



国防特色教材·控制科学与工程/“十一五”国家重点图书

应用 H_∞ 控制

王广雄 何朕 著

Applied H_∞ Control



哈尔滨工业大学出版社

北京航空航天大学出版社 北京理工大学出版社
哈尔滨工程大学出版社 西北工业大学出版社

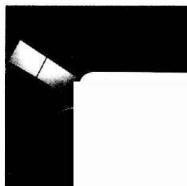


国防特色教材·控制科学与工程 / “十一五”国家重点图书

应用 H_∞ 控制

王广雄 何朕 著

Applied H_∞ Control



哈尔滨工业大学出版社

北京航空航天大学出版社 北京理工大学出版社
哈尔滨工程大学出版社 西北工业大学出版社

内容简介

本书从应用的角度来介绍 H_∞ 控制理论,所涉及的问题包括 H_∞ 设计中性能指标的确定,权函数的选择,如何来满足对象的假设条件, H_∞ 设计结果的验证,设计的鲁棒性和鲁棒设计,以及采样控制系统和非线性系统的 H_∞ 控制等。书中有关设计问题的说明都配有相应的例题。

本书为自动控制专业及其他相关专业研究生的教材,也可用作本科高年级学生及教师、工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用 H_∞ 控制/王广雄,何朕著. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2010.8
ISBN 978-7-5603-2990-1

I. ①应… II. ①王… ②何… III. ①自动控制-教材 IV. ①0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 016310 号

应用 H_∞ 控制

王广雄 何朕 著
责任编辑 杜燕

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号(150006) 发行部电话:0451-86418760 传真:0451-86414749

<http://hitpress.hit.edu.cn>

哈尔滨市工大节能印刷厂印装 各地书店经销

*

开本:787×960 1/16 印张:12 字数:250 千字

2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月第 1 次印刷 印数:2 000 册

ISBN 978-7-5603-2990-1 定价:38.00 元

前 言

H_∞ 控制理论自形成以来已有了长足的进展,也已出版了不少优秀的教材和专著。不过这些专著大多是在 H_∞ 控制理论形成的初期撰写的。随着 H_∞ 控制的发展也提出了一些应用中的问题,本书主要是从应用的角度来介绍 H_∞ 控制理论,所涉及的问题包括 H_∞ 设计中性能指标的确定,权函数的选择,设计问题中如何来满足对象的假设条件, H_∞ 设计结果的验证,设计的鲁棒性和鲁棒设计,以及采样控制系统和非线性系统的 H_∞ 控制等。

H_∞ (读作“ H 无穷”(H-infinity)) 控制理论是关于反馈控制系统设计的理论,所以如果要从应用的角度来介绍这个理论就离不开对反馈控制认识过程的介绍。本书第 1 章从反馈设计理论的发展来介绍 H_∞ 控制理论形成的背景,是为了弄清反馈控制系统的设计要求,为从设计要求转换成 H_∞ 标准问题作好准备。 H_∞ 控制求解的是 H_∞ 优化问题。第 2 章要说明 H_∞ 标准问题、 H_∞ 优化设计和 H_∞ 范数的优化解之间的关系。第 3~5 章是关于 H_∞ 求解的理论和算法。本书的重点是第 4 章的 DGKF 法。DGKF 法现在已是 H_∞ 控制中的经典算法。虽然 MATLAB 的工具箱中已有标准的函数可用来求取 H_∞ 优化解和 H_∞ 控制器,不过 DGKF 法是一种解析求解的方法,通过 DGKF 的解可以进一步了解 H_∞ 优化解中的各种问题。第 6 章和第 7 章结合实例来介绍控制系统的 H_∞ 设计。第 6 章是标准的 H_∞ 混合灵敏度设计,第 7 章则是另一种平行的方法,是从开环特性上来设计的 H_∞ 回路成形法。第 8 章是关于参数摄动下的鲁棒镇定和鲁棒设计问题。第 9 章和第 10 章是采样控制系统和非线性系统 H_∞ 设计。书中有关设计问题的说明都配有相应的例题,这些工作大多是作者和研究生们近年来的研究成果。每章小结概括了该章所讨论问题在 H_∞ 设计中的地位 and 作者对这些问题的看法。

本书的内容是按 60 学时课程来安排的。如果是 40 学时的课,可以只讲授前五章。

作者长期在哈尔滨工业大学为研究生讲授“ H_∞ 控制理论”课程。本书的内容

取自作者的讲稿和近年来博士生们的工作。书中有些观点和做法可能与常规的不一致,欢迎提出批评指正。

王广雄 何朕

2009 年 9 月于哈尔滨

目 录

第 1 章 H_∞ 控制理论形成的历史背景	1
1.1 早期的工作	1
1.2 奇异值分解及其在控制系统中的应用	3
1.3 多变量系统的早期设计方法	12
1.4 本章小结	19
参考文献	19
第 2 章 H_∞ 问题和 H_2 问题	20
2.1 H_∞ 范数指标	20
2.2 H_∞ 问题	25
2.3 H_2 问题	32
2.4 本章小结	36
参考文献	37
第 3 章 H_∞ 问题的求解:模型匹配法	38
3.1 RH_∞ 上的互质分解	38
3.2 参数化	41
3.3 模型匹配问题	42
3.4 模型匹配问题的解	43
3.5 本章小结	44
参考文献	44
第 4 章 H_∞ 问题的求解:DCKF 法	45
4.1 数学准备	45

4.2 对象 G 的假设	52
4.3 状态空间求解中的特殊问题	59
4.4 主要定理	76
4.5 本章小结	83
参考文献	83
第 5 章 H_∞ 控制中的 LMI 法	85
5.1 线性矩阵不等式 (LMIs)	85
5.2 数学准备	87
5.3 次优 H_∞ 问题	90
5.4 次优问题的 Riccati 不等式	93
5.5 H_∞ 次优控制器	94
5.6 LMI 法的其他一些设计特点	95
5.7 本章小结	99
参考文献	99
第 6 章 典型 H_∞ 设计问题	101
6.1 设计问题分类	101
6.2 混合灵敏度问题	104
6.3 H_∞ 状态反馈	116
6.4 本章小结	121
参考文献	122
第 7 章 H_∞ 回路成形	123
7.1 引言	123
7.2 对象的互质因式分解和摄动	123
7.3 H_∞ 回路成形设计	127
7.4 设计举例	128
7.5 本章小结	132
参考文献	132

第 8 章 结构奇异值和系统的鲁棒性能	133
8.1 引言	133
8.2 参数摄动下的数学模型	133
8.3 结构奇异值	137
8.4 鲁棒性能	139
8.5 μ 综合	141
8.6 鲁棒设计举例	143
8.7 计算结构奇异值的 MATLAB 函数	150
8.8 本章小结	151
参考文献	151
第 9 章 采样系统的 H_∞ 控制	152
9.1 引言	152
9.2 提升技术	153
9.3 采样控制系统鲁棒稳定性的离散化分析	157
9.4 采样控制系统的频率响应和 L_2 诱导范数	160
9.5 本章小结	164
参考文献	165
第 10 章 非线性系统的 H_∞ 控制	166
10.1 L_2 增益与耗散性	166
10.2 数学准备: 动态规划	167
10.3 Hamilton-Jacobi 不等式	170
10.4 非线性 H_∞ 控制: 状态反馈	172
10.5 设计举例	174
10.6 本章小结	181
参考文献	181

第 1 章 H_∞ 控制理论形成的历史背景

本章是绪论章,是通过对反馈控制发展过程的介绍和分析来了解反馈控制系统要解决的问题和设计要求,为从设计问题转换成 H_∞ 标准问题作好准备。同时本章也要为引入 H_∞ 范数作好必要的数学准备。

1.1 早期的工作

反馈控制理论在 20 世纪 80 年代经历了重大的变化,无论是对问题的认识,或是所用的方法,都有了重要的进展。推动控制理论发展的因素有二:

一是要解决不确定性问题。不确定性是指模型不确定性,即设计所用的数学模型与实际的物理系统不一致。我们知道,控制系统是根据对象的数学模型来设计的,但这个系统最终却要在实际的物理对象上实现。当理论越来越严密时,这不确定性的矛盾就更为突出,因而推动了理论往前发展。这个不确定性问题也称为鲁棒性问题。

二是要解决多变量控制问题。早年多变量控制的例子还比较少,一般用经典的概念尚能应付。但是随着科学技术的发展,多变量的应用例子越来越多,暴露出原有理论以及概念上的一些缺陷,也推动了理论往前发展。

下面就根据这两个因素来观察 20 世纪 80 年代之前的发展过程。就控制理论来说,20 世纪 50 年代是经典时期,以传递函数和频率特性作为研究对象,到了 60 年代出现了状态空间法,当时称为现代控制理论。状态空间法直接对微分方程进行处理,适合于很多空间控制问题,而且状态空间的一些概念对深入了解控制系统的性能也是极为有用的。虽然有了这些理论,但是在多变量控制方面却一直没有明显的进展。70 年代英国的 Rosenbrock 将频域法推广用于多变量系统的设计,提出了逆奈氏阵列(Inverse Nyquist Array, INA)法^[1],并获得了成功。频域法重新获得了生机,又开始蓬勃发展。但是好景不长,1981 年 Doyle 及 Stein 在文献[2]中指出 INA 法无法保证鲁棒性。文献[2]也由此开启了反馈控制理论的一个新的发展时期。这里先对 INA 法反映出的问题作一初步说明。

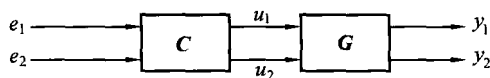
这个问题要从多变量控制说起。多变量系统是指有多个输入输出变量的系统,或称多输入多出系统(Multi-input Multi-output, MIMO)。如果用传递函数来描述,这个系统的传递函数就是一个矩阵

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1k}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2k}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k1}(s) & g_{k2}(s) & \cdots & g_{kk}(s) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

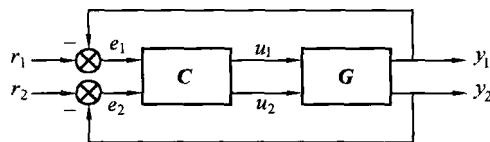
式中第一行对应系统的第一个输出, g_{11} 是第一个输入到第一个输出的传递函数, g_{12} 是第二个输入到第一个输出的传递函数, $\cdots$ 。 $\mathbf{G}(s)$ 的第二行则对应系统的第二个输出, 以此类推。 $\mathbf{G}(s)$ 的非对角线上的元素代表了各变量之间的耦合作用。如果 $\mathbf{G}(s)$ 是一个对角阵, 就表示各变量之间没有耦合, 这时该多变量系统就等价于若干个单变量系统, 就可以用单变量系统的设计方法来进行设计了。

早期的多变量控制都是基于解耦的思想, 即将多变量系统化解为多个单变量系统来进行控制。作为例子, 设有一多变量系统如图 1.1(a) 所示, 图中 $\mathbf{G}$ 为 2 入 2 出的对象, $\mathbf{C}$ 为 2 入 2 出的控制器。

$$\mathbf{GC} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}c_{11} + g_{12}c_{21} & g_{11}c_{12} + g_{12}c_{22} \\ g_{21}c_{11} + g_{22}c_{21} & g_{21}c_{12} + g_{22}c_{22} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$



(a)



(b)

图 1.1 多变量系统

注意到 c_{ij} 为控制器的相应传递函数, 是待设计的。如果选择适当的控制器参数使式(1.2)中的非对角线上的各项都等于零, 那么传递函数阵 $\mathbf{GC}$ 就成了对角阵, 这就是解耦设计。解耦设计后系统成为两个单变量系统, 就可以单独来进行控制设计了, 见图 1.1(b) 所示。

由于对象的 $g_{ij}(s)$ 均具有惯性, 因此式(1.2)的非对角线项一般均不易使其为零, 所以这种解耦设计多年来一直制约着多变量控制的发展。Rosenbrock 指出, 完全解耦并非必要, 并提出一种对角优势的概念。这是将式(1.1) 传递函数阵 $\mathbf{G}(s) = \{g_{ij}(s)\}$ 对应的各频率特性(即 Nyquist 图线) 排成阵列, 按一定的方法使阵列的对角线上各元占有优势, 然后根据这对角阵

上的各元素采用单变量的设计思路来进行设计。由于实际上采用的是逆 Nyquist 图线,所以这个方法称为逆奈氏阵列(INA)法。INA 法并不要求完全解耦,而是允许存在弱耦合,因此控制器的阶次较低,结构简单,易于工程实现。这个方法的成功带来了频域法的复兴,20 世纪 70 年代后半时期出现了一系列基于类似思想的方法,统称为现代频域法。

但是 INA 法很快就遇到了关于鲁棒性的挑战。究其原因还是在于对系统设计要求的理解。INA 法的基本思想是解耦。其实几十年来对多变量的控制要求就是要求解耦。这个设计要求似乎是天经地义的,谁也没有怀疑过。可是到了 1981 年,Doyle 及 Stein^[2] 和 Safonov^[3] 指出,解耦并不是一种反馈设计。事实上,从式(1.2)和图 1.1(a)可以看出,解耦设计是属于一种开环特性的设计。那么一个多变量系统究竟为什么要采用反馈控制呢?系统的反馈特性究竟是什么?由此可见,控制理论虽然经历了数十年的发展,到了 1981 年才发现,对为什么要采用反馈控制似乎还没有完全弄明白。明确了反馈控制的目的,以及究竟用什么特性来表述系统的反馈特性,使反馈控制理论走上了正确的发展道路,并很快形成了关于反馈系统综合(synthesis)的理论—— H_∞ 控制理论。本章下面各节将就这个发展过程来展开说明。

1.2 奇异值分解及其在控制系统中的应用

1.2.1 奇异值分解

在多变量控制理论中,矩阵的对角分解是一种重要的技术。对角分解有两种,一种是特征值分解,另一种就是奇异值分解。但是特征值分解的应用受到很多限制,且不能表征系统的输入输出特性。而奇异值分解有一系列超出特征值分解的优点,有利于控制系统的分析和设计。

下面不加证明,直接给出奇异值分解定理。

定理 1.1 设矩阵 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, 则存在酉矩阵 $U \in \mathbf{C}^{m \times m}$ 和 $V \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 使得

$$A = U \Sigma V^* \quad (1.3)$$

式中 $*$ 号表示复共轭转置, Σ 是如下定义的矩阵

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n}$$

$$S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad r \leq \min(m, n)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

式中的 r 是 A 阵的秩。若 A 为实数阵, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 则 U, V 为正交阵。

定理中的式(1.3)称为 A 阵的奇异值分解。 Σ 的主对角线上共有 $\min(m, n)$ 个元, 其中除前 r 个为正实数外, 还可能有一些 0。包括这些可能的 0 在内的所有 $\min(m, n)$ 个非负实数

都称为 A 阵的奇异值。酉矩阵 U 和 V 的各列分别称为左奇异向量和右奇异向量。

例 1.1 设 $A = \begin{bmatrix} j\frac{1}{\sqrt{2}} & -j\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, A 阵的奇异值分解式为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & j \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}^*$$

上式表明, A 阵的 2 个奇异值是 2, 1。从上式中也可看到左右两个酉矩阵的特色, 矩阵中的各列都是互相正交的单位向量。

下面是一些常用到的奇异值的性质:

$$(i) \sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \quad (1.4)$$

$$(ii) \text{ 若 } A \text{ 可逆, 则 } \underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\overline{\sigma}(A^{-1})} \quad (1.5)$$

$$(iii) \overline{\sigma}(AB) \leq \overline{\sigma}(A)\overline{\sigma}(B) \quad (1.6)$$

$$(iv) \overline{\sigma}(A+B) \leq \overline{\sigma}(A) + \overline{\sigma}(B) \quad (1.7)$$

$$(v) \underline{\sigma}(A) + \underline{\sigma}(\Delta A) \geq \underline{\sigma}(A + \Delta A) \geq \underline{\sigma}(A) - \overline{\sigma}(\Delta A) \quad (1.8)$$

式中的奇异值符号是指

$$\overline{\sigma}(A) = \sigma_{\max}(A) = \sigma_1 = A \text{ 的最大奇异值}$$

$$\underline{\sigma}(A) = \sigma_{\min}(A) = \sigma_r = A \text{ 的最小奇异值}$$

式(1.4)说明, 复共轭相乘的特征值 λ_i 的平方根等于奇异值 σ_i , 这个性质有时也称为是奇异值的定义。虽然理论上可以用这个式子来计算奇异值, 但这个公式并不能真正用来计算奇异值, 因为还有一个算法稳定性问题, 所以这里是作为奇异值的一个性质来列出的。一般计算时可采用 MATLAB 的函数 SVD()。SVD 是 Singular Value Decomposition 的缩写。

例 1.2 设 $A(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+0.02}{s+2} \\ \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$, $s = j\omega$,

则根据式(1.4)可算得 $A(j\omega)$ 的奇异值

$$\overline{\sigma}[A(j\omega)] = \sqrt{A(j\omega)^*A(j\omega)} = \sqrt{\frac{\omega^2 + 4.0004}{\omega^2 + 4}} \approx 1$$

这个 $\bar{\sigma}[A(j\omega)]$ 在 Bode 图上是一条 0 dB 的直线,称为全通 (all-pass) 特性,意指不同频率的信号通过这个环节时均不衰减。全通特性的概念在 H_∞ 设计中占有重要地位,因为 H_∞ 的最优解是全通解。

1.2.2 奇异值分解的应用:矩阵的谱范数

奇异值分解在数学上有许多重要的应用,这里只介绍其在控制理论中的一个应用。

控制系统分析和设计中需要一种能反映输入输出特性的量,但特征值并不具有这样的性能,而奇异值则能反映系统的输入输出之间的增益关系。

注意到,对多变量系统来说,系统的增益与输入的信号向量的方向有关。设 A 为系统矩阵, x 为输入向量。设 M 和 m 分别表示最大和最小增益

$$M = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$m = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

这里向量的范数采用 Euclid 范数,即 2-范数

$$\|x\| := \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$$

这增益的变化可用 A 阵的奇异值来表示。设对 A 进行奇异值分解, $A = U\Sigma V^*$, 并令 $z = V^*x$, 得

$$\|Ax\| = \|U\Sigma V^*x\| = \|\Sigma z\|$$

式中第二个等号存在的根据是酉矩阵的性质,即酉矩阵左乘一个向量,向量的范数不变。

考虑到 $\Sigma = \text{diag}(\bar{\sigma}, \dots, \underline{\sigma})$, 于是可得

$$\underline{\sigma} \|z\| \leq \|\Sigma z\| \leq \bar{\sigma} \|z\|$$

因为 V^* 也是酉矩阵,所以 $\|z\| = \|x\|$, 用 $\|x\|$ 除上式得

$$\underline{\sigma} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \bar{\sigma} \quad (1.9)$$

由此可见,奇异值决定了增益的变化范围。下面的定理将进一步说明式(1.9)右侧的等号是存在的,即最大增益 $M = \bar{\sigma}$ 。

定理 1.2 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则由向量 2-范数 $\|x\|_2$ 诱导的矩阵范数 $\|A\|_2 = \bar{\sigma}(A)$ 。

证明 设 A 的奇异值分解为 $U\Sigma V^*$ 。由于 V 为酉矩阵,它的各个列向量的长度均为 1,将 V 的第一列 v_1 取作向量 x , 记作 x_1 , 则有

$$z = V^* x_1 = \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

这样,利用上述 A 的奇异值分解式,可得

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^*(Ax) = (U\Sigma V^*x)^*(U\Sigma V^*x) = z^*\Sigma U^*U\Sigma z = z^*\Sigma^2 z$$

再将上面的 z 代入便得

$$\|Ax_1\|_2^2 = \bar{\sigma}^2 \quad (1.10)$$

由式(1.9)和式(1.10)可知,对于 $\|x\|_2 = 1$ 的向量 x 来说, $\max \|Ax\|_2^2 = \bar{\sigma}^2$ 。根据矩阵范数的定义,这就是一种矩阵范数,即 $\|A\|_2 = \bar{\sigma}(A)$

证毕

矩阵的这个诱导范数 $\|A\|_2$ 称为谱范数。谱范数是奇异值分解的一个重要应用。范数代表了矩阵的“大小”,而矩阵是一种变换关系,变换关系的“大小”实际上就是一种“增益”。所以奇异值代表了一种增益关系,而特征值不具有这种特性。

1.2.3 反馈控制系统的设计

这一节要说明反馈控制系统应根据系统的奇异值特性来进行分析和设计。

这里首先应该区分开系统的响应特性与反馈特性。作为例子,设有一负反馈系统如图 1.2(a) 所示,分析时一般常用一等价的系统来代替,如图 1.2(b) 所示。这里为简单起见,设此等价系统为二阶系统。图 1.2(b) 中还绘出了这个系统在阶跃输入下的输出,这就是阶跃响应。设计时如果只关心响应特性,只想着图 1.2(b),就会忘却图 1.2(a) 的反馈控制的任务。作为反馈系统的设计来说,设计时首先要考虑的是反馈特性。所谓反馈特性是指反馈系统所特有的,只能靠反馈才能使其改变的一些特性,如稳定性(含鲁棒稳定性)、灵敏度和扰动抑制等性能^[2, 3]。而响应特性则可以不通过反馈,仅用开环控制的方式就能做到。上面 1.1 节中 MIMO 系统的解耦控制,实质上就是一种响应特性。

低灵敏度和对扰动的抑制是一个系统所以要采用负反馈来控制的真正理由,而稳定性和鲁棒稳定性则是反馈控制系统必须具有的性能。使之具有良好的反馈特性才是反馈设计的目的。

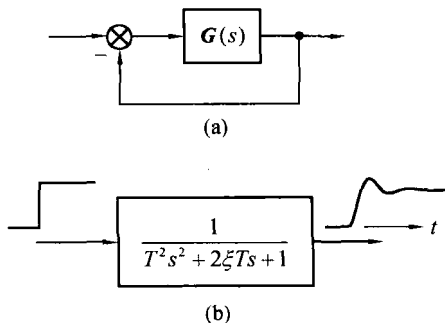


图 1.2 反馈系统与等价系统

(1) 灵敏度

设有如图 1.3 所示的反馈系统,图中 K 为控制器, G 为控制对象。设该系统的闭环传递函数 T 为

$$T = \frac{GK}{1 + GK} \quad (1.11)$$

系统的灵敏度定义为

$$S = \frac{d \ln T}{d \ln G} = \frac{dT/T}{dG/G} \quad (1.12)$$

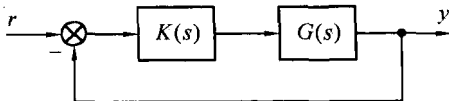


图 1.3 反馈控制系统

式(1.12)表明系统的灵敏度定量表示了闭环的 T 对对象参数变化的敏感程度。如果系统的灵敏度低,就说明这个设计对(对象的)建模误差具有鲁棒性。

如果以 G 作为变量, T 作为它的函数,对式(1.11)求导,可得灵敏度的表达式

$$S = \frac{G}{T} \frac{dT}{dG} = \frac{1}{1 + GK} \quad (1.13)$$

根据式(1.13),可以从 Nyquist 图线 $G(j\omega)K(j\omega)$ (图 1.4) 来分析系统的灵敏度 $S(j\omega)$ 。图 1.4 中 ρ 为 GK 距 -1 点的最小距离,根据图中的几何关系可知

$$\rho = \min |1 + GK| \quad (1.14)$$

定义灵敏度的最大幅值为 M_s ,则有

$$M_s = \max |S(j\omega)| = 1/\rho \quad (1.15)$$

M_s 越大,表示频率特性离 -1 点越近,这时如果 G 的参数有变化,很容易导致不稳定,所以现在常以灵敏度的最大值 M_s 作为(闭环)系统鲁棒性的一个指标。一般取 $M_s = 1.2 \sim 2.0$ [4]。

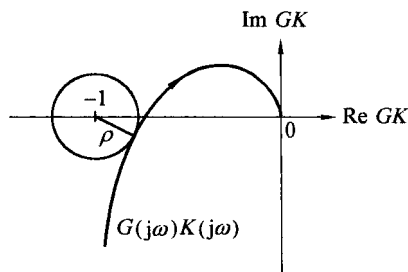


图 1.4 系统的 Nyquist 图

现在再来看式(1.13), S 的这个公式指出了一种测量灵敏度的方法: 把 S 看做是传递函数, 从输入 d 到输出 y 的传递函数就是 S (图 1.5)。而这个传递函数正是系统对输出端扰动 d 的抑制特性, S 小就表示由于反馈的作用而将扰动的影响抑制下来了, 所以说灵敏度也是反馈控制系统的一个很重要的特性。当然, 如果 $S > 1$, 这个系统反而会将扰动给放大了。

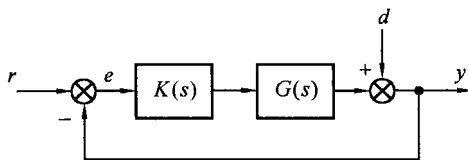


图 1.5 对输出端扰动的抑制

从图 1.5 还可以看到, 从 r 到误差信号 e 的传递函数也等于灵敏度。由此可见, 灵敏度表示了系统在 r 和 d 作用下的性能, 其峰值还表示了参数变化对系统稳定性的影响, 故一般均以灵敏度来表示反馈系统的性能(performance), 设计时要尽可能压低其灵敏度。

对 MIMO 系统来说, S 是一个传递函数阵, $S = (I + GK)^{-1}$ 。设计中这个性能的定量表示就是 S 阵的奇异值 $\sigma_i[S(j\omega)]$ 。图 1.6 所示为系统灵敏度奇异值 Bode 图的典型形状, 设计时要尽量压低 $\sigma_i[S(j\omega)]$, 如图中箭头所示。这里最大奇异值 $\bar{\sigma}[S]$ 代表了最差的性能, 所以就灵敏度来说, 要用最大奇异值曲线 $\bar{\sigma}[S(j\omega)]$ 来表示系统的性能。

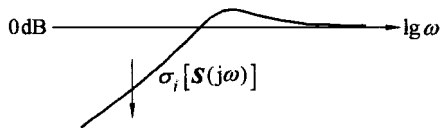


图 1.6 灵敏度函数的奇异值 Bode 图

(2) 鲁棒稳定性

鲁棒稳定性是指按名义特性设计的系统, 当对象摄动后系统仍是稳定的。所谓摄动是指

对象特性出现变化,或者说是对象的数学模型存在不确定性。因为系统设计时用的数学模型与实际的系统总是有差别的,即存在不确定性,所以鲁棒稳定性对系统设计来说,是这个反馈设计是否能实现的问题。

模型不确定性可分为两类,一是模型参数的变化,另一类是未建模动态特性。所谓参数变化是指描述对象的数学模型中的参数与实际的参数不一致。由于数学模型总是某种意义下的低频数学模型,所以参数变化都反映为对象低频到中频段的摄动 $\Delta G(s)$ 。这个频段上的模型误差引起的鲁棒性问题就是上述的灵敏度问题,其最大幅值 M_s 即为鲁棒稳定性的指标。

未建模动态是指对象建模时没有包括在内的一些被忽略的动态特性,例如可能存在的由于转轴扭转而产生的谐振特性,信号传递中可能出现的时间滞后,或者是可能忽略掉的分布参数的影响,等等。一般来说,鲁棒性的主要问题是这些高频的未建模动态,这一节要讨论的就是这种未建模动态引起的鲁棒稳定性问题。

当考虑不确定性时,对象特性一般用加性或乘性不确定性来表示。加性不确定性的表示方式为

$$G(j\omega) = G_0(j\omega) + \Delta G(j\omega) \quad (1.16)$$

这里

$$|\Delta G(j\omega)| < l_a(\omega)$$

式中 $l_a(\omega)$ 为加性不确定性的界函数,表示了实际 $G(j\omega)$ 偏离模型 $G_0(j\omega)$ 的范围。这里 $G_0(j\omega)$ 也称为名义特性或标称特性。

乘性不确定性的表示方式为

$$G(j\omega) = [1 + L(j\omega)] G_0(j\omega) \quad (1.17)$$

式中

$$|L(j\omega)| < l_m(\omega)$$

这个 l_m 表示了实际 $G(j\omega)$ 偏离模型的相对值的界限。

这里要说明的是式(1.16)和(1.17)中的 $G(j\omega)$ 表示对象的实际特性,设计时并没有这个 $G(j\omega)$ (指 G 是未知的),设计时只有名义特性 $G_0(j\omega)$ 和给定的不确定性的界函数,所以今后在讨论中名义特性就不再加角标,直接写成 $G(j\omega)$ 。也就是说,设计计算中用的 $G(j\omega)$ 都是名义特性。

系统设计时一般均采用乘性不确定性。这是因为与控制器连接后 GK 的不确定性与 G 的乘性不确定性是一样的。图 1.7 所示是乘性不确定性界函数的一般形状。一般来说,未建模动态对低频段特性的影响较小,即低频段的模型比较准, l_m 值相对较小,随着频率的增加, l_m 在一定频率后会超过 1。作为例子,设在系统的建模过程中忽略了一个很小的 $\tau = 50 \text{ ms}$ 的时延环节。时延环节的传递函数为 $e^{-s\tau}$, 其幅频特性等于 1, 相频特性 $\varphi(\omega) = -\omega\tau$, 即相位滞后随 ω 比例增加。图 1.8 表示了无时滞(即标称特性)时的 1 与实际特性之间的向量关系。本例中 $\tau = 50 \text{ ms}$, 当 $\omega = 20 \text{ rad/s}$ 时相角滞后 $\varphi(\omega) = -1 \text{ rad} \approx -60^\circ$ 。从图可见,此时实际特性与标称 1 的差别