

Math through the Ages:
A Gentle History for Teachers and Others

2007年美國數學協會
貝肯巴赫讀物獎
最受歡迎十大好書首選

溫柔數學史

從古埃及到超級電腦

比爾·柏林霍夫／佛南度·辜維亞 著
(William P. Berlinghoff) (Fernando Q. Gouvêa)

洪萬生、英家銘暨HPM團隊 譯



國立台灣師範大學數學系 洪萬生 教授推薦翻譯

網路書店五顆星書評

Math through the Ages:
A Gentle History for Teachers and Others

溫柔數學史

從古埃及到超級電腦

比爾·柏林霍夫 (William P. Berlinghoff) 著
佛南度·辜維亞 (Fernando Q. Gouvêa)
洪萬生、英家銘暨 HPM 團隊 譯

First Published in United States by Oxtan House Publishers and the Mathematical Association of America under the title Math through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others, Expanded Edition.

© 2004 by William P. Berlinghoff and Fernando Q. Gouvêa

Complex Chinese translation rights © 2008 by Goodness Publishing House.

萬象考 RE03

溫柔數學史：從古埃及到超級電腦

作 者 比爾·柏林霍夫 (William P. Berlinghoff)

佛南度·辜維亞 (Fernando Q. Gouvêa)

譯 者 洪萬生、英家銘暨 HPM 團隊

發行人 楊榮川

總編輯 龐君豪

主 編 黃秋萍

責任編輯 蔡曉雯

封面設計 郭佳慈

出版者 博雅書屋有限公司

地 址 106台北市大安區和平東路二段339號4樓

電 話 (02)2705-5066

傳 真 (02)2706-6100

劃撥帳號 01068953

戶 名 五南圖書出版股份有限公司

網 址 <http://www.wunan.com.tw>

電子郵件 wunan@wunan.com.tw

法律顧問 元貞聯合法律事務所 張澤平律師

出版日期 2008年5月初版一刷

定 價 新臺幣 330 元

※版權所有·欲利用本書全部或部分內容·必須徵求本公司同意※

國家圖書館出版品預行編目資料

溫柔數學史：從古埃及到超級電腦 / 比爾·柏林霍夫 (William P. Berlinghoff), 佛南度·辜維亞 (Fernando Q. Gouvêa) 著; 洪萬生、英家銘暨 HPM 團隊譯. — 初版.

— 臺北市：博雅書屋，2008.05

面：公分

參考書目：面

譯自：Math through the ages: a gentle history for teachers and others

ISBN 978-986-6614-00-2 (平裝)

1. 數學 2. 歷史

310.9

97006674

序

本書緣起於大約兩年前我們在科比學院（Colby College）數學系走廊的幾個隨興的交談，但是，它的根源卻更深更早。很多年來，一直都對數學史深感興趣，一方面基於數學史本身，另一方面，則是希望藉助它來對更廣泛的閱聽人，教授數學概念。我們兩人之一曾將數學史納為大學通識階段大學生的數學課程之主要內容，同時，他對 NCTM 標準化的中學數學系列的重要貢獻之一，也是將數學史融入其中。至於另一位呢，則在此一領域中完成了相當多的背景研究，也曾參與 MAA 的研究計畫 *Institute for the History of Mathematics and its use in Teaching*，並且曾在科比學院教授一門數學史課程。我們都相信：通曉一個數學概念或技巧的歷史，可以促成這一概念或技巧本身的更深層、更豐富理解。

可惜，大部分數學史著作之宏偉，都令人敬而遠之，這對於教師或其他對於數學史有興趣卻無暇探索的人來說，都是不幸的。如果你在準備教二次方程或負數、或者你只是對於 π 、度量衡和 0 的歷史好奇時，你需要一些歷史背景，那麼，你將從何處尋找呢？大部分數學史書的索引，總是引導你去參考互不相干的零散內容，要求你自己將它們拼湊在一起，成為一個前後連貫的結構。至於在網際網路上進行專題搜尋，則極易被資訊所淹沒，有的可靠，有的似是而非，很少明確告知什麼是什麼。

因此，我們決定寫一本書滿足你的需求。本書主要部分，是二十五則有關基礎數學的某些普通概念的歷史素描。這些素描利用例證說明了一個概念、過程、或主題的起源，往往連結了似乎相異但卻擁有共同歷史根源的事物。在這二十五則之前，我們安排了一個從古到今數學史萬花筒，為塑造今日數學的重要人物與事件，提供了一

個敘事的架構，從而為這些分散但自足的素描，佈置了一個統合的脈絡。當然，這些素描單元的選擇難免主觀；其標準部分基於我們自己的興趣，部分則是由於我們認為這些可能引發教師與學生的興趣。

我們已經盡可能精確地反映今日被熟悉的歷史事實。然而，歷史畢竟不是嚴正科學（**exact science**），而且不完備或相互衝突的來源，在學者之間，經常導致他們針對事實有無法相容的判斷。有些有關人物與事件的故事已經演化多年，形成一種極少文獻證據支撐的「傳說」。儘管這些對於歷史學者不無困擾，然而，很多這類故事卻深具價值，它們就像每一個文化中的傳說一樣，發揮了寓言的啟發作用，或者勾起記憶的「引子」，以幫助你或你的學生記住某一個數學概念。與其完全忽視這些軼事而喪失其價值，我們不如精選最有趣的幾則納入本書相關題材，連同適當的提醒以避免過於表面的對待。

為了幫助你追溯你感興趣的單元之進一步資訊，本書「延伸閱讀」（**What to Read Next**）這一節提供了一個有註解的書單。它包括了參考著作的一些指標，不過，其初衷則是一張簡短的「必讀」（**ought-to-read**）書目，我們認為數學史的愛好者應該都樂意分享。

至於有關本書使用記號的註記：近幾年來，一些數學史著作都使用 **B.C.E**（"**before the common era**" 公共紀元以前）和 **C.E.**（"**the common era**" 公共紀元），以分別取代比較傳統的 **B.C.** 和 **A.D.**。這究竟是一種歷史文獻的未來記號呢，還是一時的「政治正確」之時尚，當然跟我們所諮詢的史家有關。在不偏好任何立場的前提下，我們已經選擇了自認為本書潛在讀者更為熟悉的記號。

謝辭

很多遠近同仁的分享他們的知識，並回應我們有時頗為古怪問題的寬容，我們獲益良多。特別地，我們感謝佛蒙特州的數學教育顧問 Sharon Fadden、麻薩諸賽州 Lynnfield 中學的 Jim Kearns，以及緬因州的 Oxford Hills 綜合中學的 Bryn Morgan，他（她）們協助閱讀

並評論本書的早期版本。我還要特別感謝下列四位：Georgia Tobin 為本書創造了埃及與巴比倫數碼的 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 符號、Michael Vulis 將這轉換成 PostScript 規格、南肯德基州立大學的 Robert Washburn 提供了素描 6 的部分材料，Eleanor Robson 慷慨地允許我們使用她所畫的古巴比倫圖表中的一張（見本書第 74 頁）。

我們之中一人有機會利用兩個暑假參與 MAA 的 *Institute for the History of Mathematics and its use in Teaching* (IHMT)，對此我們深為感激。IHMT 協助參與者將數學史的終身興趣，轉換成為容易建立的知識之堅實基礎。為此，我們要對 IHMT 的籌劃者 Fred Ricky，Victor Katz，和 Steven Schot，以及贊助機構 MAA（美國數學協會），乃至於 IHMT 的所有同仁，表示特別的謝忱，他們是有趣的、多樣的、充滿知識的，以及有裨益的一群人。其中很多人在本書撰寫時回答我們的問題、提供有用的建議，我們更是感激不盡。

我們大大地受惠於很多數學史家，撰寫本書時，曾大量閱讀與使用他們的著述。要不是我們曾企圖站上這些巨人的肩膀，大概不可能完成此一工作。我們試著在散佈本書各處的參考文獻註解，與「延伸閱讀」那一節中，向讀者指引他們的研究成果。

我們也想針對回答我們的問題者，感謝 Don Albers、Martin Davis、David Fowler、Julio Gonzalez Cabillon、Victor Hill、Heinz Luneburg、Kim Plofke、Eleanor Robson、Gary Stoudt、Rebekka Struik，以及 *Historia Mathematica* 群成員。當然，我們自負文責。

本擴充版說明

當本書出版（或原版）問世時，有一些想要在課堂上使用本書的教師，詢問我們哪一類的問題可以提給學生撰寫報告。為此，並有來自 MAA（本書原出版單位）的鼓勵，我們增列了「習題與專題」（Questions and Projects）。這個擴編版適合了課程的相當大幅的內容分佈，包括有很多設計用以訓練未來的中小學教師，或者是在職教師

專業發展課程的部分內容。

本書潛在讀者的數學背景之各種可能，當然引出了為他們而設計的問題之種類與層次的多樣性。在每一單元素描之後，我們都安排了「習題與專題」（譯按：在本中譯本中，我們將它們移到 PART 5〈思考與討論〉）。這兩者只是大約區別一下，不過，「習題」傾向於比較直接了當，儘管還是有一些較不尋常，還有一些需要一點研究。相對之下，「專題」則包括經過審慎規劃的開放性的問題，因此，經常需要研究與獨立思考兩種能力。至於「數學簡史」這一節之後，則有「大圖像」專題（"big-picture" Projects），它們對於本書相關內容之任何一點，應該都相當有用才是。

基於下列不同的讀者目標，我們已經建構了每個單元（含一開始的〈數學簡史〉）後面的習題與專題：

- 為了在素描中學習更多的數學概念；
- 以歷史方式做或表達數學；
- 為了學習更多各有關單元的數學史；
- 希望看到數學史如何以及在何處可以適合更寬廣的歷史觀點。

比較之下，上述某些目標當然與某些素描更加相襯，因此，並非所有目標都得以在每一組「習題與專題」中呈現。然而，在每一組中至少有一個問題說到上述最後一個目標。至於熟練所需層次，則因地制宜，以致於讀者無論背景如何，都可以找到接近的某些內容，並且——我們希望——都有興趣去做。在「習題與專題」中，我們所引述的原始文本（original texts）都原封未動，除了訂正初版或原版的錯誤或不當的內容。

另一方面，針對本書，一部相當完整的《教師手卷》（*Instructor's Guide*）也已經由 MAA 出版了。它包括了本書問題之解答、對大部分「專題」的背景之討論，以及進一步研究的參考資料。

有很多人對於本擴張版貢獻良多。我們特別感謝 Otto Bretscher（科比學院數學系）、Zaven Karian（MAA 的 CRM 編輯委員）、Sarah Maline（緬因州立大學 Farmington 分校，藝術史系）、Farley

Mawyer（紐約城市大學約克學院，數學與電算機科學系）、Daisy McCoy（Lyndon 州立學院，數學系）、Steve Pane（緬因州立大學 Farmington 分校，音樂系）、Peter Rice（科比學院，學生），以及 David Scribner（緬因州立大學 Farmington 分校，數學系）等人的協助。當然，我們也必須感謝我們兩人的妻子，Phyllis Fischer 與 Marie Gouvea，在整個計畫中，她們提供了有用的忠告、建設性的批評，以及耐心的支持。

對於 MAA 將本書納入「教室資源材料」叢書之一，我們十分高興，同時，也特別感謝 MAA 同仁 Don Albers 與 Elaine Pedreira 的鼓勵與幫贊。我們也謝謝 MAA 與 Oxton House 出版社的幫忙，使得本書可更廣泛地被參考、可愉悅地觀看，並且容易閱讀與使用。

目次

序

PART 1 數學教室中的數學史 1

PART 2 數學簡史 7

開端 9

希臘數學 18

同一時期的印度 29

阿拉伯的數學 34

中世紀的歐洲 38

十五與十六世紀 41

代數成年禮 43

微積分與應用數學 50

嚴密性與專業性 56

抽象、電腦與新的應用 62

今日的數學 68

PART 3 素描 71

1 算下去——寫出所有的整數 72

2 算術的讀與寫——符號的由來 80

3 「沒有」變成一個數——零的故事 85

4 將數劈開來——分數 90

5 某物小於空無？——負數 97

6 十倍和十分之一——公制測量單位 103

7 圓的測量—— π 的故事 108

- 8 解未知物之術——以符號寫出代數式 113
- 9 線性思考——解一次方程式 121
- 10 一個平方與多物——二次方程式 126
- 11 文藝復興義大利的傳奇——尋找三次方程式之解 130
- 12 可喜可賀之事——畢氏定理 135
- 13 令人驚歎的證明——費馬最後定理 142
- 14 美麗境界——歐幾里得平面幾何 149
- 15 美哉！柏拉圖立體 156
- 16 以數御形——座標幾何 161
- 17 不真、虛幻、但有用——複數 167
- 18 一半比較好——正弦與餘弦 174
- 19 奇妙新世界——非歐幾何 180
- 20 慧眼旁觀——射影幾何學 187
- 21 遊戲乾坤——機率論的開端 192
- 22 理解數據——統計成為一門科學 198
- 23 機器會思考？——電子計算機 206
- 24 推理的計算法則——邏輯與布爾代數 214
- 24 數不勝數——無限與集合論 219

PART 4 延伸閱讀 227

參考書架 228

十五本必讀之數學史著作 232

網際網路和其他媒介 235

PART 5 思考與討論 239

參考文獻 298

譯名對照 306

PART 1

數學教室中的數學史

數學從何而來？算術永遠都像你在學校中所學的方式運作嗎？它可能以其他方式運作嗎？是哪些人想到代數的那些法則呢，同時，基於什麼原因呢？而有關幾何的事實與證明又如何呢？

數學就像文學、物理學、藝術、經濟學或音樂，是人類不斷成長的努力成果。它擁有過去與未來，當然也擁有現在。我們今日所學習與使用的數學，在很多方面，迥異於一千年前、或五百年前，甚至於一百年前的數學。無疑地，二十一世紀的數學也將演化成為一種不同於二十世紀的東西。學習數學是什麼玩意兒，就像去瞭解另一個人。你越瞭解某人的過去，你就越能瞭解他或她的現在與未來，並且與之互動。

要想在任何層次上學好數學，你需要先理解相關問題，以便可以將解答賦予意義。而要理解一個問題，通常依賴通曉某個概念的歷史。這個概念從何而來？為何它現在或過去顯得重要？誰曾經想要這一解答以及為什麼？數學發展的每一階段，都建立在先前的成果上。每一位該發展的貢獻者，都曾經或現在是一個有著過去和某種觀點的人。針對他們的成果，他們如何反思以及為何如此思考，經常是我們理解他們的貢獻的一個關鍵性成分。

要想在任何層次上教好數學，你需要協助學生看到底蘊的問題所在，以及將細節組織在一起的思維類型。對於這樣的問題與類型之注意，可以說是學校數學——特別是那些基於 NCTM 標準所設計——最佳課程的商標。大部分學生，尤其是初年級，自然都對事物無從何而來感到好奇。由於你的協助，那種好奇可以引導他們對於他們必須知道的數學過程賦予意義。

這麼說來，在數學教室中使用數學史的好方法，究竟是什麼呢？湧上心頭的第一個答案，或許就是「說故事」——歷史軼事，或更一般地，傳記資訊。這裡，有一個典型的場景。每當引進如何將一個等差數列（arithmetic progression）求和時，教師通常告訴學生一個有關高斯的故事：

當他十歲時（有些版本說成七歲），高斯的老師給他的班級出了一道很長的題目，顯然意在求個安靜，讓自己輕鬆一下。這個題目是要求將 1 到 100 的數加起來。全班學生開始埋頭在他們各自的線條板上計算時，高斯卻只是在他的線條板上寫上 5050，並且說：「這就是答案！」驚奇萬分的老師認為高斯只是猜對了，由於他自己也不知道答案，就要求高斯保持安靜，等班上其他學生計算好了，再看看誰的答案正確。出乎意料之外，其他學生的答案也是 5050，證明了小高斯的答案果然正確。他究竟怎麼做的？

說這樣的故事的確有一些用處。畢竟，這是一個有趣的故事，其中有一位學生成了英雄人物，機智更勝於他的老師。這個故事本身將讓學生深感興趣，而且他們或許會記住。由於牢記在他們的記憶中，這個故事有如一個掛鉤，可以在上面掛一個數學概念—在本例中，這是指算術數列的求和方法。就像大部分傳記的評論一樣，這個故事也提醒學生，有真實的人物在他們所學習的數學背後，同時，某人也必須發現這一公式，並掌握這一概念。最後，特別是當故事照上述方式來說時，這個故事可以引導班級學生自己發現公式。（畢竟，如果一個十歲小孩可以做得到……）。

然而，這個例子也引發了一些問題。那個故事出現在很多不同的文獻上，而且有好幾個不同版本。所求總和經常是另一個更複雜的算術數列。至於老師的愚蠢，有時還被他對高斯的態度之過當反應所強化。這些變貌都引起了這則故事的真實性之質疑。它真的發生了嗎？我們如何得知？它有意義嗎？

在某種程度上，它是否真實之意義不大，但是，教師可能會對告知學生一個可能沒那麼真實的故事耿耿於懷。在我們的例子中，某些問題其實並不是那麼難以搞定。這個故事，是由高斯本人老年時告訴他的朋友，因此，沒有特別理由懷疑它的真實性，儘管不無可能加油添醋，就像很多老人喜歡吹噓當年勇一樣。最原始版本似乎提到一個

涉及很大數目且為非特定的算術數列，但是，整體來說，上述版本好像也沒有那麼離譜。不幸地，要確定一個軼事是否為真，並非易事。所以，當教師使用一個軼事時，最好向學生口頭上提一下說他們所聽到的故事，並不必然是嚴謹的史實。

不過，使用歷史或傳記軼事的主要限制，經常由於它們只是略微連結到數學而已。本書雖然包括一些這樣的故事，¹但是，我們希望導向在課堂上使用歷史的一些其他方法，更緊密地將數學與歷史交織在一起。

其中之一，就是使用歷史以提供寬廣的俯瞰視野（**broad overview**）。對於學生而言，學校數學的經驗莫過於一些毫不相關的片段資訊之隨機組合。可是，這並不是數學被實際創造的真相。人們為了某理由做事，而且通常以一種浩大的跨世代的合作，在前人的基礎上建立結構。歷史資訊往往可以容許我們與學生分享這一個「大圖像」。同時，這種資訊也可用以說明為何某些概念被發展出來。例如，有關複數的素描 17，就說明了何以數學家會被引導去發明讓學生起初覺得奇怪的新種類之數。

大部分數學家研究種種的問題，而且，關鍵的洞識往往來自不同學科的跨界與連結。這個「大圖像」的部分，正指向下列事實：數學不同部分的諸多連結的確存在。關注歷史是察覺這些連結的一種方法，而在課堂上使用歷史，當然也可以協助學生察覺。

歷史在對於知識內容加上脈絡時，對於學習也頗有幫助。畢竟數學是文化的產物。它是在特別的時間與地點由人們所創造，因此，經常被那個脈絡所影響。有關這一方面，一旦知道得更多一點，一定可以幫助我們理解數學如何與其他人類活動調和一致。譬如說吧，在人類歷史上，數目一開始被發展而幫助政府藉以追蹤食物生產之數據，這一個想法或許無助於我們學習算術，但是，它卻將算術從一開始即嵌入一個有意義的脈絡中。這個想法也可以提醒我們思考數學在政府

¹ 有很多這一類故事的來源，可以參考本書最後〈延伸閱讀〉一節。

治理中所扮演的角色。收集統計數據，就是今天政府仍然繼續在做的事。

對於我們以及我們的學生而言，知道一個概念的歷史，可以導向更深層的理解（*deeper understanding*）。譬如說吧，考慮負數的歷史（請參考素描 5）。在有關負數的基本概念被發現之後很長一段時間，數學家一直覺得它們很難搞定。問題不在於他們無法瞭解操作這些數目的形式規則，而是他們覺得這個概念本身窒礙難行，並且也不知道如何按有意義的方式加以詮釋。理解了這件事，就有助於我們理解並且同情學生可能面對的困難。知道這些困難在歷史上如何被克服，也可以在協助學生克服這些路障的同時，為我們指出一條路來。

歷史也是學生活動（*student activities*）的一個很好的來源。它可以簡單到要學生去研究一位數學家的生平故事，也可以精緻到像一個專題，探索地引導學生重建一個導致數學突破的歷史路徑。有時，它可以激發（高年級）學生研讀原典之企圖心。經由學生的積極參與，上述所有這些方法，都可以提升他們的數學成就感（*ownership of the mathematics*）。

在本書中，我們已經試著提供所有這些使用歷史的方法之相關材料。下一個部分〈數學簡史〉則提供了數學從遠古到二十一世紀的數學史的簡明俯瞰，並且為本書提及之個別事件，建立了一個年表的、地理的架構。緊接著的二十五個素描，則為我們所涵蓋的每一個單元，打開了數學與歷史脈絡兼顧的更深一層理解。最後，〈延伸閱讀〉部分以及散佈本書各處的參考文獻備註，提議了一個更龐大的資料來源，讓你及你的學生針對任何你們感興趣的理念、人物或事件，可藉以追溯更進一步資料。

當然，歷史如何在數學教室中扮演角色，我們還可以多說一些。事實上，這是一個由國際數學教育委員會（ICMI）所贊助的研究主題。本研究主題之成果已經出版（參考 [55]）。它不易閱讀，但卻包括了很多有趣的理念與資料。同樣有用的資料，也可參考 [134]、[24] 和 [81]，都是由 MAA 所出版。這些資料都混合了數學史論文，以及

歷史在 K-12 乃至學院的數學教學之使用的相關論文。

在美國數學教師協會（NCTM）所出版的期刊《數學教師》（*Mathematics Teacher*）中，經常出現一些歷史論文，其中包括了歷史如何可以使用在教室中的一些理念。在這些路數上，還有其他很多計畫，其中一個努力的成果，是由卡茲（Victor Katz）和米開羅薇姿（Karen Dee Michalowicz）所領軍的團隊，他們已經生產一系列基於歷史主題的教室模組（historical module），即將由 MAA 出版，可能以 CD-ROM 形式問世。²

² 譯按：本 CD-ROM 已經出版，名稱為 Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics.

PART 2

數學簡史