

飞机结构力学

(上册)

北京航空学院 何庆芝 荣湘涛 张永顺



国防工业出版社

目 录

第一章 弹性力学基础

§ 1—1 引言	1
§ 1—2 应力分析	1
§ 1—3 应变分析	11
§ 1—4 应力与应变的关系	17
§ 1—5 弹性力学问题的一般解法	24
§ 1—6 弹性力学的一般定理	32
§ 1—7 平面问题 (直角坐标系)	34
§ 1—8 平面问题 (极坐标系)	43
* § 1—9 应用复变函数解弹性力学平面问题	50
本章习题	63

第二章 能量原理

§ 2—1 引言	68
§ 2—2 功与余功: 应变能与余应变能	68
§ 2—3 虚功原理, 总位能最小原理	73
§ 2—4 虚余功原理, 总余能最小原理	75
§ 2—5 近似解法	77
本章习题	85

第三章 板壳概述

§ 3—1 引言	86
§ 3—2 板弯曲时的基本微分方程	86
§ 3—3 板的边界条件	91
§ 3—4 受弯薄板的解法	92
§ 3—5 横向载荷和中面力组合作用下板的弯曲	100
§ 3—6 大挠度板	104
§ 3—7 薄壳的无矩理论	106
§ 3—8 轴对称载荷下旋转壳的有矩理论	113
本章习题	120

第四章 板壳稳定

§ 4—1 引言	122
----------	-----

§ 4—2 板的临界应力·····	122
§ 4—3 薄壁杆的稳定性·····	131
§ 4—4 加劲板的稳定性·····	132
§ 4—5 受剪板失稳后的工作情况——张力场·····	133
§ 4—6 圆柱壳受轴压时的稳定性·····	135
本章习题·····	136

第五章 薄壁梁的弯曲与扭转

§ 5—1 基本假设·····	137
§ 5—2 自由弯曲时正应力的求法·····	138
§ 5—3 开剖面自由弯曲时剪流的求法·····	145
§ 5—4 开剖面的弯心·····	153
§ 5—5 单闭室剖面剪流的求法·····	159
§ 5—6 单闭室结构剖面扭角的计算·····	165
§ 5—7 单闭室剖面的弯心·····	166
§ 5—8 多闭室剖面中剪流的求法·····	172
§ 5—9 锥度的影响·····	181
§ 5—10 限制弯曲及限制扭转概念·····	185
本章习题·····	189

第六章 钣杆结构

§ 6—1 薄壁结构的计算模型·····	195
§ 6—2 板杆结构几何不变性分析·····	196
§ 6—3 板杆结构元件的平衡·····	203
§ 6—4 静定平板板杆结构内力的求法·····	206
§ 6—5 静定平板板杆结构位移的求法·····	210
§ 6—6 静定空间板杆结构内力和位移的求法·····	213
§ 6—7 静不定结构的解法——力法·····	219
§ 6—8 基本系统的选择·····	2
§ 6—9 对称条件的应用·····	
§ 6—10 静不定平板板杆结构的计算·····	
§ 6—11 静不定空间板杆结构的计算·····	236
§ 6—12 剪滞问题与弹性影响·····	244
本章习题·····	250

第一章 弹性力学基础

§ 1—1 引言

弹性力学主要研究弹性体受载荷时的应力应变问题。当外载荷加到一个可变形物体上时，体内将要产生内力（应力）和变形（应变）。当除去外载荷后，该物体如能恢复到原来的形状，我们就称之为弹性体。所以，可把弹性定义为固体具有的一种属性：在一定的温度和应力范围内，其变形只是温度和应力的函数。一般而言，它又是线性函数。因此，变形也是外载荷的函数。

在下面的讨论中，我们都假定弹性体是均匀的，就是说，在物体内部取任一微元，它的性质与其它微元以及物体整体的物理性质是完全相同的。有时，又假定物体是各向同性的，就是，沿着各个方向，都具有相同的弹性。

一般结构材料并不完全满足上述的假定。例如，由于材料内晶体是按不同方式排列的，它既非均匀的，又非各向同性的。但由于晶体尺寸非常小，它们又是随机排列的；如果物体的尺寸远大于晶体的尺寸，那么从材料的宏观来看，可以认为是均匀的，又是各向同性的。如果经过滚辗之类的工艺过程，使金属内晶体某一排列方式占优势，这时，虽然材料具有各向异性的特点，但工程上仍可近似地按各向同性处理。不过，对夹层结构和复合材料等，我们必须考虑其各向异性这个特点；相应地称前者为结构各向异性，而称后者为材料各向异性。

研究一个弹性体在外载荷作用下其应力，位移和应变的分布状态，我们应该研究弹性体在外力作用下所必须服从的规律，就是：(1) 如果将物体的某一部分作为分离体时，则作用在它上面的内力之间或内力与外力之间互相平衡；(2) 变形之后，整个弹性体内各点应变是协调的；(3) 对于一定的材料，其应力和应变之间存在特定的关系。把这些规律以数学形式来表达，即是弹性力学中所说的平衡方程，几何方程和物理方程。对于某一特定的弹性力学问题；如果可以列出它们的相应方程，便为进一步求解其应力、位移和应变的分布规律奠定了基础。

§ 1—2 应力分析

一、平衡方程

1. 应力和应力分量

我们考虑一个任意形状的物体，上面作用着任意的平衡外力力系。如果物体是弹性体，外力将会传递到其各个部分，因而在各部分之间产生了内力。为了研究这些内力的分布情况，我们可以设想用平面 AA 把物体分割为两部分（图1—1），每一部分的内力都和作用在其边界上的外力相平衡。如在 O 点一个微面积 ΔA 上作用的内力为 ΔF ，则 O 点的应力可定义为该点内力的集度，即：

$$\text{应力} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (1-1)$$

一般情况下， ΔF 不会与 ΔA 平面垂直。我们习惯于把 ΔF 分解为垂直于该平面和在该平面内的两个分力 ΔF_n 及 ΔF_s （如图1—1所示）。从而可以定义两种应力：正应力（法向应力）和剪应力（切向应力）。即：

$$\text{正应力: } \sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA} \quad (1-2)$$

$$\text{剪应力 } \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_s}{\Delta A} = \frac{dF_s}{dA} \quad (1-3)$$

在实际计算中，我们又常常把应力分解到一组直角坐标系上（如图1—2所示）。这时，

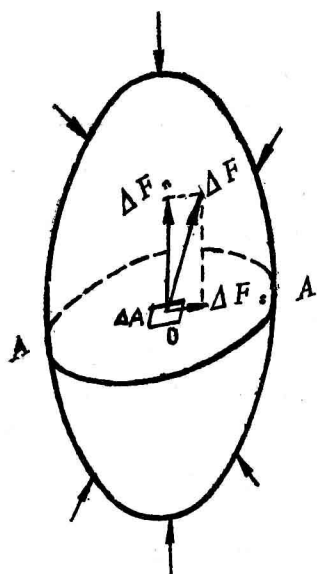


图 1—1

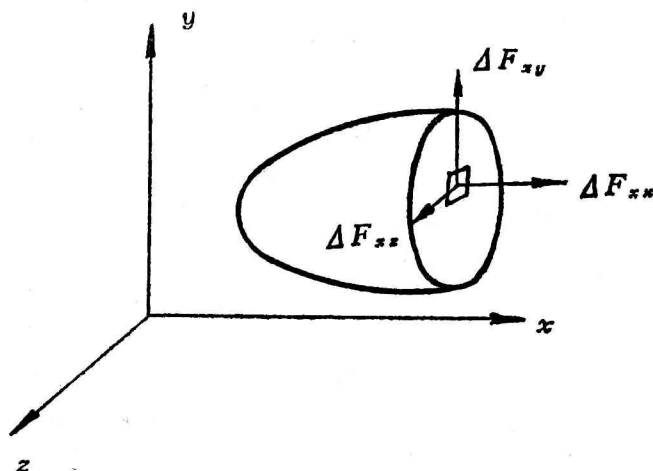


图 1—2

可以使切割平面与某一坐标轴正交（如图1—2上切割平面与 x 交轴正）。这时，又可以把平面内的力 ΔF_s 分解为 ΔF_{xy} ， ΔF_{xz} ，它们分别平行于 y 轴和 z 轴。在本书中，我们用双下标来表示剪应力，例如 τ_{xy} ， τ_{xz} 等。下标中前一个字母表示应力所在平面的法线方向，后一个字母表示应力的方向。这样，我们有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{xx}}{\Delta A} = \frac{dF_{xx}}{dA} \\ \tau_{xy} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{xy}}{\Delta A} = \frac{dF_{xy}}{dA} \\ \tau_{xz} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{xz}}{\Delta A} = \frac{dF_{xz}}{dA} \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

通过 O 点我们取出一个正六面体，并使六面分别与 x ， y ， z 轴正交，显然六个面上都作

用着正应力和剪应力。假定物体处于均匀应力状态（即应力与O点的坐标无关），则该六面体各面上的应力将如图1—3所示。如果把六面体的尺寸无限缩小，则微六面体上的应力就代

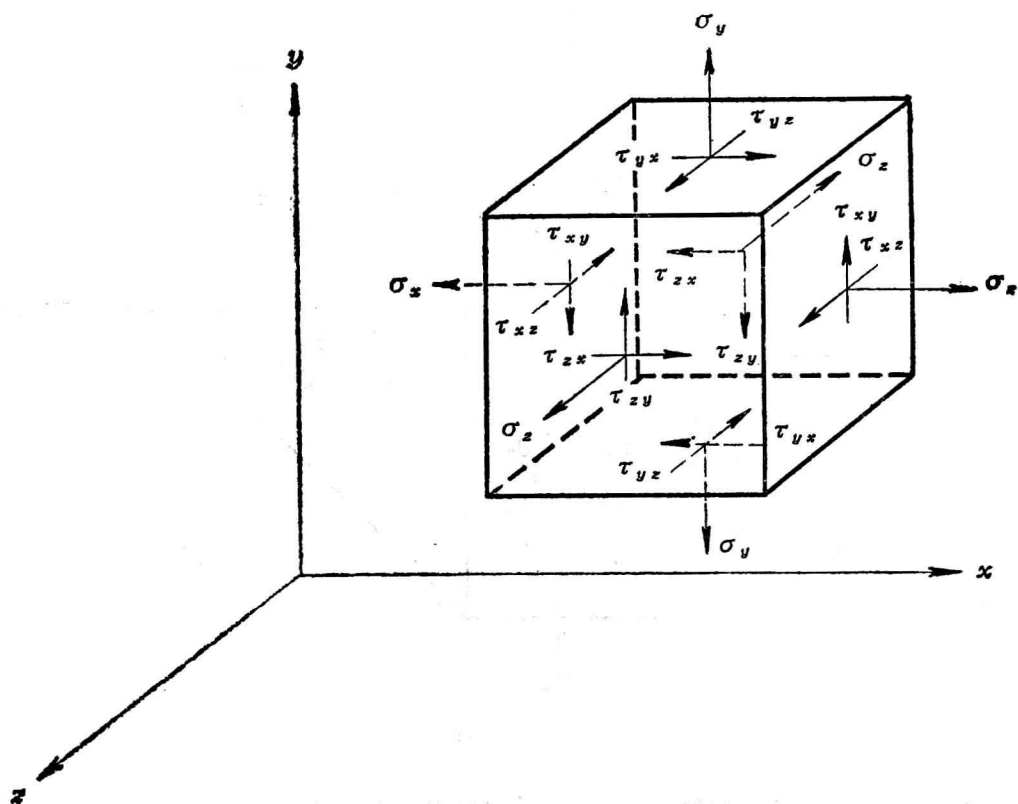


图 1—3

表了O点的应力状态。显然，为了表示O点的应力状态，共有九个应力分量，即

$$[\sigma] = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1-5)$$

可以证明， $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

这样，物体內一点的应力可以用六个应力分量来表示。应力的正方向按下述规定：法向应力以拉伸应力为正；在外法线与坐标轴正向重合的平面上，如果剪应力作用方向与对应的坐标轴正向相同，则剪应力为正；其外法线方向与坐标轴正向相反的平面上，剪应力方向与对应的坐标轴正向相反时、则剪应力为正。

2. 平衡方程

一个物体如不处于均匀应力状态，那么在在其中取出的微六面体上，两相对面上的应力是不同的，如图1—4所示。例如，我们考虑沿x方向的应力变化，和x轴正交的左边平面上应力为 σ_x ， τ_{xy} ， τ_{xz} ，则右边平面上的应力可按台劳级数展开，以左边平面上的应力表示之。

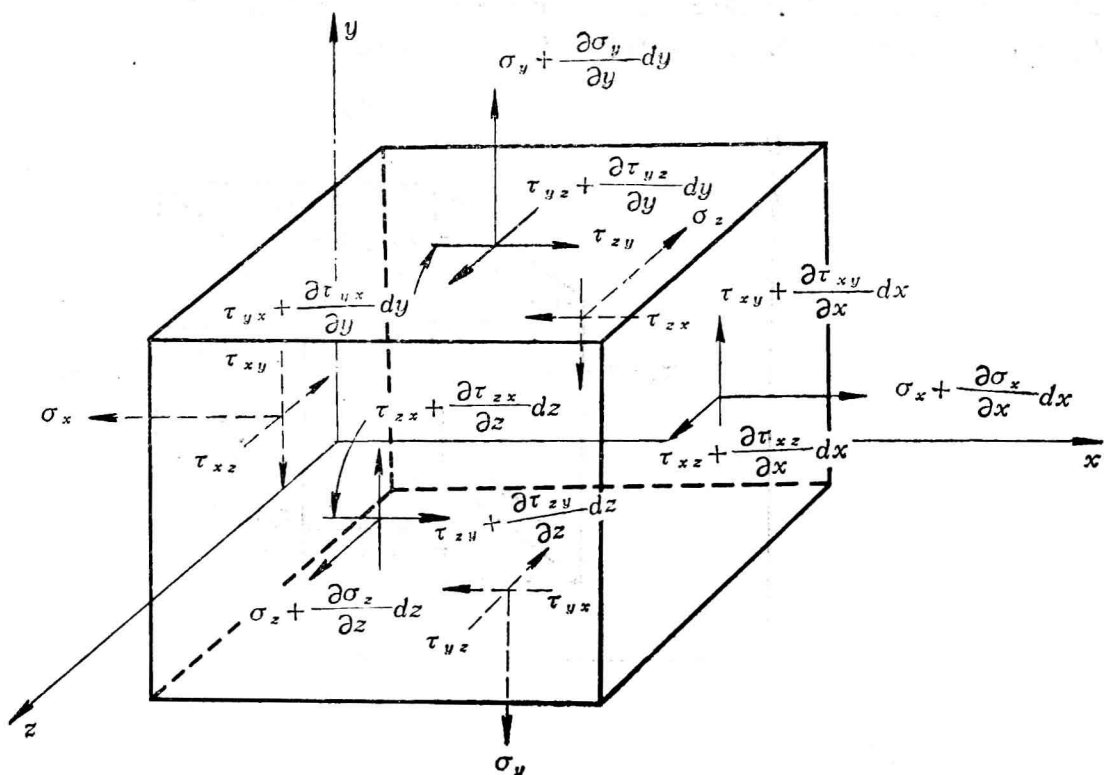


图 1—4

如只取级数的两项（略去高阶微量），得右边平面上的应力为

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \quad \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx, \quad \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$$

同样，考虑上下两平面及前后两平面的应力变化，可得到作用于 $y + dy$ 及 $z + dz$ 两平面上的应力，如图1—4所示。

现在我们研究从物体上取出的正六面微元体作分离体的平衡情况。

六面体在各面的应力和体力的作用下处于平衡。

首先，通过六面体的中心作一平行于 z 的轴，然后对此轴取矩：

$$\begin{aligned} & \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} \\ & - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

化简上式，得

$$\tau_{xy} dy dz x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy dz \frac{(dx)^2}{2} - \tau_{yx} dx dy dz - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dz \frac{(dy)^2}{2} = 0$$

以 $dx dy dz$ 通除上式，并使 $dx \rightarrow 0$ ， $dy \rightarrow 0$ ，得

及

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

现在研究各力在 x 方向的平衡:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

式中 X 为体力在 x 方向的分量

化简上式, 得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (1-8a)$$

再分别考虑 y 方向与方向的力的平衡, 并以 Y, Z 分别表示体力在 y 与 z 方向的分量, 得

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (1-8b)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (1-8c)$$

在弹性体内任何一点, 在体力作用下, 其应力必须满足上述平衡方程 (式1-8)。

二、边界条件

物体受外力作用时, 除了内部各点应力必须满足平衡方程 (式1-8) 之外, 在物体的边界 (此处作用有面力 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$) 上各点也必须满足平衡方程。

在受载物体的边界上取一四面锥微元体, 如图1-5所示。使锥体的三个面分别与 x, y, z 轴正交, 第四个面 dA 则是边界面的一部分。设 dA 的法线与 x 轴, y 轴, z 轴的方向余弦分别是 l, m , 和 n , 则分别与 x, y, z 各轴正交的平面的面积是

$$dA_x = l dA, \quad dA_y = m dA, \quad dA_z = n dA$$

设作用在边界的面力在 x, y, z 方向的分量分别以 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 表示, 其它各面的应力如图1-5所示。

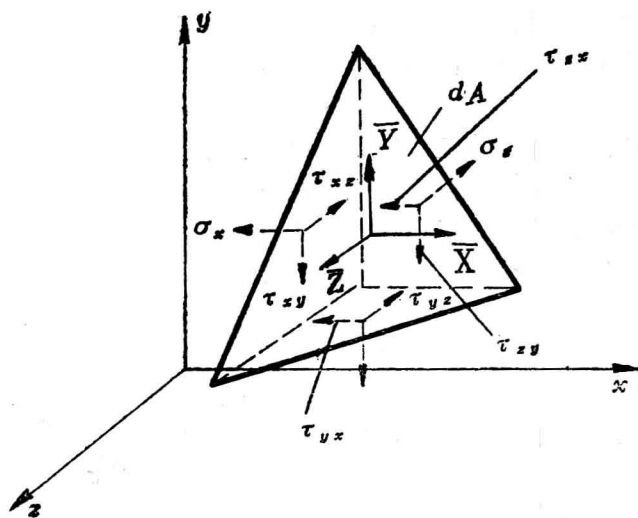


图 1-5

考虑各力在 x 方向的平衡, 得:

$$\bar{X}dA - \sigma_x dA_x - \tau_{zx}dA_z - \tau_{yx}dA_y + \frac{1}{3}XdA_x dx = 0$$

或
$$\bar{X}dA - \sigma_x l dA - \tau_{zx}m dA - \tau_{yx}n dA + \frac{1}{3}X l dA dx = 0$$

以 dA 通除各项, 并使 $dx \rightarrow 0$, 得

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n \quad (1-9a)$$

同样, 考虑各力在 y 方向和 z 方向的平衡, 可得:

$$\bar{Y} = \tau_{yx}l + \sigma_y m + \tau_{yz}n \quad (1-9b)$$

$$\bar{Z} = \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + \sigma_z n \quad (1-9c)$$

方程式 (1-9a, b, c) 为物体在边界面上必须满足的平衡条件。如为自由边界, 则 $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$ 。

三、主应力

1. 一点的应力的描述

上面曾经说明, 在弹性体内任一点 O 的应力状态可用通过 O 点的三个互相垂直平面的应力分量 (即三个正应力和三个剪应力) 来确定。我们现在研究一下, 当通过 O 点的三个互相垂直的平面 (不失一般性, 可令三个平面分量与 x 轴, y 轴, z 轴正交) 上的应力已知时, 如何确定通过 O 点的任一斜平面上的应力。在图 1-6 所示的 OBC 平面上 (该平面与 x 轴正交) 有应力分量 $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$, 在 OBD 平面 (与 y 、轴正交) 上, 有应力分量 $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$, 在 OCD 平面 (与 z 轴正交) 上, 有应力分量 $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ 现在要求 BCD 斜平面上的应力。设 BCD 斜面上在 x, y, z 轴方向上的应力分别为 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, 则由平衡条件可得

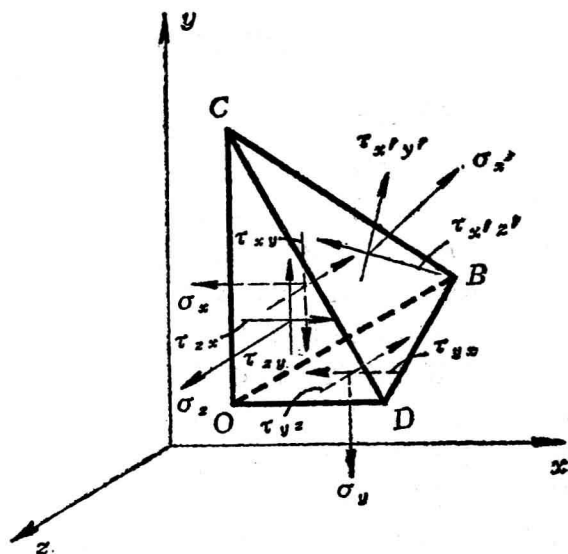


图 1-6

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n \\ \bar{Y} &= \tau_{yx}l + \sigma_y m + \tau_{yz}n \\ \bar{Z} &= \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

式中 l, m, n 为斜平面的法线与 x, y, z 轴的方向余弦。由此可见, 只要 O 点的六个应

力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 是已知的, 那么由方向余弦 l, m, n 所确定的平面上在 x, y, z 方向的应力分量 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 就很容易由(1—10)式求出。

为了用 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 表示作用在斜平面上的正应力和剪应力, 现在引入一个新的坐标系 x', y', z' 。 x', y', z' 轴与 x, y, z 轴之间的方向余弦如下表示:

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

其中:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(x'x), & m_1 &= \cos(x'y), & n_1 &= \cos(x'z) \\ l_2 &= \cos(y'x), & m_2 &= \cos(y'y), & n_2 &= \cos(y'z) \\ l_3 &= \cos(z'x), & m_3 &= \cos(z'y), & n_3 &= \cos(z'z) \end{aligned}$$

假如使 BCD 平面与 x' 轴正交(x' 与平面的法线同向), 则 $y'z'$ 平面必与 BCD 面平行。显然, BCD 面上的正应力为:

$$\sigma_{x'} = \bar{X}l_1 + \bar{Y}m_1 + \bar{Z}n_1 \quad (a)$$

又因为

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= l_1\sigma_x + m_1\tau_{xy} + n_1\tau_{xz} \\ \bar{Y} &= l_1\tau_{yx} + m_1\sigma_y + n_1\tau_{yz} \\ \bar{Z} &= l_1\tau_{zx} + m_1\tau_{zy} + n_1\sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将(b)代入(a), 可得

$$\sigma_{x'} = l_1^2\sigma_x + m_1^2\sigma_y + n_1^2\sigma_z + 2l_1m_1\tau_{xy} + 2m_1n_1\tau_{yz} + 2l_1n_1\tau_{xz} \quad (1-11a)$$

又 BCD 斜面上的剪应力的两个分量分别为:

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= \bar{X}l_1 + \bar{Y}m_2 + \bar{Z}n_2 \\ &= l_1l_2\sigma_x + m_1m_2\sigma_y + n_1n_2\sigma_z + (l_1m_2 + l_2m_1)\tau_{xy} \\ &\quad + (m_1n_2 + m_2n_1)\tau_{yz} + (l_1n_2 + l_2n_1)\tau_{xz} \end{aligned} \quad (11-b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= l_1l_3\sigma_x + m_1m_3\sigma_y + n_1n_3\sigma_z + (l_1m_3 + l_3m_1)\tau_{xy} \\ &\quad + (m_1n_3 + m_3n_1)\tau_{yz} + (l_1n_3 + l_3n_1)\tau_{xz} \end{aligned} \quad (11-c)$$

同理, 如令 BCD 面与 y' 轴正交, 可得此面上的正应力与剪应力分量:

$$\sigma_{y'} = l_2^2\sigma_x + m_2^2\sigma_y + n_2^2\sigma_z + 2l_2m_2\tau_{xy} + 2m_2n_2\tau_{yz} + 2n_2l_2\tau_{xz} \quad (1-11d)$$

$$\begin{aligned}\tau_{y'z'} &= l_2 l_3 \sigma_x + m_2 m_3 \sigma_y + n_2 n_3 \sigma_z + (l_2 m_3 + l_3 m_2) \tau_{xy} \\ &\quad + (m_2 n_3 + m_3 n_2) \tau_{yz} + (l_2 n_3 + l_3 n_2) \tau_{zx} \\ \tau_{y'x'} &= \tau_{x'y'}\end{aligned}\quad (1-11e)$$

如使 BDC 面与 z' 轴正交, 此面上的正应力和剪应力分量为:

$$\sigma_{z'} = l_3^2 \sigma_x + m_3^2 \sigma_y + n_3^2 \sigma_z + 2l_3 m_3 \tau_{xy} + 2m_3 n_3 \tau_{yz} + 2l_3 n_3 \tau_{zx} \quad (1-11f)$$

$$\tau_{z'y'} = \tau_{y'z'} \quad (1-11g)$$

$$\tau_{z'x'} = \tau_{x'z'} \quad (1-11h)$$

上面我们得到了与新坐标轴 x', y', z' 正交的各面上的正应力、 $(\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \sigma_{z'})$ 、剪应力 $(\tau_{x'y'}, \tau_{y'z'}, \tau_{z'x'})$ 与原来坐标系的应力分量 $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ 之间的关系。同时, (1-11) 各式也可以看成当坐标系从 x, y, z , 旋转到新坐标系 x', y', z' 时, 其应力分量之间的转换公式。

由于坐标系均为直角的, 其方向余弦之间有下列关系:

$$\left. \begin{aligned}l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1 \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \\ \dots\dots\dots \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \\ l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= 0 \\ \dots\dots\dots\end{aligned}\right\} \quad (1-12)$$

将 (1-11a), (1-11d), (1-11f) 三式相加, 并考虑到 (1-12) 的关系, 可得:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'} \quad (1-13)$$

(1-13) 式说明, $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ 对于正交坐标系变换, 是个不变量。

2. 主应力

由 (1-11) 各式可以看出, 任何一平面上正应力的值随着它的方位而改变。下面讨论使正应力为极值的方向。

求与 x' 轴正交的平面上的正应力。由 (1-11a) 式:

$$\sigma_{x'} = l_1^2 \sigma_x + m_1^2 \sigma_y + n_1^2 \sigma_z + 2l_1 m_1 \tau_{xy} + 2m_1 n_1 \tau_{yz} + 2n_1 l_1 \tau_{zx}$$

由于 $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$, 此时可以将 l_1, m_1 , 当作自变量而将 $\sigma_{x'}$ 及 n_1 当作 l_1, m_1 的函数。为了使 $\sigma_{x'}$ 得极值, 必须:

$$\frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial l_1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial m_1} = 0$$

对 $\sigma_{x'}$ 进行微分并加以整理, 得到

$$l_1 \sigma_x + m_1 \tau_{xy} + n_1 \tau_{zx} + (l_1 \tau_{zx} + m_1 \tau_{yz} + n_1 \sigma_z) \frac{\partial n_1}{\partial l_1} = 0$$

$$l_1 \tau_{xy} + m_1 \sigma_y + n_1 \tau_{yz} + (l_1 \tau_{zx} + m_1 \tau_{yz} + n_1 \sigma_z) \frac{\partial n_1}{\partial m_1} = 0 \quad (c)$$

对 $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ 取偏导数, 得

$$\left. \begin{aligned} l_1 + n_1 \frac{\partial n_1}{\partial l_1} &= 0 \\ m_1 + n_1 \frac{\partial n_1}{\partial m_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

将(d)式代入(c)式, 得到

$$\begin{aligned} \frac{l_1 \sigma_x + m_1 \tau_{xy} + n_1 \tau_{zx}}{l_1} &= \frac{l_1 \tau_{xy} + m_1 \sigma_y + n_1 \tau_{yz}}{m_1} \\ &= \frac{l_1 \tau_{zx} + m_1 \tau_{yz} + n_1 \sigma_z}{n_1} \end{aligned} \quad (e)$$

但由(b)

$$\bar{X} = l_1 \sigma_x + m_1 \tau_{xy} + n_1 \tau_{zx}$$

$$\bar{Y} = l_1 \tau_{yx} + m_1 \sigma_y + n_1 \tau_{yz}$$

$$\bar{Z} = l_1 \tau_{zx} + m_1 \tau_{zy} + n_1 \sigma_z$$

所以(e)式变为

$$\frac{\bar{X}}{l_1} = \frac{\bar{Y}}{m_1} = \frac{\bar{Z}}{n_1} \quad (1-14)$$

(1-14) 式表明, 当与 x' 正交的平面上正应力 σ_x 为极值时, 它面上的各应力分量的大小与法线的方向余弦成正比, 即应力的合力方向与法线方向相同。换句话说, 在正应力为极值的面上, 剪应力为零。

设正应力的极值为 σ , 则

$$\sigma = \frac{\bar{X}}{l_1} = \frac{\bar{Y}}{m_1} = \frac{\bar{Z}}{n_1}$$

或

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{l_1 \sigma_x + m_1 \tau_{xy} + n_1 \tau_{zx}}{l_1} = \frac{l_1 \tau_{xy} + m_1 \sigma_y + n_1 \tau_{yz}}{m_1} \\ &= \frac{l_1 \tau_{zx} + m_1 \tau_{zy} + n_1 \sigma_z}{n_1} \end{aligned}$$

上式可写为:

$$\left. \begin{aligned} l_1(\sigma_x - \sigma) + m_1 \tau_{xy} + n_1 \tau_{zx} &= 0 \\ l_1 \tau_{xy} + m_1(\sigma_y - \sigma) + n_1 \tau_{yz} &= 0 \\ l_1 \tau_{zx} + m_1 \tau_{zy} + n_1(\sigma_z - \sigma) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

式中 l_1, m_1, n_1 为主应力所在平面的法线与 x, y, z 轴的方向余弦。主应力所在平面称

为主平面。垂直于主平面的坐标轴称为主轴，它的方向余弦 l_1, m_1, n_1 和主应力 σ 可由 (1—15) 式与式 $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ 联立解出。由于 $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ ，所以 l_1, m_1, n_1 不可能同时为零。(1—15) 式为齐次线性方程，其解不全为零的条件是系数行列式为零，即：

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

展开上式，得

$$\begin{aligned} & \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma \\ & - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (1-16)$$

(1—16) 式的三个解即给出主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 。将 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别代入 (1—15) 式，就可以求得三个主平面的方向余弦。

很显然，主应力的大小与坐标系 x, y, z 的选择无关，因此 (1—16) 式中各括号内的数值必须是不随坐标系而变的常量。

四、最大剪应力

设 x, y, z 为主轴， $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是主应力。现在研究某一平面上剪应力随其方向 (可以用其方向余弦 l, m, n 表示) 变化而变化的情况。

在该平面上总应力为：

$$\sigma_n^2 = (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2$$

所以，该平面上的总剪应力为

$$\begin{aligned} \tau_s^2 &= \sigma^2 - \sigma_n^2 \\ &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \end{aligned} \quad (1-17)$$

利用关系式

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

令 l, m 为自变量，则 $n^2 = 1 - (l^2 + m^2)$ ，将此关系代入 (1—17) 式，得

$$\tau_s^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 (1 - l^2 - m^2) - [\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 (1 - l^2 - m^2)]^2 \quad (f)$$

为了求出 τ_s 的极值，取 τ_s 对于 l, m 的偏导数，并使之为零，即

$$\frac{\partial \tau_s}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \tau_s}{\partial m} = 0$$

得：

$$\left. \begin{aligned} l[\sigma_1 - \sigma_3]l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) &= 0 \\ m[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

方程式 (1—18) 的一组解是 $l = m = 0$ 。其它还可以得到几组不为零的解。例如令 $l = 0$ ，由 (1—18) 式的第二式，可得 $m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ ；令 $m = 0$ ，由 (1—18) 式的第一式，可得 $l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ ；当 l, m 都不为零时，方程式 (1—18) 一般没有解，因为这种情况下，(1—18) 式括号内的表达式不可能同时为零。通过计算，可以得到使剪应力为极值的方向余弦如下：

l	0	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
m	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
n	± 1	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

表中前三列所表示的平面就是主应力所在的平面。在这些平面上剪应力为零，即剪应力为极小值。后面三列表示，剪应力为极值的平面经过一个主轴并平分其它两主轴之间的夹角。

把下列方向余弦的值代入 (f) 式，得到三组剪应力的极值为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{s \max}, \min &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \\ \tau_{s \max}, \min &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \\ \tau_{s \max}, \min &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1) \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

(1—19) 式表明，最大（最小）剪应力作用在平分极大极小主应力平面之间夹角的平面上，并等于这两个主应力之差值的一半。

§ 1—3 应变分析

一、几何方程（位移和应变的关系）

在弹性体发生应变时，在破坏之前，这些应变应该是连续的。即两个不同的点在变形之后不能挤到一个点，也不应形成空隙。总之，物体每个元素和其相邻元素的应变必须是协调的。

考虑一个弹性体内相邻的四个点 O, A, B, C (图1—7)。假设此弹性体受到外界约束，不可能有刚体位移。设 OA, OB, OC 的初始位置分别与 x, y, z 轴平行，未变形前 O 点的坐标为 (x, y, z) ， A, B, C 的坐标分别为 $(x+dx, y, z), (x, y+dy, z)$ 及 $(x, y, z+dz)$ 。变形后，各点的位置将分别移动到 O', A', B', C' 。 O 点的位移为 u, v, w 。 A, B, C 点的位移可利用台劳级数在 O 点展开求得。例如， A 点的位移

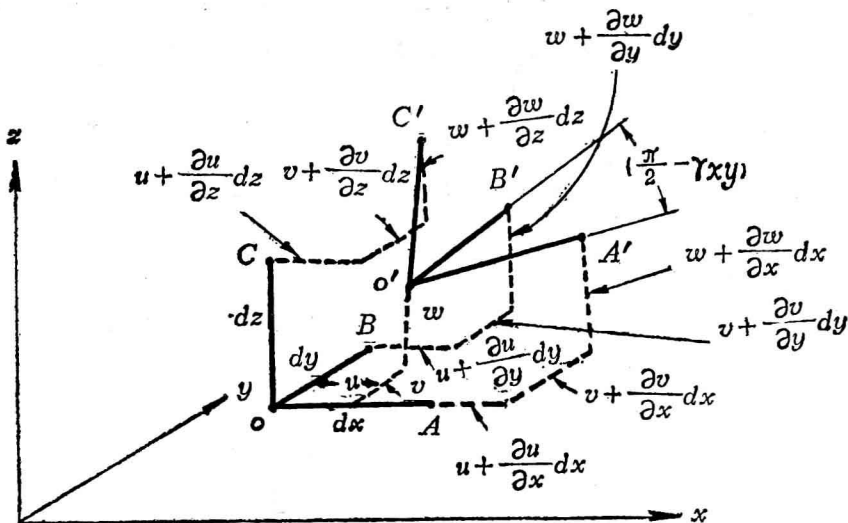


图 1—7

为 $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$, $w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$ (略去了高阶微量)。其它点的位移如图1—7所示。

由图上可以看出, O点附近各点产生两类移动:(1) 各点之间的距离发生变化;(2) OA, OB, OC 之间的角度发生变化, 因而它们之间不再互相垂直。当物体内部各点的相对位置发生变化时, 称之为处于应变状态。同长度变化相对应的应变称为正应变 (或单位伸长), 同角度变化相对应的应变称为剪应变。正应变可定义为单位长度的线段所发生的长度变化, 即

$$\varepsilon_n = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{L}$$

式中 L 为线段原长, ΔL 为变形后线段长度的变化量。

现在研究 OA 线段 (见图1—7) 在 x 方向的正应变。

$$O'A' = L + \Delta L = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2}$$

它在 x 方向的应变

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\Delta L}{L} = \frac{dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - dx}{dx} \\ &= \left[1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1 \end{aligned}$$

将上式展开, 略去高阶微量, 可得

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] \quad (1-20a)$$

同样, 得

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (1-20b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1-20c)$$

在小应变的情况下, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ $\frac{\partial w}{\partial z}$ 等都是微量, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ $\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2$ 等为高阶微量, 可以略去。(1-20) 式成为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

在物体內一点的剪应变可定义为: 原来成直角的两线段在变形后其间角度所发生的变化^①。在图1—7中, OA , OB , OC 原来互相垂直, 变形后已不再互相垂直, 例如:

$$\cos A'O'B' = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \right) = \sin \gamma_{xy}$$

此处 γ_{xy} 为对应于 x , y 轴的剪应变。当 γ_{xy} 很小时,

$$\sin \gamma_{xy} = \gamma_{xy}$$

由解析几何中的关系

$$\cos A'O'B' = \gamma_{xy} = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 \quad (a)$$

式中 l_1 , l_2 , m_1 , m_2 , n_1 , n_2 等为 $O'A'$ 和 $O'B'$ 的方向余弦。由图 (1—7) 可看出

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx}{O'A'}, & m_1 &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{O'A'}, & n_1 &= \frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx}{O'A'} \\ l_2 &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{O'B'}, & m_2 &= \frac{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy}{O'B'}, & n_2 &= \frac{\frac{\partial w}{\partial y} dy}{O'B'} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将(b)式中 l_1 , m_1 , n_1 , l_2 , m_2 , n_2 等的表达式代入(a)式, 得

$$\gamma_{xy} = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \frac{dxdy}{(O'A')(O'B')} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \text{但 } O'A' &= \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2} \\ &= dx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} \end{aligned}$$

① 在一些文献中将角度变化的 $\frac{1}{2}$ 作为剪应变

$$O'B' = dy \sqrt{1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}$$

因 u, v, w 的导数与 1 相比是微量，故这些导数和它们的平方都可以略去，得

$$O'A' \approx dx$$

$$O'B' \approx dy$$

我们由 (c) 式，得到

类似地

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

(1-20) 和 (1-22) 式为大位移 (或有限应变) 时位移—应变方程。很明显，它们都是非线性的。如应用它们解弹性力学问题，在数学上将是很复杂的。

在大多数情况下， $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z}$ 等导数都是微量，它们的相互乘积可以略去。

这就得到小在应变情况下线性化了的位移——应变方程，即

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

二、应变的变换方程和主应变

上面求得了对应于坐标系的位移—应变方程。下面将证明上述的六个应变分量将完全地确定弹性体内任一点 O 的应变状态。所以，如我们通过 O 点取另外的任一坐标系 x', y', z' ，就可以用对应于 x, y, z 的应变分量来表达对应于 x', y', z' 的应变分量。现在，只研究小应变的情况，即只用 (1-23) 式。

设两组坐标轴之间的方向余弦如下表：

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

测坐标系之间有下列变换关系：