_i)e_i=x$$

或

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i \tag{1—3}$$

由此断言：规范正交系是基的充要条件是

$$(x,e_i)=0\quad (i=1,2\cdots)\Longleftrightarrow x=0 \tag{1—4}$$

此结论说明，H空间中不可能存在非零元素x与系$\{e_i\}$中任何元素正交。因此，系$\{e_i\}$是完备的规范正交系。并且可以得到

定理　在可分的H空间(即存在一个数稠集$\{g_k\}$，$\overline{\{g_k\}}=K$)中存在一族完备的规范正交基$\{e_i\}$，使H中的任意元素x，可用它们来展开，即

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$$

或

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}c_ie_i \tag{1—5}$$

其中

$$c_i=(x,e_i) \tag{1—6}$$

称为x关于基$\{e_i\}$的付里叶(Fourier)系数

性质(1.4)和式(1.5)在正交多项式(特殊函数)系的展开理论中有重要的应用，如付里叶级数和广义付里叶级数展开中的应用。

Ⅱ　函数的内积和微分算子

1.函数的内积

现在把内积概念应用到函数上

定义　对于在区间〔a,b〕上有定义的函数$x(t)$,$y(t)$,则

$$(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt \tag{1-7}$$

称为函数$x(t)$与$y(t)$的内积。

设多元函数$\varphi(M)$，$\psi(M)$定义在n维空间区域Ω上，则

$$(\varphi,\psi)=\int_{\Omega}\phi(M)\psi(M)\,d\Omega$$

称为$\varphi(M)$与$\psi(M)$的内积，其中M是Ω内的点。

例如，定义在区间〔0,1〕上平方可积函数类L^2，对于$x(t)$，$y(t)\in L^2[0,1]$，则$x(t)$与$y(t)$的内积为

$$(x,y)=\int_0^1 x(t)y(t)\,dt \tag{1—8}$$

2.微分算子L及其性质

假设微分算子L定义为

$$L=-\Delta=-\nabla^2$$

在三维空间中，则为

$$L=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)=-\Delta$$

而泊松(*poisson*)方程是

$$\Delta u=-4\pi\sigma \tag{1—9}$$

定理　假设满足方程(1-9)的函数u,v：

(1)　在H空间中的某闭区域$\bar{\Omega}(=\Omega+\Gamma)$上具有二阶连续偏导数。

(2)　在其边界Γ上等于零。

则算子L具有如下性质：

1^0　对称性，即算子L满足关系式

$$(Lu,\ v)=(u,\ Lv)$$

2^0　正定性，即对所有　$u\neq 0$，算子L满足

$$(Lu,\ u)>0$$

证明　1°

由格林(*Green*)公式，有

$$(-\Delta u,\ v)=-\int_{\Omega}\Delta u\cdot v\,d\Omega$$

$$=-\left[\int_{\Gamma}v\frac{\partial u}{\partial n}ds-\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\,d\Omega\right]$$

$$=\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\,d\Omega$$

及

$$(-\Delta v,\ u)=-\int_{\Omega}\nabla vu\,d\Omega=\int_{\Omega}\nabla v\cdot\nabla u\,d\Omega$$

$\therefore\ (Lu,\ v)=(u,\ L\Omega)$

$$2^\circ \quad \because (-\Delta u,\ u) = -\int_\Omega \Delta u \cdot u d\Omega = -\int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial n}ds + \int_\Omega (\nabla u)^2 d\Omega$$

则

$$-\Delta(u,\ u) = \int_\Omega (\nabla u)^2 d\Omega \geqslant 0$$

然而，只当$\nabla u=0$时，等式才成立，由边界条件，即当$u=0$时，才有$(-\Delta u,\ u)=0$。所以，算子L为正定算子。

注1　算子L的对称性，在有的书中又称为算子的自伴性。

注2　有的书中，算子L的正定性定义为

$$L(u,\ u) \geqslant K\|u\|^2,\ (K>0)$$

§1.2　泛函与广义函数

Ⅰ.泛函的概念

在变分法中，我们将研究这样的关系，其中，因变量的值是由对应函数所确定的。

例如，研究连结已给两点A，B的任意曲线的长度时，因变量的值——曲线弧的长度——是由连结A，B两点的曲线的形状来确定的，即由表示曲线的函数所确定的。

设连结A，B两点的曲线方程为$y=y(x)$，而函数$y(x)$在区间$[a,\ b]$上有连续导数$y'(x)$，则曲线的弧长表达式为

$$S=\int_b^a \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \tag{1—10}$$

可见，数S随曲线所确定的函数$y=y(x)$的不同而不同，即在函数空间中，当给定一个函数$y(x)$时，积分就有一个对应的值$S[y(x)]$，因此有

定义　设对于已给的某函数类中的每一个函数y，按照一定规律有某个确定的值$J[y(x)]\epsilon R$与之对应，则J称为由函数空间中的这类函数确定的泛函。

因此，上例记为

$$J[y(x)]=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)dx}$$

一般地，对于一维函数空间，泛函表示为

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x,y,y')dx \tag{1-11}$$

对于n维空间，有

$$J[u(X)] = \int_\Omega F(X,\ u,\ u_X)dx$$

其中，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\int_\Omega \cdots dX$表示n重积分，u_X表示u对x_1，x_2，$\cdots$，x_n的一阶偏导。

在二维空间中，则

$$J[u(x,y)] = \iint_D F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy \tag{1-12}$$

其具体例子是曲面面积

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x{}'^2(x,y)+z_y{}'^2(x,y)}\,d\sigma$$

此处，假设空间曲面的方程为 $z=z(x,\ y)$，且此函数在区域D上有一阶连续偏导数$z_x{}'(x,y)$，$z_y{}'(x,y)$。

使泛函有定义的函数类全体，称为泛函的定义域。

式(1－11)和式(1－12)的定义域为有连续导数的函数类。

我们研究的泛函是线性的泛函

定义　满足下列条件的泛函称为线性泛函：

(1)　$J[Cu]=CJ[u]$，C是任意常数

(2)$J[u_1+u_2]=J[u_1]+J[u_2]$

另外，在力场、电场中也有泛函的实例，它们表示能量关系式，这里不再细述。

Ⅱ　广义函数

设$f(x)$是一个可积函数，对于函数空间$\mathscr{D}(\Omega)$(具有无穷阶连续导数)中的函数$\varphi(x)$，若内积

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=(f,\varphi)$$

给出一个实数值，那么由函数$f(x)$可以唯一地确定出该函数空间上的一个线性泛函：

$$J_f[\varphi]=(f,\ \varphi) \tag{1-13}$$

可以证明，函数空间上的线性连续泛函$J_f[\varphi]$与函数$f(x)$是一一对应的。事实上，因为两个不同的函数$f_1(x)$和$f_2(x)$不会与同一个泛函对应，如果对于函数空间中的任一个函数$\varphi(x)$，有

$$(f_1,\ \varphi)=(f_2,\ \varphi)$$

即

$$J_{f1}(\varphi)=J_{f2}(\varphi)$$

则必有

$$f_1(x)=f_2(x)$$

我们把J_f：$f\rightarrow\langle f,\ \varphi\rangle$ 这个对应关系作为函数$f(x)$的新定义。称它为广义函数。

由上述讨论可知，广义函数可以包含普通函数，即普通函数可用上述方式来定义，例如，L^2空间上的线性泛函数和L^2空间中的元素一一对应，这种由$J_f(\varphi)$确定的广义函数 $f(x)$就是通常的平方可积函数。然而，如果对函数空间的条件要求很强，比如将函数空间取为K空间(K中的每一个函数$\varphi(x)$是无限次可微的，并且只在一有限区间上不等于零)，那么与泛函$J_f(\varphi)$一一对应的广义函数$f(x)$中不仅包括普通函数，还包括非普通函数，例如，找不到一个普通函数$f(x)$能使下式成立

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0) \tag{1-14}$$

但是，这个广义函数$f(x)$是唯一确定的，这就是δ函数

§1.3　变分法

Ⅰ．泛函的变分

类似于微分学中函数的增量与微分，有泛函的增量与变分的概念。

如果泛函的增量

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)] \tag{1-15}$$

可以表示为下面的形式

$$\Delta J = A[y(x),\ \delta y] + \beta[y(x),\ \delta y]\max|\delta y|$$

其中，$\delta y = y(x+\delta x) - y(x)$是当$\delta x = \Delta x = dx$很小时，函数$y(x)$的增量，称为变分；$A[y(x),\ \delta y]$对$\delta y$而言，是线性泛函。而当$\max|\delta y| \to 0$时，$\beta[y(x),\ \delta y] \to 0$，且有定义：泛函$J[y(x)]$的增量$\Delta J$的线性主部$A[y(x),\ \delta y]$叫做泛函$J[y(x)]$的变分，记为$\delta J$，即

$$\delta J = A[y(x),\ \delta y]$$

Ⅱ． 泛函的极值

类似于函数的极值概念，有泛函的极值，即

定义　设$y_0(x)$是函数空间的某一个函数，若对于此空间中的所有函数都满足关系式

$$J[y(x)] \geqslant J[(y_0(x)] \qquad (\text{或} J[y(x)] \leqslant J[y_0(x)])$$

则称泛函$J[y(x)]$对$y_0(x)$取得极小值或(极大值)。

求泛函的极值问题，称为变分问题，研究求泛函极值的方法，称为变分法。

关于求泛函的变分，拉格朗日(*Lagrange*)引入一个新函数(称为相容函数)

$$y^*(x) = y(x) + \alpha\delta y$$

并首先给出如下基本定理

引理　如果泛函的变分$\delta J[y(x)]$存在，则泛函$J[y(x) + \alpha\delta y]$对参数α的导数在$\alpha = 0$的值必存在，且二者相等，即

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} J[y(x) + \alpha\delta y]|_{\alpha=0} = \delta J \tag{1-16}$$

证明　因为

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[y(x) + \alpha\delta y] - J[y(x)]\\ &= A[y(x),\ \alpha\delta y] + \beta[y(x),\ \alpha\delta y]\max|\alpha||\delta y|\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha} J[y(x) + \alpha\delta y]|_{\alpha=0} &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\left.\frac{\Delta J}{\Delta\alpha}\right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta J}{\alpha}\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{A[y(x),\ \alpha\delta y] + \beta[y(x),\ \alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{A[y(x),\alpha\delta y]}{\alpha} + \lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\ \alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha A[y(x),\ \delta y]}{\alpha} + 0 = A[y(x),\delta y]\end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial}{\partial\alpha} J[y(x) + \alpha\delta y]|_{\alpha=0} = \delta J$

Ⅲ．几个著名的变分问题

为了具体理解变分问题，我们来看看在变分法的发展中有很大影响的三个著名的变分问题。

1．最速降落线问题

设A、B两点不在同一铅垂直线上，用某一曲线连接A、B；有一质点沿这条曲线从A到B受重力作用自由下滑，如果略去质点与曲线之间的摩擦力，问：下滑时间最短的曲线是什

么曲线?

为了建立最速降线的数学表达式，我们选取点 A 与坐标原点重合，B点的坐标为(a，b)，设质点从 A 点沿曲线 $y=f(x)$下滑到点$M(x, y)$时，其速度为 v；若质点的质量为m，重力加速度为 g，则质点从A 到M，失去势能为 mgy，而获得的动能为 $\frac{1}{2}mv^2$，由能量守恒定律，有

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy$$

或

$$v=\sqrt{2gh}$$

若从A 算起的弧长为s，则

$$\frac{ds}{dt}=v=\sqrt{2gy}$$

而

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{ax}\right)^2}dx$$

于是

$$dt=\frac{ds}{v}=\sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}}dx$$

从 A到B 的积分，设所需的总时间为 T，得

$$T=\int_0^T dt=\int_0^a\sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}}\,dx \tag{1-17}$$

显然，时间T是函数(曲线的分析式)$y(x)$的泛函。这样，最速降落线问题与下述泛函$T[y(x)]$的极小值问题是等价的：求一条光滑曲线$y=y(x)$（$0\leqslant x\leqslant a$）在满足边界条件 $y(0)=0$，$y(a)=b$下使式(1-17)中的泛函取得极小值。

2.测地线问题

设 $\varphi(x, y, z)=0$ 为一已知曲面，求在此曲面上连结两点 A 和 B 间长度最短的曲线。

这条最短曲线称为测地线，或短程线，比如，球面上两点间的短程线就是通过这两点的大圆上的一段(弱)弧。设曲线AB的方程为

$$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases} \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_1)$$

则由多元微积分知道，点$A(x_0, y_0, z_0)$与$B(x_1, y_1, z_1)$间的曲线的长度为

$$s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \tag{1-18}$$

显然，s 是$y(x)$，$z(x)$的泛函，这样，测地线问题与下面的泛函$[y(x), z(x)]$的极小值问题是等价的：

求空间曲线

$$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases} \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_1)$$

在满足边界条件

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$$
$$z(x_0)=z_0,\ z(x_1)=z_1$$

及约束条件 $$\varphi(x,\ y,\ z)=0$$
下使式(1-18)中的泛函 s 取得极小值。

3.等周问题

求长度为L(定数)的平面封闭光滑曲线C，使其所围成的区域的面积S为最大。

设曲线C的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$$

因为这条曲线是封闭的，所以

$$x(t_0)=x(t_1)$$
$$y(t_0)=y(t_1)$$

则由弧长公式，得

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \tag{1-19}$$

根据格林公式，曲线C所围成的面积s为

$$S=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})dt \tag{1-20}$$

其中： $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$， $\dot{y}=\dfrac{dy}{dt}$。

显然，S是$x(t)$和$y(t)$的泛函。这样，等周问题与下面的泛函$S[x(t),\ y(t)]$的极大值问题是等价的：

在满足边界条件

$$x(t_0)=x(t_1)$$
$$y(t_0)=y(t_1)$$

和等周条件

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

下，从一切函数$x=x(t)$，$y=y(t)$中选出一对函数，使泛函 S 取得最大值。

在最速降落线问题中，被积函数是 y 和y'的函数，这种问题是变分法中最简单的问题，现在我们讨论这最简单变分问题的一般形式。

设曲线的函数 $y=y(x)$属于 C^1(一阶连续导函数类)，在通过两定点 $A(x_0,\ y_0)$，$B(x_1,\ y_1)$的所有曲线中，要求这样一条曲线，使其沿着它对泛函

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y')dx \tag{1-21}$$

取得极小值或极大值。

Ⅳ. 泛函取极值的必要条件

1.基本定理

类似于数学分析中函数 $y=y(x)$在点$x=x_0$有极值的必要条件为$dy=0$，有泛函取极值的

必要条件：

定理 如果具有变分的泛函 $J[y(x)]$ 在曲线 $y=y_0(x)$ 上达到极值，则在 $y=y_0(x)$，必有

$$\delta J=0$$

证 当 $y_0(x)$ 与 δy 固定时，$J[y_0(x)+\alpha\delta y]=\phi(\alpha)$ 是 α 的函数。由已知条件，当 $\alpha=0$ 时，这个函数达到极值，因而，$\phi(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 处的导数必为零，即 $\phi'(0)=0$，因此

$$\frac{d}{d\alpha}J[y_0(x)+\alpha\delta y]|_{\alpha=0}=0$$

所以，由前述引理，得

$$\delta J=0$$

2.欧拉(Euler)方程

对于一维泛函

$$J[y]=\int_b^a F(x,\ y,\ y')dx \tag{1-21}$$

其中，F 对于三个变量 x，y，y' 都有二阶连续导数，而 $y(x)$ 是属于一阶连续的函数空间 C^1。

关于判断泛函(1-21)的极值问题，有下面的定理

定理 若函数 $y=y(x)$ 给出泛函(1-21)取极值，则含 y，y' 的函数 F 满足关系式

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \tag{1-22}$$

证 如同引理一样，引入相容函数

$$y^*(x)=y(x)+\alpha\delta y$$

可见，当 $\alpha=0$ 时，$y^*(x)=y(x)$ (1-23)

将式(1-23)代入式(1-21)，得

$$J[y^*]=J[y+\alpha\delta y]=\int_a^b F(x,\ y+\alpha\delta y,(y+\alpha\delta y)')dx$$

由于泛函(1-21)是在函数曲线 $y=y(x)$ 上取极值。则 $J[y+\alpha\delta y]$ 应在 $\alpha=0$ 时取极值。因此，必有

$$\frac{d}{d\alpha}J[y+\alpha\delta y]|_{\alpha=0}=0$$

然而，根据引理，得到

$$\frac{d}{d\alpha}J[y+\alpha\delta y]|_{\alpha=0}=\delta J[y(x)]=0$$

$$\frac{d}{d\alpha}J[y+\alpha\delta y]|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b F(x,\ y^*,\ y^{*\prime})dx|_{\alpha=0}$$

$$=\int_a^b [F_{y^*}\frac{d}{d\alpha}y^*+F_{y^{*\prime}}\frac{d}{d\alpha}y^{*\prime}]dx|_{\alpha=0}$$

$$=\int_a^b [F_y\delta y+F_{y'}\delta y']dx$$