QQ教辅

QQJIAOFU

点击专项

根据新课标编写 适合各种版本教材 新课标

点击

DIANJIZHUANXIANG

主编：李永哲

高中数学

不等式 推理与证明

延边大学出版社

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写 适合各种版本教材 新课标

点击专项

点击

DIANJIZHUANXIANG

高中数学

本册主编：张　友　刘金国

编　　委：王雪晶　刘德广　高　琨　郑明琴　刘晓菲　张　欣　徐　嵘　李业英　杜雪瑛　王春花　石成合　张　伟　杨秀杰　赵传娟　崔莲花　徐丽瑷　兰俊义　韩晓明　周广文　于黎春　曹艳菊

不等式 推理与证明

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

点击专项·高中数学·不等式、推理与证明/李永哲主编.
—延吉:延边大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-5634-2824-3

Ⅰ.点… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130277 号

点击专项·高中数学·不等式、推理与证明

主编:李永哲

责任编辑:秀　豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路977号　　**邮编**:133002

网址:http://www.ydcbs.com

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2732435　　**传真**:0433-2732434

发行部电话:0433-2133001　　**传真**:0433-2733266

印刷: 大厂回族自治县兴源印刷厂

开本:880×1230　1/32

印张:11.875　　**字数**:207千字

印数:1—12000

版次:2010年3月第1版

印次:2010年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5634-2824-3

定价:19.00元

前 言 Foreword

在数学这门学科中，知识的各个部分是有关联的，但各知识都有自己的特点。因此，在学习过程中，数学各专题知识独特的规律就需要学生们细心把握。

正因为如此，我们聘请多年在一线教学工作岗位的特高级教师，根据教育部颁布的新课标和新大纲的要求，编写了本书《点击专项——高中数学 不等式、推理与证明》，目的是让学生们在学习本数学专题时对这部分知识内容有深刻的理解和掌握。

为使广大读者更方便地使用本书，本书按从易到难的梯度编写，这样，对本专题知识没有吃透的学生就可以迅速掌握本专题的知识；中等水平的学生在精读本书提高篇后会使自己更上一层楼；优秀的学生可以通过拓展篇的训练使自己处在更高的水平。

本书精选的大量不同难度的习题能让不同层次的学生有的放矢，并体验到学习的乐趣。

本书由如下版块构成：

知识归纳

本版块将不等式、推理与证明的知识和规律进行总结和归纳，将其主要规律呈示出来，使学生们在学习中能在最短的时间内掌握本章节的内容。

典型例题及训练题

本章节分为例题和训练部分。基础篇较简单。学生通过基础篇的训练能尽快地掌握本章节的基本内容，对基本内容和概念加深理解并熟练

掌握。

提高篇具有相当的难度。学生通过提高篇的训练，不仅能更熟练地掌握本章节的基本内容，而且能对与本章节相关联的内容有一定的理解和掌握。

拓展篇难度很大，但这些题都是在本章节的基础知识之上进行变型和延伸的，因此，这些题是本章节内容的总结与拓展。学生通过拓展篇的训练，能够对本章节的内容有个明晰的认识。

参考答案

全书给出了标准答案，有一定难度的题还给出了解题思路和具体步骤。

充分阅读本书，通过这种阶梯式的训练，任何学生都能迅速有效地掌握本章节的内容，从而达到点击专项的目的。

目 录 Contents

第一章　不等式

本章教学目标及要求

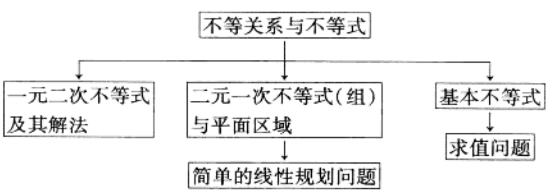
1. 通过具体情境,感受在现实世界和日常生活中存在着大量的数量关系,了解不等式(组)的实际背景.

2. 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式模型的过程;通过函数图象了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系;会解一元二次不等式,对给定的一元二次不等式,尝试设计求解的程序框图.

3. 从实际情境中抽象出二元一次不等式组;了解二元一次不等式的几何意义,能用平面区域表示二元一次不等式组;从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题,并能加以解决.

4. 探索基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a,b\geqslant 0)$ 的证明过程;会用基本不等式解决简单的最大(小)值问题.

本章知识结构框图



1.1　不等关系与不等式

一、知识归纳

1. 实数大小关系

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$　$a=b\Leftrightarrow a-b=0$　$a<b\Leftrightarrow a-b<0$

2. 不等式的性质

性质 1. 如果 $a>b$,那么 $b<a$;如果 $a<b$,那么 $b>a$,即 $a>b\Leftrightarrow b<a$.

性质 2. 如果 $a>b,b>c$,那么 $a>c$ 即 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

性质 3. 如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$

性质 4. 如果 $a>b,c>0$,那么 $ac>bc$

如果 $a>b,c<0$,那么 $ac<bc$

性质 5. 如果 $a>b,c>d$,那么 $a+c>b+d$

性质 6. 如果 $a>b>0,c>d>0$,那么 $ac>bd$

性质 7. 如果 $a>b>0$,那么 $a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$

性质 8. 如果 $a>b>0$,那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$

3. 比较实数大小关系

(1)作差比较法:①作差;②变形;③确定符号;④结论. 其中常用变形方法:一是配方法;二是分解因式.

(2)作商比较法:①作商;②变形;③比较商与 1 的大小关系;④结论.

其中两个数均为正数,即当 $a>0,b>0$ 时,则 $\frac{b}{a}>1\Leftrightarrow b>a$;$\frac{b}{a}=1\Leftrightarrow b=a$;$\frac{b}{a}<1\Leftrightarrow b<a$.

4. 学法指导

(1)透彻理解不等式性质的条件和结论,弄清是充分条件,还是充要条件.

如:$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$,这里的条件 $a>b>0,c>d>0$ 是充分不必要条件,显然由 $ac>bd\not\Rightarrow a>b>0,c>d>0$.

(2)分析性质的条件是否具备,做到有根有据,严谨科学. 例如:$a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$ 是错误的. 同学们往往认为 $c^2>0$,忽略了 $c=0$ 的情形.

当条件的形式与性质的条件形式不相同时,可适当地先进行转化,然后再利用性质. 例如:$a>b>0,0>c>d\Rightarrow ac>bd$ 是错误的. 应先把 $0>c>d$ 转化为 $-d>-c>0$,再结合 $a>b>0$,由性质可得 $(-d)\cdot a>(-c)\cdot b$,即 $-ad>-bc\Rightarrow ad<bc<0$.

二、典型例题及训练题

(一)基础篇

典例分析

题型一:作差比较法

例 1 比较 $(x+5)(x+7)$ 与 $(x+6)^2$ 的大小.

分析:可用作差法比较.

解:$(x+5)(x+7)-(x+6)^2=(x^2+12x+35)-(x^2+12x+36)=-1<0$

$\therefore (x+5)(x+7)<(x+6)^2$

例2　如果 $x>0$,比较$(\sqrt{x}-1)^2$与$(\sqrt{x}+1)^2$的大小.

分析:用作差法比较.

解:$(\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{x}+1)^2=(x-2\sqrt{x}+1)-(x+2\sqrt{x}+1)=-4\sqrt{x}$

$\because x>0\quad \therefore \sqrt{x}>0\quad \therefore -4\sqrt{x}<0\quad \therefore (\sqrt{x}-1)^2<(\sqrt{x}+1)^2$

点评

作差后须根据题意判断差的符号.

例3　已知 $a\neq0$,比较$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$与$(a^2+a+1)(a^2-a+1)$的大小.

解:(作差法)$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)-(a^2+a+1)(a^2-a+1)=[(a^2+1)^2-(\sqrt{2}a)^2]-[(a^2+1)^2-a^2]=-a^2$

$\because a\neq0\quad \therefore a^2>0\quad \therefore -a^2<0$

$\therefore (a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)<(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

点评

解答过程中,注意利用平方差公式,完全平方公式灵活变形,对提高解题效率起了重要作用.

例4　已知 $\alpha\in(0,\pi)$,比较 $2\sin2\alpha$ 与$\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$的大小.

分析:用作差法比较.

解:$2\sin2\alpha-\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}(-4\cos^2\alpha+4\cos\alpha-1)$

$=-\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}(2\cos\alpha-1)^2$

$\because \alpha\in(0,\pi),\therefore \sin\alpha>0,1-\cos\alpha>0,(2\cos\alpha-1)^2\geqslant0$

$\therefore -\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}(2\cos\alpha-1)^2\leqslant0$,即 $2\sin2\alpha-\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\leqslant0$

$\therefore 2\sin2\alpha\leqslant\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$(当且仅当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时取等号)

例5　求证:$a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$.

分析:利用作差法,判断差的符号.

证明:$a^2+b^2-(ab+a+b-1)=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2)$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2]\geq 0$$

$\therefore a^2+b^2\geq ab+a+b-1$

点评

作差变形,配方法是常用方法之一.

题型二:构造法

例6 比较 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ 与 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$ 的大小.

分析:可用作差法或函数的单调性来解.

解:解法一 (作差法)

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}-\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=\frac{\lg\frac{1}{3}}{\lg\frac{1}{2}}-\frac{\lg\frac{1}{2}}{\lg\frac{1}{3}}=\frac{\lg 3}{\lg 2}-\frac{\lg 2}{\lg 3}=\frac{\lg^2 3-\lg^2 2}{\lg 2\cdot\lg 3}=\frac{(\lg 3+\lg 2)(\lg 3-\lg 2)}{\lg 2\cdot\lg 3}$$

>0

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$

解法二 (中介法)

$\because$ 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 在$(0,+\infty)$上是减函数且$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$,$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$. $\therefore \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$

点评

解题需从多个角度,多方面思考、分析,寻找不同的解法和思路.

例7 已知函数 $f(x)=ax^2-c$, $-4\leq f(1)\leq -1$, $-1\leq f(2)\leq 5$,求 $f(3)$ 的取值范围.

分析:利用 $f(1)$ 与 $f(2)$ 设法表示 a、c,然后再代入 $f(3)$ 的表达式中,从而用 $f(1)$ 与 $f(2)$ 来表示 $f(3)$,最后运用已知条件确定 $f(3)$ 的取值范围.

解:$\because f(x)=ax^2-c$ $\therefore \begin{cases}f(1)=a-c\\f(2)=4a-c\end{cases}$,即$\begin{cases}a-c=f(1)\\4a-c=f(2)\end{cases}$

解之得$\begin{cases}a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)]\\c=\frac{1}{3}f(2)-\frac{4}{3}f(1)\end{cases}$

$\therefore f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$

$\because -4\leqslant f(1)\leqslant -1$

$\therefore \frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant \frac{20}{3}$　①

又$\because -1\leqslant f(2)\leqslant 5$　$\therefore -\frac{8}{3}\leqslant \frac{8}{3}f(2)\leqslant \frac{40}{3}$　②

把①和②的各边分别相加,得$-1\leqslant \frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant 20$,即$-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

点评

本题应当注意,下面的解法是错误的:

依题意,得$\begin{cases}-4\leqslant a-c\leqslant -1 & ①\\ -1\leqslant 4a-c\leqslant 5 & ②\end{cases}$

由①、②利用不等式的性质进行加减消元,得$0\leqslant a\leqslant 3$,$1\leqslant c\leqslant 7$　③

所以由$f(3)=9a-c$可得,$-7\leqslant f(3)\leqslant 27$

以上解法的错误原因在于,由①、②得到不等式$f(3)$是利用了不等式性质中的加法法则,而此性质是单向的,不具有可逆性,从而使得a、c的范围扩大,这样$f(3)$的范围也就随之扩大了.

题型三:分类讨论法

例8 已知$a\in\mathbf{R}$,比较$\frac{1}{1+a}$与$1-a$的大小.

分析:由于$a=-1$时,$\frac{1}{1+a}$无意义;而当$a=0$时,$\frac{1}{1+a}=1-a$.

$\therefore$对于实数a,要比较$\frac{1}{1+a}$与$1-a$的大小,应将$\mathbf{R}$分为$(-\infty,-1)$,$(-1,0)$,$\{0\}$,$(0,+\infty)$等几部分,用分类讨论的思想进行比较.

解:当$a=0$时,$\frac{1}{1+a}=1-a$

当$a<-1$时,即$a+1<0$,有$\frac{1}{1+a}-(1+a)=\frac{a^2}{1+a}<0$.$\therefore \frac{1}{1+a}<1-a$.

当$-1<a<0$时,即$a+1>0$,有$\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}>0$.$\therefore \frac{1}{1+a}>1-a$

当$a>0$时,即$a+1>0$,有$\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}>0$,$\therefore \frac{1}{1+a}>1-a$

综上所述:

当$a=0$时,$\frac{1}{1+a}=1-a$;当$a<-1$时,$\frac{1}{1+a}<1-a$;

当$-1<a<0$或$a>0$时,$\frac{1}{1+a}>1-a$.

点评

本题用到了分类讨论的思想，即把 $a \neq -1, a \in \mathbf{R}$ 分为 $a < -1$，$-1 < a < 0$，$a = 0$，$a > 0$ 几种情形，然后用作差法分别比较 $\frac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小. 分类讨论是中学数学中的一种重要的数学思想方法，我们一定要予以高度重视.

题型四：应用题与不等式

例 9 咖啡馆配制两种饮料，甲种饮料每杯用奶粉、咖啡、糖分别为 4g、5g、3g，乙种饮料每杯用奶粉、咖啡、糖分别为 4g、5g、5g. 已知每天使用原料的奶粉 3600g、咖啡 2000g、糖 3000g，写出满足上述所有不等关系的不等式.

分析：每天使用的奶粉不超过 3600g，咖啡不超过 2000g，糖不超过 3000g

解：设每天应配制甲种饮料 x 杯，乙种饮料 y 杯，则 $\begin{cases} 9x+4y \leqslant 3600 \\ 4x+5y \leqslant 2000 \\ 3x+5y \leqslant 3000 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

点评

由于 x、y 是饮料的杯数，从而 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 这一点在解题时容易被忽略.

例 10 有两种物资（石油和粮食），可用轮船和飞机两种方式运输，每天每艘船和每架飞机运输效果如下表：

种类 \ 效果 \ 方式	轮船	飞机
粮食	300t	150t
石油	250t	100t

在一天内需运输 2000 吨粮食和 1500 吨石油，试写出满足上述所有不等关系的不等式.

分析：使用若干架飞机，若干艘轮船运输粮食超过 2000 吨，石油超过 1500 吨.

解：设每天安排轮船 x 艘，飞机 y 架. 则 $\begin{cases} 300x+150y \geqslant 2000 \\ 250x+100y \geqslant 1500 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

基础训练

1. 在以下各题的横线处填上适当的不等号.

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ ________ $6+2\sqrt{6}$;

(2) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ ________ $(\sqrt{6}-1)^2$;

(3) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ ________ $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$;

(4) 当 $a>b>0$ 时, $\log_{\frac{1}{2}}a$ ________ $\log_{\frac{1}{2}}b$.

2. 若 $a<0$, $-1<b<0$, 则有　(　　)

A. $a>ab>ab^2$　　B. $ab^2>ab>a$　　C. $ab>a>ab^2$　　D. $ab>ab^2>a$

3. 若 $a>0$, 且 $a\neq1$, $p=\log_a(a^3+1)$, $q=\log_a(a^2+1)$, 则 p、q 的大小关系为　(　　)

A. $p<q$　　B. $p\leqslant q$　　C. $p>q$　　D. $q\geqslant q$

4. 在下列各题的横线上填上适当的不等号.

(1) 若 $x>0, y>0$, 则 x^3+y^3 ________ x^2y+xy^2;

(2) 若 $x\in\mathbf{R}$, 则 $(x^2+1)^3$ ________ $x^6+2x^4+2x^2+1$;

(3) $\log_2 3$ ________ $\frac{3}{2}$.

5. 判断下列命题是否正确. 正确的画"√", 错误的画"×".

(1) $a>b\Rightarrow\frac{a}{b}>1$　(　　)

(2) $a>b\Rightarrow|a|>b$　(　　)

(3) $a>b\Rightarrow a^{2n}>b^{2n}$　(　　)

(4) $a>|b|\Rightarrow a>b$　(　　)

(5) $a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　(　　)

(6) $a>b\Rightarrow a^{\frac{1}{3}}>b^{\frac{1}{3}}$　(　　)

(7) $a>b, c>d\Rightarrow ac>bd$　(　　)

(8) $\sqrt[n]{a^2}>\sqrt[n]{b^2}\Rightarrow a>b, n\in\mathbf{N}$　(　　)

(9) $ac^2>bc^2\Rightarrow a>b(c\in\mathbf{R})$　(　　)

(10) $a>-b\Rightarrow c-a<b+c$　(　　)

(11) 若 $a>b>c$, $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$, 则 $a,b,c>0$　(　　)

(12) 若 $a\geqslant b$, $ac\geqslant bc$, 则 $c\geqslant0$　(　　)

6. 在空格上填上适当的条件, 使下列命题成立.

(1) 若 $a>b$ 且________, 则 $a^2>b^2$;

(2) 若 $a^2>b^2$ 且________, 则 $a<b$;

(3)若 $x>y$,$\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$同时成立,则________;

(4)若 $a>b>0$ 且________,则$\frac{a}{x}>\frac{b}{y}$.

7. 已知$f(x)=ax^2+bx$ 且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$,$2\leqslant f(1)\leqslant 4$,求 $f(-2)$的取值范围.

8. 已知 $a>b>c>0$,则 $\sqrt{ab}$,$\sqrt{bc}$,$\sqrt{ac}$,c 从小到大的排列顺序是________________.

9. 已知 $a\geqslant 1$,比较 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$和 $N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$的大小.

10. $-1<\alpha<\beta<1$,则下列各式恒成立的是 ( )

A. $-2<\alpha-\beta<0$　　B. $-2<\alpha-\beta<-1$

C. $-1<\alpha-\beta<0$　　D. $-1<\alpha-\beta<1$

11. 若 $x\in(2,6)$,$y\in(1,4)$,则 $x+y\in$ ________;$x-y\in$ ________;$\frac{x}{y}\in$ ________.

12. 若 α,β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,则 $2\alpha-\beta$ 的取值范围是 ( )

A. $-\pi<2\alpha-\beta<0$　　B. $-\pi<2\alpha-\beta<\pi$

C. $-\frac{3}{2}\pi<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$　　D. $0<2\alpha-\beta<\pi$

(二)提高篇

典例分析

题型一:作差比较法

例1 设 $a>0$,$a\neq 1$,$t>0$,比较$\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$的大小.

分析:有相同形式的函数式值的大小比较多采用作差比较法进行处理,借助函数的性质解决问题.

解:$\log_a\sqrt{t}-\log_a\frac{t+1}{2}=\log_a\frac{2\sqrt{t}}{t+1}$

$\because t>0$,则 $t+1-2\sqrt{t}=(\sqrt{t}-1)^2\geqslant 0$,$\therefore 0<\frac{2\sqrt{t}}{1+t}\leqslant 1$

当 $0<a<1$ 时,$\log_a\sqrt{t}-\log_a\frac{t+1}{2}=\log_a\frac{2\sqrt{t}}{1+t}\geqslant\log_a 1=0$,$\therefore\log_a\sqrt{t}\geqslant\log_a\frac{t+1}{2}$

当 $a>1$ 时,$\log_a\sqrt{t}-\log_a\frac{t+1}{2}=\log_a\frac{2\sqrt{t}}{1+t}\leqslant\log_a 1=0$,$\therefore\log_a\sqrt{t}\leqslant\log_a\frac{t+1}{2}$

点评

分类讨论是高中数学思想组成的一个重要内容，在分类讨论的过程中，所分内容的完整性是正确处理问题的前提. 本例中$\frac{2\sqrt{t}}{1+t}\in(0,1]$范围已确定，$\log_a\frac{2\sqrt{t}}{1+t}$的正负取决于$a$的选择，故需通过$a>1$，$0<a<1$两类情形讨论，比较两函数式的大小.

例2　若a、b、m、$n\in\mathbf{R}^+$，$m+n=1$，$x=\sqrt{ma+nb}$，$y=m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$，试比较x与y的大小.

分析：用作差法写出$x-y$后，发现直接因式分解不容易，但由于x和y都是正数，可利用平方差来比较大小.

解：
$$\begin{aligned}x^2-y^2&=(\sqrt{ma+nb})^2-(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})^2\\&=ma(1-m)+nb(1-n)-2\sqrt{ab}\cdot mn=mna+mnb-2mn\sqrt{ab}\\&=mn(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\end{aligned}$$

由于$m,n\in\mathbf{R}^+$，故$x^2-y^2\geqslant0$

又由于$x,y\in\mathbf{R}^+$，故$x\geqslant y$.

点评

若作差比较有困难，可考虑作平方差.

例3　已知a、b、c是$\triangle ABC$的三条边长，$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant2$，若$c^n=a^n+b^n$，试确定$\triangle ABC$的形状.

分析：判断三角形的形状，主要依据是余弦定理，将$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$转化为判断$a^2+b^2-c^2$的符号问题.

解：(1)当$n=2$时，$c^2=a^2+b^2$，$\triangle ABC$为直角三角形.

(2)当$n>2$时，$\because c^n=a^n+b^n$，$\therefore c>a$，$c>b$.

$\because(a^2+b^2)c^{n-2}-c^n=(a^2+b^2)c^{n-2}-(a^n+b^n)=a^2(c^{n-2}-a^{n-2})+b^2(c^{n-2}-b^{n-2})$，

$\because c>a>0$，$c>b>0$，$n\in\mathbf{N}^*$且$n>2$，$\therefore c^{n-2}>a^{n-2}$，$c^{n-2}>b^{n-2}$

$\therefore(a^2+b^2)c^{n-2}>c^n\Rightarrow a^2+b^2-c^2>0$.

$\therefore\triangle ABC$是锐角三角形.

点评

如何用条件 $c^n=a^n+b^n$ 判断 $a^2+b^2-c^2$ 的符号，由于 $c^n=c^2\cdot c^{n-2}$，$a^2+b^2-c^2$ 的符号等同于 $(a^2+b^2-c^2)\cdot c^{n-2}$ 的符号，把问题转化为 $(a^2+b^2)c^{n-2}-c^n$ 的符号的判断，处理对象自然也就明朗化了.

题型二:作商比较法

例4 设 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 且 $a\neq b$，试比较 a^ab^a 与 a^bb^a 的大小.

分析:根据题目的结构特点，可考虑用作商法.

解: $\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=\dfrac{a^{a-b}}{b^{a-b}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$

$\because a,b\in\mathbf{R}^+$，$\therefore$ (1)当 $a>b$ 时，$\dfrac{a}{b}>1$，$a-b>0$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，此时 $a^ab^b>a^bb^a$.

(2)当 $a<b$ 时，$0<\dfrac{a}{b}<1$，$a-b<0$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，此时 $a^ab^b>a^bb^a$.

综上:$a^ab^b>a^bb^a$.

点评

幂形式出现的式子比较大小，一般采用作商比较法.

例5 $a>0,b>0$，求证:$\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.

分析:利用比较法，作差或作商进行证明.

证明:证法一 (作差法)

$$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}=$$

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}\geqslant 0,\therefore \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}.$$

证法二 (作商法)

$$\frac{\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=$$

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}+1\geqslant 1,\therefore \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}.$$

点评

作差法是比较大小的基本方法，两数为正数时，也可考虑用作商法.

例6 已知$0<a<\frac{1}{2}$，$A=1-a^2$，$B=1+a^2$，$c=\frac{1}{1-a}$，$D=\frac{1}{1+a}$，试比较A、B、C、D的大小.

分析：通过将几个数分成几类，再从每一类中比较.

解：$\because 0<a<\frac{1}{2}$，$\therefore 0<a^2<\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}<1-a<1$，$1<1+a<\frac{3}{2}$，

$\therefore A=1-a^2<1+a^2=B$，

$\frac{A}{D}=(1-a^2)(1+a)=1+a-a^2-a^3=1+a(1-a-a^2)>1$，$\therefore A>D$.

同样$\frac{B}{C}=(1-a)(1+a^2)=1-a(1-a+a^2)<1$

$\therefore B<C$　$\therefore D<A<B<C$

点评

比较多个数的大小时，可用取特殊值法进行判断、猜测，再进行比较.

题型三：构造函数法

例7 已知函数$f(x)=x+x^3$，$x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}$，$x_1+x_2<0$，$x_2+x_3<0$，$x_3+x_1<0$，那么$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$的值　(　　)

A. 一定大于0　　B. 一定小于0　　C. 等于0　　D. 正负都有可能

分析：由函数$f(x)$的单调性、奇偶性等获取不等式，判断$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$的值.

解：$\because f(x)=x^3+x$，$\therefore f(x)$是奇函数也是增函数. $\because x_1+x_2<0$，$\therefore x_1<-x_2$，$\therefore f(x_1)<f(-x_2)$

即$f(x_1)<-f(x_2)$，$\therefore f(x_1)+f(x_2)<0$

同理$f(x_2)+f(x_3)<0$，$f(x_1)+f(x_3)<0$，$\therefore 2[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]<0$

即$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)<0$.

答案：B

点评

有关函数的性质经常运用不等式来解决有关不等式的问题，也运用函数性质来解决.

例8 设$f(x)=3ax^2+2bx+c$，若$a+b+c=0$，$f(0)>0$，$f(1)>0$，求证：

(1)$a>0$且$-2>\frac{b}{a}<-1$；

(2)方程$f(x)=0$在$(0,1)$内有两个实根.

证明：(1)因为$f(0)>0$，$f(1)>0$，所以$c>0$，$3a+2b+c>0$.