中等职业学校文化课教学用书

数学教学参考书

（基础版）

第三册

主编　丘维声

高等教育出版社

中等职业学校文化课教学用书

数学教学参考书

（基础版）

第三册

主编　丘维声

高等教育出版社

内容提要

本书是为中等职业教育国家规划教材《数学(基础版)第三册》编写的教学参考书。内容包括每章的教学要求;每章中每节的教材分析、教学建议和练习的答案。

本书可供中等职业学校和普通高中的数学教师作为教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学教学参考书.第三册:基础版/丘维声主编.—北京:高等教育出版社,2004.2

ISBN 7-04-013143-9

Ⅰ.数… Ⅱ.丘… Ⅲ.数学课-专业学校-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第103656号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http: //www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京市联华印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2004年2月第1版
印　　张	5.375	印　　次	2004年2月第1次印刷
字　　数	130 000	定　　价	7.30元

前　　言

《数学(基础版)第三册》讲了在近代和现代社会中非常有用的两部分内容:微积分和概率统计.

17世纪中叶,牛顿和莱布尼茨同时独立地发明了微积分.微积分为研究自然界中变化的现象提供了强有力的工具.微积分的基石是导数,即函数在一点处的变化率.微分是函数改变量 Δy 的线性主要部分 dy,它等于 $f'(x)\Delta x$.微分的朴素思想是在局部上把曲线段用相应的切线段代替,通俗地说成“以直代曲”.积分的朴素思想是通过分割,在局部上以直代曲,然后把它们累积起来(即求和,取极限),在整体上由“直”回到“曲”.微积分是矛盾的统一体,微积分基本定理揭示了微分和积分的内在联系:在$[a,b]$上连续的函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的定积分$\int_a^b f(x)dx$ 等于$f(x)$的原函数 $F(x)$ 在$[a,b]$的右端点与左端点上的函数值之差,而求原函数恰好是求导数的逆运算.微分不仅能解决函数值的近似计算问题,而且在定积分的应用中起了基础的作用(在局部上把函数图像的曲线段用相应的切线段代替).导数在研究函数的单调性和极值等问题中起着重要作用.定积分可以用于解决许多几何问题和力学问题.在学习微积分时,不要只是埋头于计算导数和积分,还应当理解微分和积分的思想,了解它们的应用,体会微积分的威力之所在.极限在理解

导数(即函数在一点处的变化率)的概念,求基本初等函数和初等函数的导数,定积分的概念中起着重要作用.在学习极限时,不要只是去求各种极限,更应当知道为什么要学习极限.正因为这样,我们在《数学(基础版)第三册》的一开始先讲函数的变化率的概念,由此引出极限的概念,从而激发学生学习极限的动力.这种安排与传统教材中先复习函数概念,讲复合函数,初等函数;然后讲数列的极限,函数的极限;最后才讲导数的体系不同.

生活在现代社会中的公民能不能从大量的数据中,经过科学的分析,捕捉出确切信息,以便作出正确的判断和决策?凭直观分析固然可以捕捉一些信息,但是它的可靠程度如何?会不会作出错误的判断?譬如,通过民意调查了解人们对某件事情的看法,需要随机选取多少人,计算出的百分比的抽样误差才会小于或等于3%?随机找几十个人调查,计算出的百分比可信度如何?又如,用两种药治疗一种病,让一些患者做实验,得到一批数据,从这些眼花瞭乱的数据中怎样看出哪种药疗效较好?没有科学的方法能直观看出来吗?这些问题在《数学(基础版)第三册》的第15章中都进行了讨论,给出了科学的方法.在这一章的例题和练习题中,你会发现仅凭直观看一看是不够的,应当有理论的指导,经过一定的计算,才能作出正确的判断和决策.这些理论就是概率论和数理统计.在现代社会中,离不开概率统计.学习概率统计,可以使人变得耳聪目明.

本书对于《数学(基础版)第三册》的教学要求,教学内容,教学中应注意的问题作了阐述,并且给出了每一节

的练习 A 组题和 B 组题的详细解答.

《数学教学参考书(基础版) 第三册》由丘维声任主编,全书由丘维声编写.

作者感谢高等教育出版社的邵勇高级策划,他为本书的编辑出版付出了辛勤劳动.

欢迎广大读者提出宝贵意见.

丘维声

于北京大学数学科学学院

2003 年 11 月

目　　录

第 13 章　极限与导数

Ⅰ　教 学 要 求

1. 了解函数的极限的概念.

2. 掌握求极限与函数的四则运算的关系.

3. 了解求极限与函数的不等式的关系.

4. 理解数列的极限的概念,理解求极限与数列的四则运算的关系.

5. 了解有极限与有界的关系.

6. 理解复合函数的概念,会求复合函数的极限.

7. 理解连续函数的概念,理解初等函数都是连续函数;会利用函数的连续性求极限;了解连续函数的中间值定理,最大值和最小值定理.

8. 了解无穷小量与无穷大量的概念.

9. 理解导数的定义及其几何意义.

10. 掌握求导数与函数的四则运算的关系.

11. 掌握基本初等函数求导公式.

12. 掌握复合函数求导法则.

13. 了解反函数的求导法则.

14. 了解微分的概念,微分的几何意义及微分在近似计算中的应用.

15. 了解二阶导数的定义和求法,了解二阶导数的力学意义.

16. 掌握函数单调性的判定方法.

17. 理解函数的极值及其求法.

Ⅱ 教材分析、教学建议和练习的答案

微积分的传统讲法是:先讲数列的极限;然后复习函数的概念,并且介绍复合函数的概念,以及基本初等函数和初等函数的概念;在这基础上讲函数的极限,函数的连续性,函数的导数,微分;最后讲不定积分,定积分.这种讲法看上去系统性强,实际上这种讲法没有抓住微积分的精髓,学生按这种讲法学习微积分,不知道学习极限是为了什么,不知道导数起着什么样的重要作用,不知道为什么要讲微分,对于积分与微分的深刻联系不甚明了,其结果是只会做题(求极限,求导数,求不定积分和定积分等),而有的题也不会做.

我们对微积分的传统讲法作了力度较大的改革,主要有以下几个方面:

1. 抓住了微积分的精髓——导数(即,函数在一点处的变化率),以导数为主线阐述微积分的内容.

微积分的朴素思想是局部上以"直"代"曲"(即微分),然后通过无限逼近,在整体上由"直"回到"曲"(即积分).微分是函数 $y=f(x)$的改变量 Δy 的线性主要部分 $\mathrm{d}y$,它等于 $f'(x)\Delta x$.积分的计算归结为求被积函数的原函数(求导函数的逆运算).因此无论微分还是积分,都离不开导数.导数是微积分的精髓,而导数就是函数在一点处的变化率.从几何上看,函数 $y=f(x)$在 x_0 处的变化率是:在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$或$[x_0+\Delta x,x_0]$的平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$当 $\Delta x\to 0$ 时的极限,即图 13-1 中,函数 $y=f(x)$的图像上的点 M 趋向点 P 时,割线 PM 的斜率的极限,也就是 $f(x)$的图像在点 P 处的切线 PN 的斜率.从物理上看,质点运动的路程函数 $s=s(t)$在 t_0 处的变化率,就是质点在时刻 t_0 的瞬时速度.如果知道了质点在每个时刻的瞬时速度,就可以求出质点运动的路程.

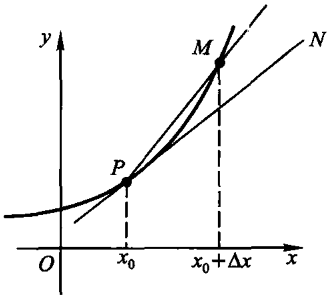

图 13－1

而在几何上,如果知道了函数 $f(x)$的图像在某个区间内每一个点处的切线的斜率,就可以研究函数 $f(x)$在此区间的单调性,以及极值等.函数在一点处的变化率这个概念之所以如此重要,是因为只有通过运动、变化才能揭示函数的内在性质,并且只有考察函数值的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 的比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$当 Δx 趋向 0 时的极限,才能精确地揭示函数在一点处的变化情况.因此,我们以研究函数在一点处的变化率为主线,阐述微积分的内容.在本书的第 1 节就讲函数在一点处的变化率,开门见山把微积分的精髓展示在广大读者面前.研究函数在一点处的变化率,就离要研究当 Δx 无限接近于 0 时,比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$是否无限接近于一个常数? 由此激发出需要函数的极限的概念.从而我们在本书的第一单元详细阐述函数的极限的内容.我们这样安排讲授体系,使学生知道为什么要学习极限,目的明确,调动了学习极限的积极性.

2. 科学地安排极限这部分内容的讲授体系,具有观点高、条理清晰、推导简捷等特点.

我们运用现代数学的观点,阐述求函数的极限与函数的四则运算之间的联系:求函数的极限是保持四则运算的,也就是求函数的极限与函数的加、减、乘、除运算可以交换次序[即,如果函数 $f(x)$与 $g(x)$在 a 的附近有定义,且在 a 处有极限,那么 $f(x)$与

$g(x)$的和、差、积、商的极限分别等于它们的极限的和、差、积、商(其中$\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$)];阐述求函数的极限与函数的序关系(即函数的不等式)之间的联系:求函数的极限是保序的[即,设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$在 a 附近有定义,且满足 $f(x)\leqslant g(x)$,如果它们在 a 处有极限,则$\lim\limits_{x\to a}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to a}g(x)$].传统的讲法,说"极限的四则运算",这是不准确的.传统的讲法没有明确挑明求函数的极限与函数的不等式之间的联系,虽然有相应的定理.

我们把数列$\{a_n\}$看成是定义域为正整数集的函数,从而数列的极限与函数当 x 趋于正无穷大时的极限是类似的.于是求函数的极限与函数的四则运算、函数的序关系之间的联系对于数列的极限也成立.这样我们的推导简洁多了.而传统的教材对数列的极限讲一遍推导,对函数的极限又要再讲一遍推导.

我们专门用一节讲了有极限与有界的关系.首先指出,有极限的数列一定有界;但是反之不然.其次指出,单调上升(下降)有上界(下界)的数列必有极限.作为这一结论的应用,求出了$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ $(a>1)$;证明了极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$存在.

我们专门用一节讲复合函数的概念和复合函数的极限.我们用映射的观点讲复合函数的概念,使复合函数的概念易于理解,从而使求复合函数的极限法则易于掌握.

我们在"函数的极限"这一节,利用函数的极限的定义,证明了:

$\lim\limits_{x\to a}x^n=a^n$ (n 为正整数); $\lim\limits_{x\to a}c=c$;

$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

我们在"求极限与函数的四则运算的关系"这一节,利用求函数的极限与函数的加、减、乘、除运算可以交换次序,证明了:

对于多项式函数 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0);$$

对于分式函数$\frac{f(x)}{g(x)}$,如果 $g(x_0)\neq 0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)};$$

对于正切函数 $\tan x$,如果 $\alpha\notin\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$,则

$$\lim_{x\to\alpha}\tan x=\tan\alpha.$$

我们在“求极限与函数的不等式的关系”这一节,利用夹逼定理,求出了一个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

我们在“有极限与有界的关系”这一节,利用“单调上升有上界的数列必有极限”这个结论,证明了极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在.我们在本套教材第一册的第 4 章 4.6 节里,曾把这个极限记作 e,它是一个无限不循环的小数,它的近似值是 e≈2.718 281 828.于是有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

在这一节,我们还利用指数函数 $y=a^x$ 的图像和对数函数 $y=\log_a x$的图像,分别证明了:

$$\lim_{x\to b}a^x=a^b,\qquad \lim_{x\to b}\log_a x=\log_a b\quad (b>0).$$

我们利用指数函数的性质,证明了幂函数 $y=x^\alpha(\alpha>0)$在$(0,+\infty)$上是增函数,幂函数 $y=x^\alpha(\alpha<0)$在$(0,+\infty)$上是减函数.从而正确地画出了幂函数 $y=x^\alpha$ 的图像.进而可以证明

$$\lim_{x\to b}x^\alpha=b^\alpha\qquad (b>0).$$

我们利用幂函数和指数函数的单调性,证明了另一个重要极限:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

上面我们求出了常数函数、三角函数、指数函数、对数函数、幂函数的极限,从而水到渠成地得出了这些函数都是连续函数.在

“函数的连续性”这一节，我们利用求函数的极限与函数的加、减、乘、除运算可以交换次序，证明了在同一区间上连续的函数，其和、差、积、商(除式的函数值不为 0)仍然在该区间上连续. 我们从复合函数的求极限法则得出，连续函数的复合函数在它的定义域内是连续的. 我们利用函数 $y=f(x)$的图像与它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称，说明了连续函数的反函数也是连续函数，从而得出，反三角函数是连续函数. 于是我们证明了基本的初等函数(包括常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数)都是连续函数；一切初等函数(由基本初等函数经有限次加、减、乘、除、复合运算所得的函数)也都是连续函数. 这一结论使得求初等函数的极限归结为求函数值，这使求极限变得容易多了.

在“函数的连续性”这一节，我们还介绍了闭区间上连续函数的中间值定理，最大值和最小值定理.

在本单元的最后一节，我们介绍了无穷小量和无穷大量，以及同阶无穷小量，等价无穷小量，高阶无穷小量的概念. 我们还证明了有界变量与无穷小量的乘积也是无穷小量. 利用这些概念和结论可以简捷地求出一些函数的极限.

3. 科学地安排导数的讲授体系，具有层次分明、简洁明了的特点.

我们把导数这一单元分成四节：导数及其几何意义，求导数与函数的四则运算的关系，复合函数的导数，反函数的导数.

由于我们在本册一开头就讲了函数在一点处的变化率，因此我们很自然地引出了导数的概念. 这使学生对于函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数就是函数 $y=f(x)$在 x_0 处的变化率有深刻的印象.

利用导数的定义以及 13.8 节和 13.9 节的有关例题和公式，我们求出了：

$$c'=0; \qquad (x^n)'=nx^{n-1} \quad (n\in\mathbf{N}^*);$$

$$(\sin x)'=\cos x, \quad (\cos x)'=-\sin x;$$

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x; \quad (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

在“求导数与函数的四则运算的关系”这一节，我们证明了：求导数是保持函数的加法、减法、数量乘法运算的（即求导数与函数的加法、减法、数量乘法可以交换次序），但是求导数不保持函数的乘法和除法．而是有

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \qquad (v(x)\neq 0).$$

利用求导数与函数的除法之间的关系，我们求出了

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

在“复合函数的导数”这一节，我们得出了复合函数的求导法则，并且运用这一法则求出了：

$$(a^x)'=a^x\ln a;$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e};$$

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1} \quad (x>0);$$

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}.$$

在“反函数的导数”这一节，我们利用反函数的定义（参看本套教材第一册的第 3 章 3.7 节），以及连续函数的反函数也是连续函数的结论，推导出

$$f^{-1\prime}(b)=\frac{1}{f'(a)},$$

其中 $b=f(a)$，且 $f'(a)\neq 0$．利用这一公式，我们求出了：

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,1);$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,1);$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

至此,我们把基本初等函数的导数全部求出来了.

4. 我们把微分,二阶导数,函数的单调性和函数的极值合在一个单元,因为它们本质上都可看成是导数的应用.

微分的朴素思想是在局部范围内"以直代曲",即当 Δx 很小时,把函数值的改变量 Δy 用它的线性主要部分 $A\Delta x$ 近似代替,称 $A\Delta x$ 是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的微分,记作 $\mathrm{d}y$. 可以证明 $A=f'(x_0)$,于是

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x.$$

运用微分的概念和这个公式,可以进行函数值的近似计算等.

二阶导数有物理意义:质点运动的路程函数 $s=s(t)$ 的二阶导数是瞬时加速度. 由此也可看出,导数的应用很广泛.

导数在研究函数的单调性和函数的极值问题中起着重要作用. 费马定理给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 处有极值的必要条件,即如果 $f(x)$ 在 x_0 处有极值,且 $f'(x_0)$ 存在,则 $f'(x_0)=0$. 反之不然. 分别计算极值为 0 的点和区间端点上的函数值,经过比较就可求出函数在该区间的最大值和最小值. 拉格朗日定理(微分中值定理)的应用给出了函数单调性的判定准则,即设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函数;如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是减函数. 运用这一判定准则,可以推导出函数的极值点的第一充分条件. 进而利用二阶导数的概念,可以推导出函数的极值点的第二充分条件.

5. 我们按照"观察——抽象——探索——猜测——论证"这一数学的思维方式编写每一节的内容,使学生比较容易学习微积分的基础知识和基本方法,同时又受到数学思维方式的熏陶.

例如,我们在"反函数的导数"这一节,先观察:$y=3x$ 的导数是

$(3x)'=3$,而它的反函数 $y=\frac{1}{3}x$ 的导数是 $\left(\frac{1}{3}x\right)'=\frac{1}{3}$. 在这个例子中,反函数的导数 $\frac{1}{3}$ 是原来函数的导数 3 的倒数. 这在一般情形下对吗? 然后我们进行分析,证明了这在一般情形下也是对的.

本章的重点是:求极限与函数的四则运算的关系,单调上升(下降)有上界(下界)的数列必有极限,复合函数的极限,基本初等函数(常数函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数)的极限,多项式函数和分式函数的极限,两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e};$$

基本初等函数和初等函数都是连续函数,利用函数的连续性求极限,连续函数的中间值定理以及最大值和最小值定理;导数的定义及其几何意义,求导数与函数的四则运算的关系,基本初等函数求导公式,复合函数求导法则;微分在近似计算中的应用;函数单调性的判定方法,函数的极值的求法.

本章的难点是:函数的极限的概念,求复合函数的极限,无穷小量的概念;求导数与函数的乘法、除法的关系,求复合函数的导数,求反函数的导数;微分的概念;函数的极值的求法.

本章的绝大多数定理的证明是用楷体字排印的,不作为教学要求,不用在课堂上讲,供有兴趣的读者自己看.

学好本章的关键是:按照"观察——抽象——探索——猜测——论证"这一数学的思维方式来学习,在理解的基础上记住法则、公式和定理,把例题弄懂,把教材中的练习 A 组题都认真做好,有余力的学生还可以做一些 B 组题.

本章教学时间约需 37 课时,具体分配如下(供参考):

13.1	函数的变化率	1 课时
13.2	函数的极限	2 课时
13.3	求极限与函数的四则运算的关系	3 课时
13.4	求极限与函数的不等式的关系	2 课时