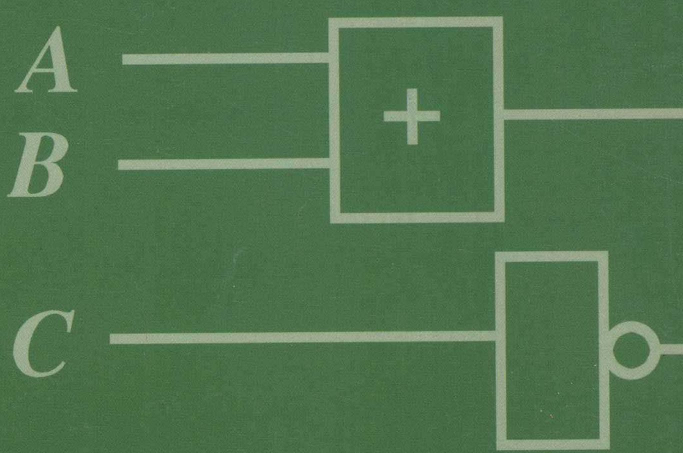
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

数学

普通高中课程标准实验教科书

选修 4-10

开关电路与布尔代数



凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE
凤凰国标教材

经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

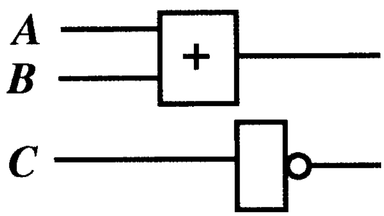
数学

开关电路与布尔代数

kaiguandianlu yu buerdaishu

选修 4-10

主　编：单　墫
副主编：李善良　陈永高　王巧林



凤凰出版传媒集团
凤凰国标教材
江蘇教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

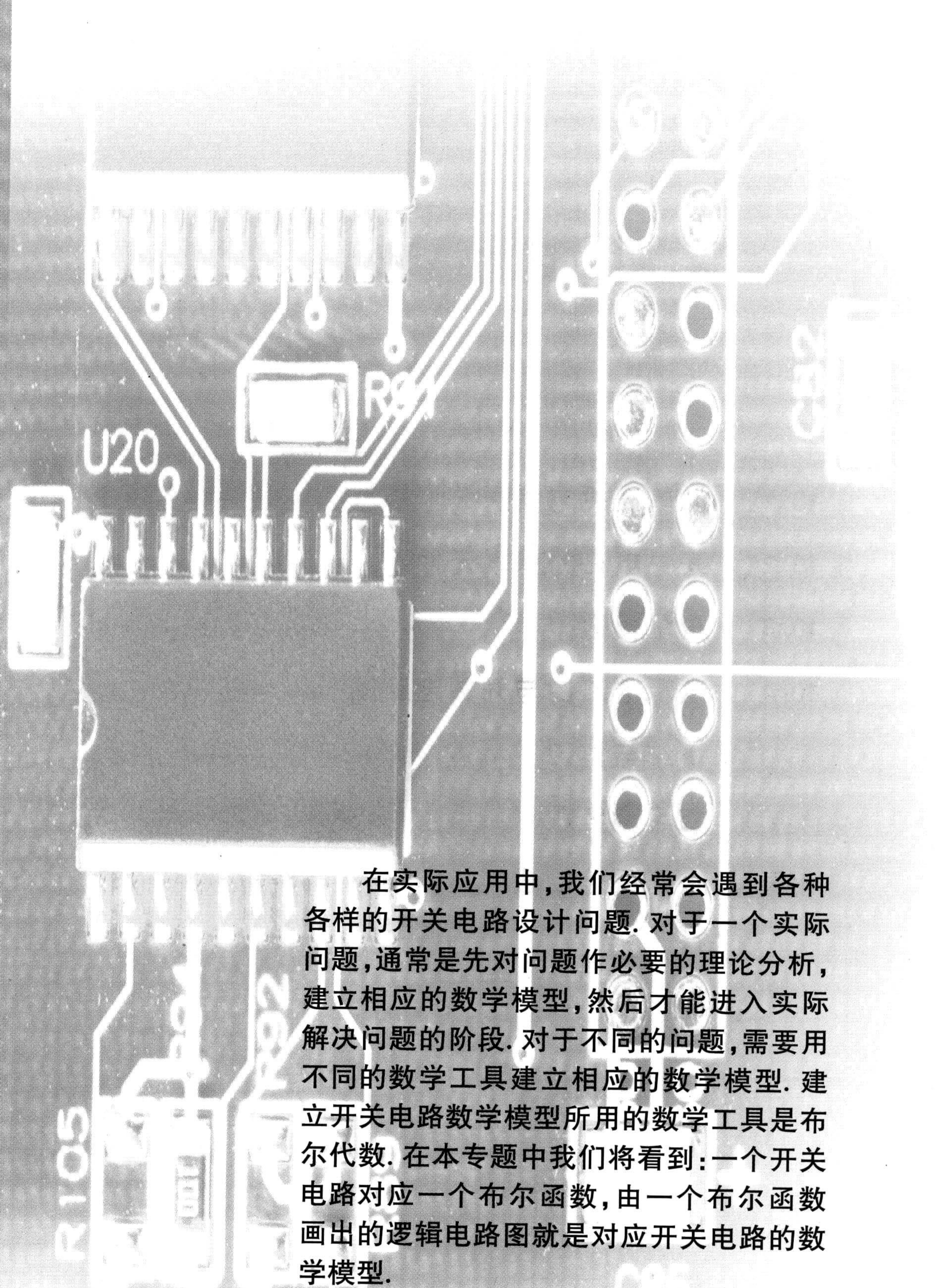
普通高中课程标准实验教科书·数学
书　　名　开关电路与布尔代数(选修4－10)
责任编辑　蔡　立
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社(南京市马家街31号210009)
网　　址　http://www.1088 com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京新华丰制版有限公司
印　　刷　盐城印刷总厂有限责任公司
厂　　址　盐城市纯化路29号(邮编224001)
电　　话　0515－8153008
开　　本　1000×1400毫米　1/32
印　　张　2 75
版　　次　2004年12月第1版
　　　　　2006年6月第3次印刷
书　　号　ISBN 7－5343－6224－5/G·5919
定　　价　3.33元
盗版举报　025－83204538

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

编写人员　许道云　丁德成

参与设计　仇炳生　陶兆龙　李善良



在实际应用中，我们经常会遇到各种各样的开关电路设计问题. 对于一个实际问题，通常是先对问题作必要的理论分析，建立相应的数学模型，然后才能进入实际解决问题的阶段. 对于不同的问题，需要用不同的数学工具建立相应的数学模型. 建立开关电路数学模型所用的数学工具是布尔代数. 在本专题中我们将看到：一个开关电路对应一个布尔函数，由一个布尔函数画出的逻辑电路图就是对应开关电路的数学模型.

目　录

10.1 简单开关电路的数学模型

在开关电路设计中，可以根据实际问题的需要设计不同的电路. 对于给定的实际问题，首先要建立相应的数学模型，根据数学模型再组装所需的开关电路.

有一个教室，其结构图如图 10-1-1，现在想在教室的门 A、门 B 和讲台 C 处安装三个开关，以方便学生从两个门进出时控制教室内电灯的“亮”和“熄”，同时也使老师随时可以在讲台上控制教室内电灯的“亮”和“熄”. 换句话说，三个地方安装的电路开关可以独立地控制教室内的电灯. 当电灯处于“亮”的状态时，任何一个开关状态的改变都可以使电灯“熄”；同样，当电灯处于“熄”的状态时，任何一个开关状态的改变都可以使电灯“亮”.

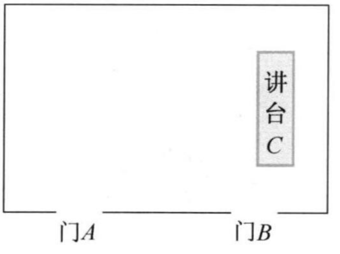


图 10-1-1

如何设计满足上述要求的电路，将三个开关装配在电路中？

为了解决上述问题，我们首先从两个开关的并联和串联开始分析.

10.1.1 开关串、并联电路的数学模型

1. 状态的 0/1 表示

在日常生产生活中，很多事物的变化只表现为两种状态. 如一件事的“对”和“错”、“真”和“假”，一个电路开关的“合上”和“断开”，一盏电灯的“亮”和“熄”等.

我们可以形式上用 0，1 两个符号分别表示两种不同状态. 习惯上，我们通常用 0 表示“错”、“假”、“关”、“断开”、“熄”，用 1 表示“对”、“真”、“开”、“合上”、“亮”等. 0 和 1 在这里只是一种符号，它们之间没有数的大小关系. 借助于 0/1 表示，就可以建立两个开关串联和并联电路的数学模型.

2. 开关串联电路的数学模型

通常使用的电路开关(如电灯开关、计算机开关等)都具有两种状态，一种是合上，另一种是断开. 电灯的亮与熄也是两种状态. 如果用一个开关控制一盏电灯，则可以用图 10－1－2 所示的电路图表示.

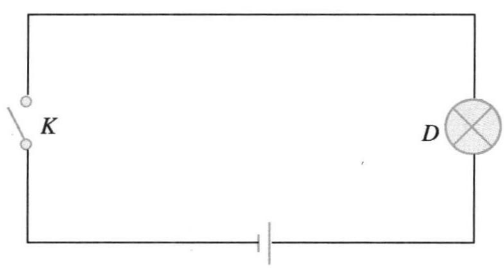


图 10－1－2

开关 K“合上”，电灯 D“亮”；开关 K“断开”，电灯 D 则“熄”. 这表明电灯的状态依赖于开关的状态. 开关与电灯之间的依赖关系如表 10－1－1.

表 10-1-1

开关 K 所处状态	电灯 D 所处状态
断　开	熄
合　上	亮

现在用"1"表示开关"合上"和电灯"亮",用"0"表示开关"断开"和电灯"熄",则表 10-1-1 变换成表 10-1-2.

表 10-1-2

K	D
0	0
1	1

我们将图 10-1-2 中的电路作如下改造:在电路中引入两个开关 K_1 和 K_2,将开关 K_1 和 K_2 串联,则电路图如图 10-1-3 所示.

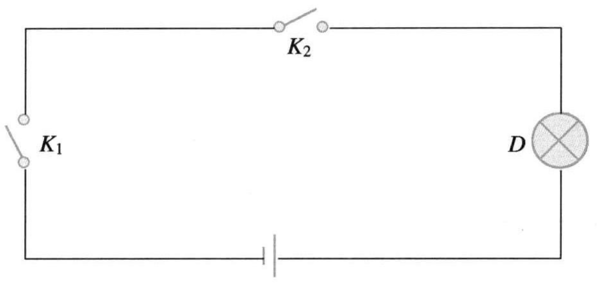


图 10-1-3

这样,开关 K_1, K_2 和电灯 D 之间状态的依赖关系如表 10-1-3.

表 10-1-3

开关 K_1 所处状态	开关 K_2 所处状态	电灯 D 所处状态
断　开	断　开	熄
断　开	合　上	熄
合　上	断　开	熄
合　上	合　上	亮

可以看出，电灯处于“亮”状态时，当且仅当开关 K_1 和 K_2 同时“合上”. 这正好反映了串联电路的特征.

如果用“1”表示开关“合上”和电灯“亮”，用“0”表示开关“断开”和电灯“熄”，则表 10－1－3 变换为表 10－1－4. 表 10－1－4 就是两个开关串联电路的数学模型.

表 10－1－4

K_1	K_2	D
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. 开关并联电路的数学模型

类似地，我们将图 10－1－2 中的电路作如下改造：在电路中引入两个开关 K_1 和 K_2，将开关 K_1 和 K_2 并联，电路图如图 10－1－4 所示.

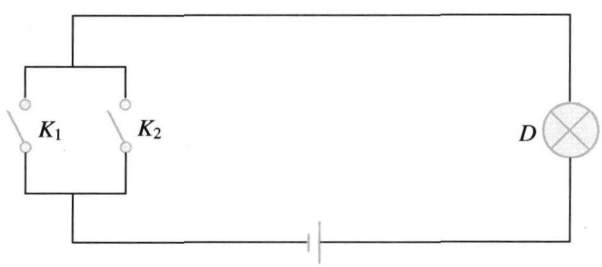


图 10－1－4

这样，开关 K_1，K_2 和电灯 D 之间状态的依赖关系如表 10－1－5.

表 10－1－5

开关 K_1 所处状态	开关 K_2 所处状态	电灯 D 所处状态
断　开	断　开	熄
断　开	合　上	亮
合　上	断　开	亮
合　上	合　上	亮

可以看出，电灯处于“亮”状态时，当且仅当开关 K_1 或 K_2 之一“合上”(或者说，电灯处于“熄”的状态时，当且仅当开关 K_1 和 K_2 同时“断开”). 这正好反映了并联电路的特征.

如果用“1”表示开关“合上”和电灯“亮”，用“0”表示开关“断开”和电灯“熄”，则表 10－1－5 变换为表 10－1－6. 表 10－1－6 就是两个开关并联电路的数学模型.

表 10－1－6

K_1	K_2	D
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

从开关串联和并联电路的数学模型建立过程可以看出，当两个开关组合在一起时，首先要列出两个开关的所有状态组合(一共有 4 种组合)，然后分析在每一种开关状态组合下，电灯处于什么样的状态，这样才能保证设计的正确性.

由于考虑了每一种可能的开关状态组合，这就相当于对每一种开关组合都进行了一次测试，表格最后一列给出的每一种开关组合下电灯的状态就相当于“测试值”.

探　究

n 个开关组合在一起时有多少种不同的组合方式?

10.1.2 三个开关控制电灯的数学模型

对于在本节一开始提出的问题，假定在教室内的三个不同地方分别安装开关 K_1，K_2 和 K_3(门 A 处安装开关 K_1，门 B 处安装开关 K_2，讲台 C 处安装开关 K_3)，并假定教室内只有一盏电灯(如果有多盏电灯，那就假定教室内电灯同时“亮”或同时“熄”).

开关 K_1，K_2 和 K_3 中任何一个开关状态的改变，都可以改变灯的状态. 例如，如果当前开关 K_1，K_2 处于“合上”状态，开关 K_3 处于“断开”状态，而且电灯处于“亮”的状态，那么选择下列操作之一都可以将教室内的电灯关闭：

① 开关 K_1 从“合上”改变到“断开”；

② 开关 K_2 从“合上”改变到“断开”；

③ 开关 K_3 从“断开”改变到“合上”.

根据问题中的设计要求，下面开始建立问题的数学模型.

首先选择一个初始状态作参照，以便分析开关状态改变时电灯状态改变的规律.

假定开关 K_1，K_2，K_3 的初始状态为“断开”，并假定在这种开关状态组合下，电灯处于“熄”的状态. 借助于 0/1 表示，初始状态即为

$K_1=0$，$K_2=0$，$K_3=0$ 时，$D=0$.

以初始状态作参照，

当三个开关中恰有一个开关的状态被改变后，电灯都会变为“亮”的状态，即 D 的取值由 0 改变到 1；

当三个开关中恰有两个开关的状态被改变后，相当于有两个开关先后被动过，电灯状态经过了“熄→亮→熄”的状态改变过程，D 的取值经历了“0→1→0”的过程，最终 D 的取值还是 0；

当三个开关的状态都被改变后，相当于三个开关先后都被动过，电灯状态经过了“熄→亮→熄→亮”的状态改变过程，D 的取值经历了“0→1→0→1”的过程，最终 D 的取值为 1.

思　考

三个开关控制电灯亮与熄，有什么规律吗？

可以看出，若改变三个开关状态的累计次数为奇数，电灯处于“亮”的状态；若改变三个开关状态的累计次数为偶数，电灯处于“熄”的状态. 这与使用一个开关的结果是一致的.

同时，我们注意到，电灯的状态与改变开关的先后顺序无关，

只与改变开关的累计次数的奇偶性有关（即使我们将同一个开关改变多次）.

根据上述分析，我们就可以建立教室内三个开关控制电灯的开关电路的数学模型，如表 10－1－7.

三个开关一共有 8 种不同的状态组合，表 10－1－7 中列出了所有的可能性. 我们将在以后借助于布尔代数的知识构造出这一电路.

表 10－1－7

K_1	K_2	K_3	D	说　明
0	0	0	0	初始状态，三个开关都断开，灯熄
1	0	0	1	三个开关中恰有一个合上，灯亮
0	1	0	1	
0	0	1	1	
0	1	1	0	三个开关中恰有两个合上，灯熄
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	三个开关都合上，灯亮

如果将 K_1，K_2 和 K_3 视为自变量，将 D 视为因变量，那么 D 可以表示为 K_1，K_2 和 K_3 的函数形式，即

$$D = f(K_1,\ K_2,\ K_3),$$

其中，K_1，K_2，K_3 和 D 均在集合 $\{0,\ 1\}$ 内取值.

10.1.3 n 个开关控制电灯的数学模型

我们可以将三个开关控制电灯的开关电路的数学模型推广到一般情形.

假定在教室内的 n 个不同地方分别安装开关 K_1，K_2，…，K_n，教室内只有一盏电灯 D，n 个开关中任何一个开关的状态发生改变后，都可

以改变电灯的状态.

下面我们用前面处理三个开关控制电灯的方法建立该问题的数学模型.

假定开关 K_1, K_2,…,K_n 的初始状态全为“断开”,并假定在这种开关状态组合下,电灯处于“熄”的状态,即当 $K_1=K_2=\cdots=K_n=0$ 时,$D=0$.

同样,我们还是以初始状态作参照,分析各种开关状态组合下,电灯的状态如何改变.

视 $(0, 0,\cdots,0)$ 为起点,它对应于

$$K_1=K_2=\cdots=K_n=0;$$

视$(a_1, a_2,\cdots,a_n)$为终点,它对应于

$$K_1=a_1,\ K_2=a_2,\cdots,\ K_n=a_n,$$

其中,a_1, a_2,…,a_n 取值为 0 或 1. 起点对应于开关组的初始状态,终点对应于开关组的当前状态.

如果

$$a_1,\ a_2,\cdots,a_n$$

中有 k 个取值为 1,$n-k$ 个取值为 0,考虑到有些开关有可能被重复动过多次,那么 k 个取值为 1 的开关分别被动过奇数次,这 k 个开关被动过的总次数为

$$2p+k;$$

$n-k$ 个取值为 0 的开关分别被动过偶数次,这 $n-k$ 个开关被动过的总次数为

$$2q.$$

这样,n 个开关被动过的总次数为

$$2(p+q)+k(\text{其中 } p \text{ 和 } q \text{ 为非负整数}).$$

需要注意的是,$2(p+q)+k$ 与 k 具有相同的奇偶性.

所以,当从$(0, 0,\cdots,0)$变到$(a_1, a_2,\cdots,a_n)$时,如果 a_1, a_2,…, a_n

中有 k 个取值为 1，则 D 的值从 0 开始经过

$$\text{“0 变到 1，1 变到 0”},$$

交替改变了 $2(p+q)+k$ 次.

所以，当 k 为奇数时，$D=1$；当 k 为偶数时，$D=0$.

因此，

当 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 中恰有 k 个取值为 1 时，如果 k 为奇数，则 $D=1$；如果 k 为偶数，则 $D=0$.

对于固定的 k，这样的组合共有 C_n^k 种. 这里 C_n^k 为从 n 个元素中取出 k 个的组合总数，而且

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

因此，如果将 n 个开关控制电灯的数学模型用表 10-1-7 的形式表示，则该表格应有 2^n 行.

探究

用表格具体列出 4 个开关控制电灯时的取值关系.

习题 10.1

1. 在教室内不同地方安装有 4 个开关，每个开关都可以控制教室内的电灯. 试建立该电路的数学模型.
2. 在一个教室内的 3 个不同地方安装 3 盏电灯，电灯的编号分别为 1，2，3. 现有 3 个开关安装在同一个地方. 我们要求：开关全部“断开”时，3 盏电灯全部“熄”；开关中恰有一个“合上”时，只有 1 号灯“亮”；开关中恰有两个“合上”时，只有 2 号灯“亮”；开关全部“合上”时，只有 3 号灯“亮”. 试建立该电路的数学模型.
3. 在一个教室内的 3 个不同地方安装 3 盏电灯，电灯的编号分别为 1，2，3. 现有 3 个开关安装在同一个地方. 我们要求：开关全部“断开”时，3 盏电灯全部“熄”；开关中恰有一个“合上”时，1 号灯“亮”；开关中恰有两个“合上”时，1 号灯和 2 号灯“亮”；开关全部“合上”时，教室内电灯全“亮”. 试建立该电路的数学模型.

10.2 开关电路的基本元件

一个开关电路由若干基本元件构成，一个基本元件由若干开关组装而成. 一个开关只具有两种状态，我们分别用 0 和 1 表示一个开关的两种不同状态. 因此，一个基本元件实际上是将一组 0，1 信号作为输入，转换成只带一个输出端的固定装置. 其输出信号为 0 或 1. 将 0 对应到“假”，1 对应到“真”，联系到逻辑关系，一个基本元件又代表一种固定的逻辑关系.

10.2.1 最基本的逻辑关系

我们将具有明确的真假意义的判断语句称为一个命题. 一个命题实际上代表一个条件. 一个条件只有“成立”和“不成立”两种情况，因此可以用 1 表示条件成立，用 0 表示条件不成立.

在自然语言中，通常会用一些联结词将某些简单语句联系起来，以构成一个更复杂的复合语句.

例如，在语句

“王小伟是一名中学生，而且家住在上海”

中，使用了联结词“而且”；在语句

“一个大于 2 的自然数是一个质数，或者是一个合数”

中，使用了联结词“或者”；在语句

“我不是一名教师”

中，使用了联结词“不”.

在数理逻辑学中我们可以用逻辑联结词将简单的命题联结起来构成更为复杂的命题. 逻辑联结词与自然语言中的联结词既有相似之处又不尽相同. 逻辑联结词的最大特征是：

由它们构造的复杂命题的真假值是由构造该命题的简单命题的真假值惟一确定.

以上的三个例子分别对应了三种最基本的逻辑关系，也对应了三种逻辑联结词.

1. “与”逻辑关系

一个事件的发生依赖于两个条件，当且仅当这两个条件同时成立时，这个事件才发生. 我们称这种逻辑关系为“与”(and)逻辑关系. 其逻辑表达式记为 $Z = A \cdot B$，真值表如表 10-2-1.

表 10-2-1

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

逻辑联结词“与”通常对应于自然语言中的“而且”、“并且”、“且”、“和”等联结词.

我们可以这样来理解 $A \cdot B$：

A 表示一个条件，B 表示另一个条件，视“$\cdot$”为一个条件运算符号，由 A 和 B 通过“$\cdot$”运算后产生一个新的复合条件.

“条件 $A \cdot B$ 成立”当且仅当“条件 A 和条件 B 同时成立”.

例如，

A：四边形 $ABCD$ 中两组对边平行；

B：四边形 $ABCD$ 中有一个角是直角；

$A \cdot B$：“四边形 $ABCD$ 中两组对边平行，并且四边形 $ABCD$ 中有一个角为直角”，等价于“四边形 $ABCD$ 是矩形”.

“四边形 $ABCD$ 中两组对边平行”

作为一个条件，