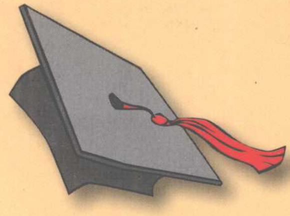
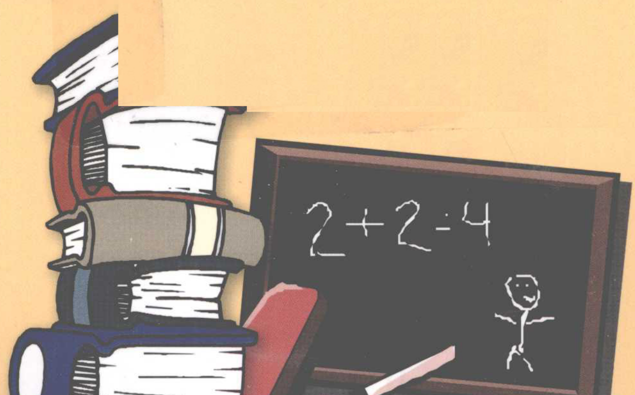


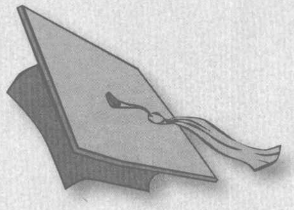
小学数与代数基础理论

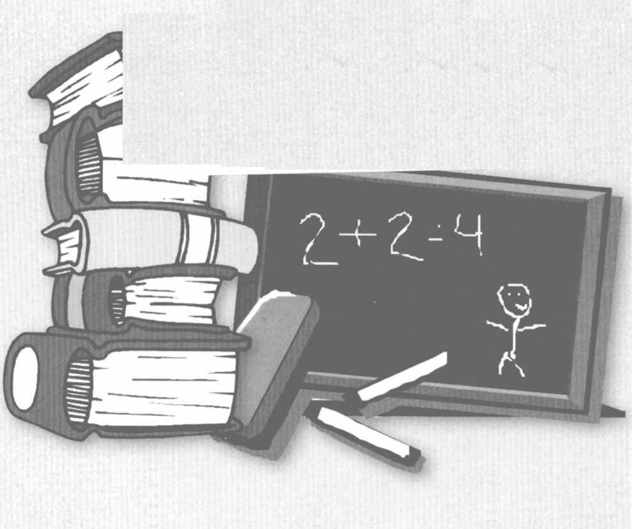
蒋志萍　汪文贤　编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

小学数与代数基础理论





ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

小学数与代数基础理论/蒋志萍，汪文贤编著. —杭州：浙江大学出版社，2010.7

ISBN 978-7-308-07760-6

Ⅰ.①小… Ⅱ.①蒋…②汪… Ⅲ.①数学课—教学研究—师范大学—教材②数学课—教学研究—小学 Ⅳ.①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 123433 号

小学数与代数基础理论

蒋志萍　汪文贤　编著

责任编辑　吴伟伟
文字编辑　李峰伟
封面设计　陆晓华
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　710mm×1000mm　1/16
印　　张　12.5
字　　数　245 千
版 印 次　2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-07760-6
定　　价　28.00 元

前 言

《全日制义务教育数学课程标准(修改稿)》规定的数学教学内容中,有"数与代数"、"图形与几何"、"统计与概率"和"综合与实践"四个部分,而"数与代数"显然是小学数学的主要内容。这无论是从内容所占的篇幅上,还是教学所花的时间上,都可以看出。对于一个要从事小学数学教学的师范大学生来说,基本上学过"图形与几何"和"统计与概率"的相关课程,因此具有这方面系统的理论知识。但对于"数与代数"方面的理论知识并不系统,有许多人甚至并不具有。为此,我们编著了《小学数与代数基础理论》,供有关的师范专业学生作教材,也可作为在职教师继续教育培训教材。

《小学数与代数基础理论》是在原人民教育出版社小学数学室编著的中等师范学校数学教科书《小学数学教材教法(第一册)》(即《小学数学基础理论》)的基础上编著的。鉴于高等师范学校学生比中等师范学校学生起点高、基础厚及现行小学数学教材的实际,我们着重从提高学生对小学数与代数内容的理解和把握上,来组织《小学数与代数基础理论》的内容。

全书共有六章和三个附录。第一章预备知识,第二章自然数,第三章整数性质初步,第四章分数,第五章小数,第六章量的计量。三个附录分别是5000以内的质数表、有关质数的一些猜想和祖冲之与圆周率,它们可供学习相关内容时作参考,或作为资料备查。

预备知识一章既是学习第二到第五章内容的基础,又能使读者从更高的视角上去审视第二到第五章的内容和把握小学数与代数的内容。

自然数一章分别以自然数的基数理论和序数理论为线索展开,学习时谨防混淆。基数理论具有较强的实用意义,这在运用自然数四则运算解决实际问题中就可以明显地体现出来;自然数序数理论具有较强的理论意义,对于提高小学数学教学的理论水平具有明显的意义。两种理论各有优势,读者可在学习中体会。基数理论以集合论知识为基础而建立,与实际生活联系紧密,从而直观通俗,易于理解,便于应用;序数理论以公理化方法为基础而建立,从而体系严密,对于定理的证明要求高,能使读者对小学数与代数的许多相应内容在"知其然"的基础上,"知其所以然"。这一章与中师教材《小学数学教材教法(第一册)》(即《小学数学基础理论》)的相应内容比较,有大的差别,主要是在其基础上增加了自然数的序数理论。

另外，把整数四则简单应用题的教学与四则运算意义教学结合起来，旨在加强对运算意义的理解和应用。

整数性质初步一章基本上属于初等数论的内容，但比初等数论对相关内容的论述要更详细、具体。这部分内容的学习，为读者研究相应数学内容打下较坚实的理论基础。本章与中师教材《小学数学教材教法（第一册）》（即《小学数学基础理论》）的相应内容比较，也有大的差别，主要是在内容上作了深化和扩充。

分数一章与中师教材《小学数学教材教法（第一册）》（即《小学数学基础理论》）的相应内容比较，变化不大。主要着重于数概念从自然数扩展到分数后，如何将自然数四则运算的概念和性质扩展、迁移到分数中来。与整数应用题的教学类似，基本分数应用题也与分数乘除法的意义结合在一起教学。

小数与量的计量两章的内容与中师教材《小学数学教材教法（第一册）》（即《小学数学基础理论》）的相应内容相比，变化不大。

书中的许多习题，是巩固学习内容所必需的，有许多内容还应视作是所学内容的必要补充。

蒋志萍　汪文贤

2010 年 4 月 5 日

目 录

第一章　预备知识

为了方便后续课程的学习，本章拟对集合、映射、关系、可数集等知识作简要的复习，对运算等知识作新的学习. 这些知识都属于小学数学的现代基础，对于理解小学数学内容既是知识的基础，也是观点的指导. 由于集合、映射、关系、可数集等知识只是一种简要的复习，需要作补充的话，请参看有关教材；而运算则需要近世代数等方面的基础.

第一节　集　合

1　集合的概念

集合是现代数学中的一个重要概念，是个不加定义的原始概念.《现代汉语词典》对集合一词的解释是：若干具有共同属性的事物的总体. 也就是说，把一些具有共同属性的个体所组成的整体就称为一个集合，简称集，常用大写英文字母 A，B，C，…来表示. 集合中的每一个个体则称为这个集合的元素，常用小写英文字母 a，b，c，…来表示. 如全体自然数就构成一个自然数集，常记作 $\mathbf{N}$，每一个自然数都是自然数集的元素，代表元素常用 n 来表示. 一个元素如果是某一集合的元素，就说这个元素属于这个集合，如 $1\in\mathbf{N}$. 一个元素如果不是某一集合的元素，就说这个元素不属于这个集合，如 $\frac{1}{2}\notin\mathbf{N}$.

以后如无特殊说明，$\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集，$\mathbf{Z}^-$ 表示负整数集，等等.

一个集合中的元素具有以下特征：

(1) 元素的确定性. 即一个元素属于还是不属于某个集合是确定的.

(2) 元素的互异性. 即一个集合中没有两个相同的元素.

(3) 元素的无序性. 即一个集合中的元素与书写的次序无关.

一个集合的元素个数是有限的，称为有限集；元素个数是无限的，称为无限集.

2　几个相关概念

定义 1.1　如果一个集合 A 的所有元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是集

合 B 的子集，或说集合 A 包含于集合 B，记作 $A\subseteq B$，或 $B\supseteq A$.

定义 1.2 如果一个集合 A 的所有元素都是集合 B 的元素，且集合 B 中至少有一个元素不在集合 A 中，则称集合 A 是集合 B 的真子集，或说集合 A 真包含于集合 B，记作 $A\subset B$，或 $B\supset A$.

定义 1.3 如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素，且集合 B 的每一个元素又都是集合 A 的元素，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

定义 1.4 如果说在某一范围内，所有集合都是某一集合的子集，则称这一集合为全集. 全集常用 I 表示.

定义 1.5 一个元素也没有的集合，称为空集. 空集常用希腊字母 $\varnothing$ 表示. 空集也是有限集.

3 集合的运算

常用的集合运算有交、并、补、差等运算，运算的结果分别称为交集、并集、补集、差集等.

定义 1.6 交集. 由集合 A,B 的公共元素所构成的集合，称为集合 A,B 的交集，记作 $A\cap B$. 按照交集的定义，$C=A\cap B=\{c\mid c\in A, c\in B\}$.

定理 1.1 集合的交运算满足交换律和结合律，即 $A\cap B=B\cap A$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

定义 1.7 并集. 由集合 A,B 共同所有的元素所构成的集合，称为集合 A,B 的并集，记作 $A\cup B$.

按照并集的定义，$C=A\cup B=\{c\mid c\in A$ 或 $c\in B\}$.

定理 1.2 集合的并运算满足交换律和结合律，且集合的交运算对并运算满足分配律，即 $A\cup B=B\cup A$，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

定义 1.8 补集. 若集合 A 是全集 I 的子集，则把由属于 I 而不属于 A 的元素所构成的集合称为 A 的补集，记作$\overline{A}$. 按照补集的定义，$\overline{A}=\{x\mid x\in I, x\notin A\}$.

定义 1.9 差集. 设 A,B 是两个集合，把属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合，称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$ 或 $A\setminus B$. 按照差集的定义，$A-B=\{x\mid x\in A, x\notin B\}$.

4 集合的笛卡尔积

在直角坐标系中，我们非常熟悉用有序实数对来表示点的坐标. 如用二维有序数对(x,y)来表示平面直角坐标系中的点，用三维有序数对(x,y,z)来表示空间直角坐标系中的点. 这种有序数对中的全体，在集合中就是所谓集合的笛卡尔(Descartes，1596—1650)积.

定义 1.10 设 A,B 是两个集合，由 A 中的任意一个元素与 B 中的任意一个

元素所组成的所有有序元素对所构成的集合，称为 A 与 B 的笛卡尔积. 按照集合的笛卡尔积的定义，$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$.

事实上，对于任意的 $(x,y)\in A\times B$ 是一个序偶. 一般地，$(x,y)\neq(y,x)$. 对于任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A\times B$，当且仅当 $x_1=x_2, y_1=y_2$ 时，才有 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

以上是二元笛卡尔积的定义. 我们还可以把这一定义推广到 n 元笛卡尔积.

例 1.1　设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2\}$，

则 $A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$.

例 1.2　设 $\mathbf{R}$ 为实数集，则 $\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y,z)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}, z\in\mathbf{R}\}$. 这实际上就是三维欧氏空间.

我们还可以把它推广到 n 维欧氏空间.

第二节　映　射

1　映射的概念

映射也是与集合有关的现代数学中的重要概念.

定义 1.11　设 X,Y 是两个集合，f 是一个法则，如果对于任意的 $x\in X$，在法则 f 的作用下，总有且只有唯一的 $y\in Y$ 与 x 对应，则称 f 是 X 到 Y 的映射，y 是 x 在映射 f 作用下的像，记作 $y=f(x)$. 而称 x 是 y 的一个原像(或逆像).

用符号表示为：

$$f: X\to Y$$
$$x\mapsto y=f(x).$$

并称 X 是映射 f 的定义域，记作 D_f. 所有的像的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f.

定义 1.12　如果 $R_f=Y$，则称 f 是从 X 到 Y 上的映射.

定义 1.13　如果 $R_f\subset Y$，则称 f 是从 X 到 Y 内的映射.

定义 1.14　如果 f 是从 X 到 Y 上的映射，且对于任意的 $x_1,x_2\in X$，x_1 不同于 x_2，它们对应的像 y_1 和 y_2 又不同，则称 f 是一个从 X 到 Y 上的一一映射. 如果对于两个集合间存在一个集合到另一个集合上的映射，我们又说这两个集合是一一对应的.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 就是一个从 $(-\infty,+\infty)$ 到 $[-1,1]$ 上的映射. $y=x^2$ 是从实数集 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 内的映射. $y=2x$ 是一个从实数集 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的一一映射.

2　逆映射

定义 1.15　对于从 X 到 Y 上的一一映射 f，反过来，我们可以建立一个从 Y

对 X 上的一一映射,即以 x 的像 y 为原像,以 x 为 y 的像所建立的映射. 这个映射我们称为映射 f 的逆映射,记作 f^{-1}.

用符号表示就是:

设 $f: X\to Y$

$x\mapsto y=f(x)$

是从 X 到 Y 上的一一映射,那么 f 的逆映射 f^{-1} 为:

$f^{-1}: Y\to X$

$y\mapsto x=f^{-1}(y)$

它是一个从 Y 对 X 上的一一映射.

3　中小学数学中映射的基本形式

(1) 数集到数集的映射;

(2) 数集到点集的映射;

(3) 几何图形集合到数集的映射;

(4) 点集到点集的映射.

第三节　关　系

1　关系的概念

关系是我们常说的一个词. 现实生活中具有各种各样的关系,如一个班级的学生,相同年龄是一种关系,不同年龄也是一种关系;相同性格是一种关系,不同性格也是一种关系. 日常生活中遇到的许多关系,可以上升为数学概念. 在数学中,关系是一个重要的概念,如数量关系就是数学研究的主要内容之一. 由于具不具有某种关系是在一个特定的范围内而言的,因此,关系与集合紧密相关.

定义 1.16　设 X 是一个集合,R 是笛卡尔积 $X\times X$ 的一个子集,对于任意的 $a,b\in X$,(a,b)即为 $X\times X$ 中的一个元素. 如果$(a,b)\in R$,则称 a 和 b 具有关系 R,记作 aRb,并称 R 为 X 内的一个关系.

例 1.3　设 X 表示某个班 40 名学生的集合,为方便起见,这 40 名学生分别用 1 到 40 的学号来表示,则 $X=\{1,2,3,4,\cdots,40\}$.

因 $X\times X=\{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(1,40),(2,1),(2,2),\cdots,(40,1),(40,2),\cdots,(40,40)\}$,故若用 R 表示相同年龄这一关系,则显然相同年龄关系的学生的集合就是 $X\times X$ 的一个子集. 一个班里的学生,年龄要么相同,要么不同,两者必居其一,不会有别的什么情况. 比如学号为 1 号与 3 号的同学年龄相同,即元素$(1,3)\in R$,即有 $1R3$,显然此时有 $3R1$;如果 1 号与 2 号年龄不同,则表示$(1,2)\notin R$;

而自己与自己年龄自然相同,如有 $1R1$;再有,若 3 号与 8 号年龄相同,就有 $3R8$.由 $1R3$,$3R8$,显然可得 $1R8$.

以上三种情况就表明了关系 R 的三个特点:

(1) 对每个学生 i,有 iRi;

(2) 如果 iRj,则 jRi;

(3) 如果 iRj,jRk,则 iRk.

根据以上的同龄关系,我们就可以将一个班的学生进行分类.如果这个班的学生有三种不同的年龄,那显然就分为三类了.

但是很明显,并不是所有关系都具有以上三个特点的.如我们常用的大于或小于关系,即顺序关系,就不具有(1)和(2)这样两个特点.

2 等价关系

定义 1.17 具有以上(1)(2)(3)这样三个特点的关系,被我们称为等价关系.等价关系是现代数学中一个很重要的概念.

设 A 是一个集合,给出一种关系 R,则对于任意的 $x,y\in A$,总可以判断是否具有这种关系.如果具有这种关系,即有 xRy.如果关系 R 满足以下三条公理:

(1) xRx,这一特征称为自反性;

(2) $xRy\Rightarrow yRx$,这一特征称为对称性;

(3) $xRy,yRz\Rightarrow xRz$,这一特征称为传递性;

则称 R 是集合 A 中的一个等价关系.

例如,一个班学生的同龄关系,就是一个等价关系.再如,实数集中的等于关系,就是一个等价关系.

具有等价关系的元素成为一类,称为等价类.等价类也是现代数学中很重要的一个概念.

3 顺序关系

在集合中,除了上述的等价关系外,还有一种重要的关系,叫做顺序关系.顺序关系是我们非常熟悉的关系,所谓的“长幼有序”就足以表明这种顺序关系在平常生活中的表现.而“长幼有序”无非表示了年龄或辈份等的大小顺序,这种大小顺序就是一种顺序关系.

最为常用的大小顺序关系是数的大小顺序关系.我们知道在实数范围内,两个数是可以比较大小的,因此我们对实数集 $\mathbf{R}$ 进行一番考察,以便明确这种关系具有什么特征.

以实数集中“$\leqslant$”这一关系为例.众所周知,在实数集中,任意给出两个实数 a,b,要么“$a\leqslant b$”这种关系成立,要么“$a\leqslant b$”关系不成立,是非常明确的.如 $1\leqslant 1$ 是成立的,$-3\leqslant 5$ 也是成立的,而 $5\leqslant 0$ 是不成立的.

实数集中的“$\leqslant$”关系，就是一种顺序关系. 这一关系具有以下三个特点：

(1) 对于任意 $a \in \mathbf{R}$，有 $a \leqslant a$，即 a 与 a 具有“$\leqslant$”关系，亦即具有等价关系中相同的自反性.

(2) 若 $a \leqslant b$，$b \leqslant a$，则 $a = b$. 这说明不具有等价关系中的对称性，称为反对称性.

(3) 若 $a \leqslant b$，$b \leqslant c$，则 $a \leqslant c$. 这说明具有等价关系相同的传递性.

定义 1.18 一般地，如果一个集合 X 内的关系 R，满足以下三条公理：

(1) 自反性：对任意 $x \in X$，有 xRx；

(2) 反对称性：对任意 $x, y \in X$，若 xRy，yRx，则 $x = y$(这时的“$=$”一般情况下表示相同)；

(3) 传递性：对任意的 $x, y, z \in X$，若 xRy，yRz，则 xRz.

则称关系 R 是集合 X 内的一个顺序关系.

定义 1.19 具有以上顺序关系 R 的集合 X 称为半序集.

定义 1.20 如果对于半序集 X 中的顺序关系 R，若对任意 $x, y \in R$，且 $x \neq y$，则 xRy 或 yRx 总有一个成立(通俗地说，就是对于任意两个不同元素总能确定其中哪一个在“前”，哪一个在“后”)，就称集合 X 是一个全序集. 如实数集就是一个全序集，因为在实数集中的关系“$<$”或“$>$”都具有以上性质.

第四节 可数集

1 集合的势

我们知道，一个集合，从元素个数是有限的还是无限的角度来分类，可以分为有限集和无限集两大类. 空集一个元素也没有，自然可以认为元素是有限的. 但对于无限集，情况并不相同. 如自然数集与实数集虽同属于无限集，但从数轴上的点来看，自然数集表示的点在数轴上是很稀疏的，而实数集表示的点在数轴上是不留任何空隙的. 在数学上把它们区分开来，就要用到所谓集合的势的概念.

定义 1.21 两个集合 A，B 如果能建立一一对应关系，那么我们称这两个集合是等势的，或者说是对等的. 记作 $A \sim B$，读作 A 和 B 等势.

两个集合等势或对等，形象地说，就是这两个集合之间的元素“同样多”(或“元素个数相同”).

如全体自然数组成的集合 $\mathbf{N}$ 与全体非负偶数组成的集合 M，虽然 $M \subset \mathbf{N}$，但它们是对等的，即等势的，或者说它们的元素是“同样多”的.

事实上，对于 $\mathbf{N}$ 和 M 之间，我们极易建立一一对应关系. 设 n 是 $\mathbf{N}$ 的代表元素，m 是 M 的代表元素，只要令 $m = 2n (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$，就建立了一个从 $\mathbf{N}$ 到 M 的一一对应关系了.

显然，等势关系“～”也是一种等价关系. 因此，有的书上也把两个集合等势称为两个集合等价.

2　可数集

定义 1.22　我们把自然数集 **N** 的势称为可列势，记作 $\aleph_0$，读作阿列夫零. 具有可列势的集合称为可数集(或可列集).

显然，自然数集是可数集. 事实上可数集的名称也源于此.

因此，可数集的另一个定义就是：

定义 1.23　与自然数集等势的集合称为可数集.

定理 1.3　有理数集 **Q** 是可数集.

集合的创始人康托尔(G. Cantor，1854—1913)用对角线法证明了这一命题. 康托的证明方法如下：

先用对角线方法列出所有非负有理数，且凡前面已出现过的数后面就不再出现，如表 1.1 所示.

表 1.1　康托的对角线法

自然数：	$0 \longrightarrow$	1	$2 \longrightarrow$	3	4	…
分母是2的正有理数：	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	…
分母是3的正有理数：	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	…
分母是4的正有理数：	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	…
分母是5的正有理数：	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

这样就把全体非负有理数全部列出来了，然后在每个正有理数后插入绝对值相等的负有理数，就把全体有理数排列如下：

$$0,1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{3}{2},-\frac{3}{2},2,-2,3,-3,\frac{5}{2},-\frac{5}{2},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{5},\cdots$$

这就证明了有理数集是可数集，其势也为 $\aleph_0$.

定义 1.24　不与自然数集等势的无限集，称为不可数集，或不可列集.

定理 1.4　实数集 **R** 是不可数集.

证明：我们只要证明在开区间$(0,1)$中的实数不可数即可. 设 α 是一个实数，且 $0<\alpha<1$.

假设(0,1)中的实数是可数的,那么就可将其一一编号.编号后的实数作如下排列:

第一个数是: $\alpha_1=0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\cdots a_n^{(1)}\cdots$

第二个数是: $\alpha_2=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\cdots a_n^{(2)}\cdots$

第三个数是: $\alpha_3=0.a_1^{(3)}a_2^{(3)}a_3^{(3)}\cdots a_n^{(3)}\cdots$

$\vdots$

第 n 个数是: $\alpha_n=0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\cdots a_n^{(n)}\cdots$

$\vdots$

其中任何一个数中的数字不使它从某一位起全是9.

现在,我们按下法作出一个数:

$\beta=0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$,其中 $b_1\neq a_1^{(1)}$, $b_2\neq a_2^{(2)}$, $b_3\neq a_3^{(3)}$, $\cdots$, $b_n\neq a_n^{(n)}$, $\cdots$,且 $b_i\neq 9(i=1,2,3,\cdots)$.

显然,$\beta\neq\alpha_i(i=1,2,3,\cdots)$,但 $0<\beta<1$.这一事实说明,(0,1)中的实数并非全编上了号,这与假设其中的实数都编上了号矛盾.从而定理获证.

以上定理说明了这样一个事实,即实数集的势比自然数集的势要大.

实数集与有理数集都是无限集,但实数集是不可数集,这是它与有理数集的一个根本区别.

定义 1.25 与实数集合等势的集合称为连续集合.

连续集合的势称为连续势,记作$\aleph$,读作阿列夫.

鉴于 $\mathbf{N}\subset\mathbf{R}$,故可认为$\aleph>\aleph_0$.

由于数轴上的点集与实数集可以建立一一对应关系,即它们是等势的.因此,数轴上的点集可以作为连续集的几何例子.

平面上的点集也是连续集.

第五节 运 算

1 代数运算和运算

运算是我们从小学就知道的一个数学概念.那什么叫运算呢?先看下面我们所熟知的几个例子:

$$3+2=5,1-2=-1,2\times0=0,1\div2=\frac{1}{2}.$$

以上4个分别是所谓的四则运算的具体例子.我们分析一下它们的共同点,那就是有两个数,通过某种法则与一个数相对应.即运算是一个集合中两个元素与一个元素之间的一种映射.

定义 1.26　映射 $f: X^n \to X$，叫做在非空集合 X 中的 n 元代数运算. 数 n 称为运算的秩.

当 $n=0$ 时，即所谓的零元代数运算. 零元的代数运算就是在 X 中划出某一个元素来.

当 $n=1$ 时，就是一元的代数运算. 它表示的是 X 到 X 的映射. 三角函数就是一元代数运算的例子.

当 $n=2$ 时，就是二元代数运算，这是我们最经常研究的代数运算，一般人们所谓的代数运算通常是指二元代数运算，简称运算. 序偶 $(a,b)\in X^2$ 是对于代数运算 $*$ 的像，表示为 $a*b$. 以后若无特殊说明，所称的运算均指二元代数运算.

以上定义告诉我们，一个运算必须满足：对于一个集合 X 中的任意两个元素构成的序偶 (a,b)，通过某种运算 $*$ 后，运算的结果所对应的那个元素 $a*b$ 也必须在该集合 X 中，即有 $a*b=c\in X$. 这就是所谓集合对于该运算的封闭性.

从关系的概念来看，X 中的二元代数运算，实际上是给出了一个三元关系. 对于三元组 (a,b,c) 这一关系当且仅当 $a*b=c$ 时才成立；反之，论断不成立. 因为不是 X 中的任意三元关系都是 X 中的二元代数运算. 比如自然数集合中的三元组 $(3,4,5)$，就不能构成自然数集合中通常意义下的一个加法运算.

X 中的三元关系 R 是 X 中的二元代数运算的充分必要条件是：任何数偶 (a,b)，$a,b\in X$，对应于一个且只有一个元素 $c\in X$，使之对于 (a,b,c) 存在关系 R. 例如三元组 $(1,2,3)$ 给出的三元关系，就构成自然数集合中的一个通常意义下的加法运算.

例 1.4　设 $X=\{$立正，向左转，向右转，向后转$\}$，其中的元素的含义就是体育课中列队时的 4 种基本动作.

(1) 写出 X^2；

(2) 在这一集合中定义一个运算：$X^2\to X$.

解：(1) 求 X^2，实际上是要写出元素可以重复的所有排列，即组成 X 中所有元素的有序元素对.

$X^2=\{$(立正，立正)，(立正，向左转)，(立正，向右转)，(立正，向后转)，(向左转，立正)，(向左转，向左转)，(向左转，向右转)，(向左转，向后转)，(向右转，立正)，(向右转，向左转)，(向右转，向右转)，(向右转，向后转)，(向后转，立正)，(向后转，向左转)，(向后转，向右转)，(向后转，向后转)$\}$.

(2) 构造映射 $X^2\to X$：对于任意的 $(a,b)\in X^2$，使 $a\oplus b=c\in X$.

立正⊕立正＝立正，立正⊕向左转＝向左转，立正⊕向右转＝向右转，立正⊕向后转＝向后转，向左转⊕立正＝向左转，向左转⊕向左转＝向后转，向左转⊕向右转＝立正，向左转⊕向后转＝向右转，向右转⊕立正＝向右转，向右转⊕向左转＝立正，向右转⊕向右转＝向后转，向右转⊕向后转＝向左转，向后转⊕立正＝

向后转，向后转⊕向左转＝向右转，向后转⊕向右转＝向左转，向后转⊕向后转＝立正.

映射 $X^2\to X$：对于任意的$(a,b)\in X^2$，使 $a\oplus b=c\in X$，是一个二元代数运算，这个运算就是⊕.

注：以上我们把不转和没有改变方向的姿势都归为立正姿势.

2 逆运算

我们知道，减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算.

那么什么叫逆运算呢？

定义 1.27 设 $*$ 是 X 中的一个代数运算，方程 $a*x=c$ 有且只有一个根，即对于序偶$(a,c)\in X^2$，对应于元素 $b=c/a$，使 $a*b=c$，显然，这里"/"也是一个代数运算，我们把"/"这个代数运算称为代数运算 $*$ 的左逆运算.

同样我们可以定义右逆运算.

设 $*$ 是 X 中的一个代数运算，方程 $x*b=c$ 有且只有一个根，即对于序偶$(b,c)\in X^2$，对应于元素 $a=c/b$，使 $a*b=c$，同样，这里"/"也是一个代数运算，我们把"/"这个代数运算称为代数运算 $*$ 的右逆运算.

但值得指出的是，左、右逆运算不一定相同，只有当运算 $*$ 是可交换的，那么左、右逆运算才是相同的.

事实上，在自然数集合中，减法和除法运算都不符合关于代数运算的定义1.26，因此它们都不是自然数集合中的代数运算，只能说自然数集合中的部分代数运算.而将集合扩展到整数集后，减法运算就是严格意义下的代数运算，而不只是部分代数运算了；除法运算(除数不为 0)在有理数集合中就是严格意义下的代数运算，而不只是部分代数运算了.这说明，代数运算这一概念是与相应的集合紧密相关的，是在某一特定的集合中，在其意义下才成立的.

减法和除法运算并非是最基本的代数运算，它们分别是加法和乘法的逆运算，是由加法和乘法分别派生出来的运算.

例 1.5 加法与减法的关系.

设 $3+x=5$，求 x，则显然 $x=5-3$；同样，设 $x+2=5$，求 x，则 $x=5-2$.这就是说，对于 $3+2=5$，由于 $5-3=2$，即 $5-3$ 是 $3+2$ 的左逆运算；而由于 $5-2=3$，即 $5-2$ 是 $3+2$ 的右逆运算.显然 $3+2$ 的左逆运算与右逆运算都是减法，即左、右逆运算是同一种运算.因此，我们说减法是加法的逆运算.

再来看减法，若设 $5-x=2$，求 x，则显然不存在运算"/"，使 $x=2/5$.虽然有 $5-3=2$，但不存在运算"/"，使 $3=2/5$.事实上 $x\neq 2-5$，$x\neq 2+5$.因此，按照左逆运算的定义，$5-x=2$ 不存在左逆运算；勉强的我们有 $x=5-2$，而 $5-2$ 一方面是减法，另一方面又交换了 2 和 5 的位置，这无形中改变了左逆运算的定义.因为定