高等学校试用教材

# 高等数学

下　　册

（第二分册）

西安交通大学高等数学教研室编

高等教育出版社

高等学校试用教材

# 高 等 数 学

## 下 册

### (第二分册)

西安交通大学高等数学教研室编



高等教育出版社

## 内 容 提 要

本书是编者在1964年和1975年出版的《高等数学》的基础上改编而成. 共分上、下两册，各册又分第一、第二分册出版. 本书是下册第二分册，内容包括曲线与曲面积分、微分方程、场论、广义积分与含参变数的积分、傅里叶级数与傅里叶积分.

本书可供工科院校各专业使用.

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复"高等教育出版社"；本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校试用教材

**高 等 数 学**

**下 册**

**（第二分册）**

西安交通大学高等数学教研室编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 8.875 字数 210,000

1979年9月第1版 1985年4月第6次印刷

印数 52,361—56,760

书号 13010·0390 定价 1.20 元

# 目　录


**第十三章　线积分、面积分及各类积分的联系** …………………… 271

§1　曲线弧长与第一型线积分 …………………… 271

1-1　空间曲线的弧长 …………………… 272

1-2　第一型线积分的计算法与应用 …………………… 276

§2　曲面面积与第一型面积分 …………………… 282

2-1　曲面面积 …………………… 283

2-2　第一型面积分的计算法 …………………… 289

§3　第二型线积分和面积分 …………………… 291

3-1　第二型线积分的定义与性质 …………………… 291

3-2　第二型线积分的计算法　两型线积分的联系 …………………… 296

3-3　第二型面积分 …………………… 301

§4　各类积分的联系 …………………… 308

4-1　平面线积分与二重积分的联系——格林公式 …………………… 308

4-2　曲面积分与三重积分的联系——奥斯特洛格拉特斯基公式 …………………… 312

4-3　空间线积分与面积分的联系——斯托克斯公式 …………………… 315

§5　线积分与路线无关问题 …………………… 319

5-1　平面线积分与路线无关的条件 …………………… 319

5-2　二元函数全微分的求积问题 …………………… 325

5-3　空间线积分与路线无关问题 …………………… 332

**第十四章　微分方程** …………………… 342

§1　一阶微分方程 …………………… 342

1-1　一阶方程及其解的几何意义 …………………… 342

1-2　全微分方程 …………………… 344

1-3　一阶线性微分方程 …………………… 350

1-4　一阶方程的近似解法 …………………… 359

§2　线性微分方程 …………………… 364

2-1　线性齐次方程解的性质及其求法 …………………… 365

2-2　非齐次方程解的性质及其求法 …………………… 371

§3 常系数线性微分方程……374
3-1 常系数线性齐次方程的特征方程解法……375
3-2 常系数线性非齐次方程特解的待定系数解法……378
3-3 应用举例……387
*§4 微分方程组简介……396
4-1 一阶微分方程组及其与高阶微分方程的关系……397
4-2 首次积分与对称型微分方程组……402

**第十五章 场论……410**

§1 数量场与向量场……410
1-1 场……410
1-2 数量场的等值面……411
1-3 向量场的向量线……413
§2 数量场的方向导数与梯度……415
2-1 方向导数……415
2-2 梯度……417
2-3 梯度的运算法则……[illegible]
§3 向量场的散度与旋度……425
3-1 向量场的通量与散度……425
3-2 向量场的环量与旋度……439
§4 位势场、管状场与调和场……446
4-1 位势场……447
4-2 管状场……448
4-3 调和场……449
§5 梯度、散度、拉普拉斯式和旋度在正交曲线坐标系中的表达式……452
5-1 正交曲线坐标系……452
5-2 梯度、散度、拉普拉斯式和旋度的表达式……455

**第十六章 广义积分(续)与含参变数积分……465**

§1 广义积分的收敛判别法……465
1-1 无穷积分的收敛判别法……465
1-2 无界函数积分的收敛判别法……472
1-3 Γ函数与B函数……475
*1-4 广义重积分……480
*§2 含参变数的积分……485

2-1 含参变数的积分的概念……485
2-2 函数的一致连续性……486
2-3 含参变数的积分的分析性质……487
*§3 含参变数的广义积分……493
3-1 含参变数的无穷积分的一致收敛性……493
3-2 含参变数的无穷积分的性质……494
第十七章 傅里叶级数与傅里叶积分……499
§1 傅里叶级数……499
1-1 三角函数系的正交性……499
1-2 欧拉-傅里叶公式 傅里叶级数……502
1-3 傅里叶级数的收敛问题……504
1-4 偶或奇函数的傅里叶级数……507
§2 傅里叶级数的其他形式……510
2-1 任意区间的傅里叶级数……510
2-2 傅里叶正弦、余弦级数……513
2-3 复数形式的傅里叶级数……515
*§3 傅里叶积分与傅里叶变换……521
3-1 傅里叶积分……521
3-2 傅里叶积分的其他形式……524
答案

# 第十三章　线积分、面积分及各类积分的联系

上一章我们已经给出了多元函数在各种区域上积分的一般定义. 本章将在此基础上，讨论线积分和面积分. 此外，还将讨论多元函数各类积分之间的联系，并建立相应的公式.

本章所建立的概念和公式是研究各种物理场(比如温度场、电场等)的重要数学工具，在科学技术中有着广泛的应用. 为了便于读者集中精力领会这些概念和公式，在这一章中，我们将着重从数学上进行阐述，至于在物理场中的应用，将在第十五章中讨论.

## §1　曲线弧长与第一型线积分

在上一章§1中我们已经知道，如果积分$\int_{(\Omega)} f(M)\,d\Omega$的积分域$(\Omega)$取作空间(或平面)曲线$C$，那末这个积分就是第一型线积分$\int_C f(M)\,ds$. 这时，(12-5)式右边积分和数中的$\Delta\Omega_k(k=1, 2, \cdots, n)$便是$C$的各小段弧$(\Delta s_k)$的长度$\Delta s_k$，$M_k$便是$(\Delta s_k)$上任意取的一个点，而$d$就是小弧段$(\Delta s_k)$的最大长度：$d=\max\Delta s_k$. 于是第一型线积分就是和数$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k$当$d\to 0$时的极限，即

$$\int_C f(M)\,ds=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k \tag{13-1}$$

当$C$是空间曲线时，$f(M)$一般为三元函数$f(x, y, z)$；$C$是平面曲线时，$f(M)$一般为二元函数$f(x, y)$.

这里我们应当注意两点：

1° 虽然被积函数 $f(M)$ 是一个二元或三元的函数——$f(x,y)$ 或 $f(x,y,z)$，但由于点 $M$ 始终被限制在曲线 $C$ 上，$x$、$y$ 或 $x$、$y$、$z$ 并不彼此独立而是受曲线 $C$ 的方程的约束，实际上是一维的，因此，线积分的符号用一个“$\int$”表示.

2° 由于 $\Delta s_k$ 是每一小段弧的长度，所以规定它是正的.

由曲线积分的定义(13-1)可知，线积分的计算涉及曲线 $C$ 的各小段弧的长度. 下面我们先来讨论空间曲线的弧长.

### 1-1 空间曲线的弧长

平面曲线的弧长定义(上册第 411 页脚注)可以一字不改地作为空间曲线弧长的定义. 利用曲线的参数方程，我们可以把曲线的长度公式由平面推广到空间. 不过在这里我们不从弧微分的积分得出，而是从定义出发导出弧长公式.

设空间曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 由参数方程

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\tag{13-2}$$

给出，其中 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数，而 $\alpha$ 与 $\beta$ 分别为曲线段的端点 $A$ 与 $B$ 所对应的参数值(图 13.1). 为了确定 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长 $s$，我们首先在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意插入 $n-1$ 个分点：

$$A=P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n=B$$

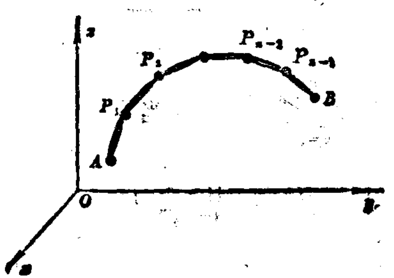


图 13.1

设它们对应的参数值分别为

$$\alpha=t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n=\beta$$

然后把相邻的分点连接起来，得内接折线如图 13.1 所示。据空间两点间的距离公式，内接折线的长度 $L_n$ 显然是

$$L_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2+(\Delta z_k)^2}$$

这里

$$\Delta x_k=x(t_k)-x(t_{k-1})$$

$$\Delta y_k=y(t_k)-y(t_{k-1})$$

$$\Delta z_k=z(t_k)-z(t_{k-1})$$

令 $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$，在每个子区间$[t_{k-1}, t_k]$上，应用拉格朗日公式有

$$\Delta x_k=\dot{x}(t_k')\Delta t_k,\quad \Delta y_k=\dot{y}(t_k'')\Delta t_k,\quad \Delta z_k=\dot{z}(t_k''')\Delta t_k$$

其中 $t_k', t_k'', t_k'''$ 在 $t_{k-1}$ 与 $t_k$ 之间. 把上式代入 $L_n$ 的表达式得

$$L_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dot{x}^2(t_k')+\dot{y}^2(t_k'')+\dot{z}^2(t_k''')}\,\Delta t_k$$

这里 $t_k', t_k'', t_k'''$ 虽然一般说来并不相同，但是在 $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$ 连续的假定下，我们可以证明(从略)，当最大的 $\Delta t_k$ 趋向零时，和数 $L_n$ 的极限与把 $t_k'', t_k'''$ 都换成 $t_k'$ 后所得的和数

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dot{x}^2(t_k')+\dot{y}^2(t_k')+\dot{z}^2(t_k')}\,\Delta t_k$$

的极限是相等的，而这个和数就是函数$\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}$在区间$[\alpha, \beta]$ 上的积分和数，于是根据定积分的定义及存在定理，可得

$$\lim_{\max\Delta t_k\to 0} L_n=\lim_{\max\Delta t_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dot{x}^2(t_k')+\dot{y}^2(t_k')+\dot{z}^2(t_k')}\,\Delta t_k$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt$$

而根据弧长的定义，上式左端的极限就是$\overset{\frown}{AB}$的弧长 $s$，从而我们有

$$\boxed{s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt} \tag{13-3}$$

相应地，我们有空间曲线的弧微分

$$\boxed{ds=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt} \tag{13-4}$$

或

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$

由以上讨论可知，当 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 在区间$[\alpha, \beta]$上有连续的导数时，曲线(13-2)是可求长的，其长度由公式(13-3)确定。所以光滑曲线或按段光滑曲线是可求长的。

应当注意，为了保证弧长 $s$ 为正，公式(13-3)中的积分上限 $\beta$ 必须大于积分下限 $\alpha$。

我们在第十章 4-2 中已知，当空间曲线(13-2)在点 $(x(t), y(t), z(t))$的切线的正向与曲线的正向①一致时，切线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}}$$

$$\cos\beta=\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}}$$

$$\cos\gamma=\frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}}$$

---

① 参看下册第一分册第100页脚注。

将上式分子分母同乘以 $dt$，并利用(13-4)式，得

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\ \cos\beta=\frac{dy}{ds},\ \cos\gamma=\frac{dz}{ds}}$$

**例 1** 求螺旋线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=k\theta$ 一个螺距之间的长度。

**解** $$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2+k^2}d\theta$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\sqrt{a^2+k^2}$$

**例 2** 求曲线 $x^2+z=4$, $4x+3y=12$ 由点 $(0, 4, 4)$ 至点 $\left(2, \frac{4}{3}, 0\right)$ 的长度.

**解** 先把曲线化为以 $x$ 为参数的参数方程:

$$x=x,\ y=4-\frac{4}{3}x,\ z=4-x^2\quad(0\leqslant x\leqslant 2)$$

于是长度

$$s=\int_0^2\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{\frac{25}{9}+4x^2}\,dx=\frac{13}{3}+\frac{25}{36}\ln 5$$

如果 $C$ 是平面曲线

$$x=x(t),\ y=y(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

那末在(13-3)和(13-4)中令 $z(t)\equiv 0$，便得

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}(t)}\,dt$$

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$$

与上册第四章中用几何直观推得的结果完全一致。

## 练　习　1-1

1. 求空间曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ 由点 $(1,0,1)$ 到点$(0, e^{\frac{\pi}{2}},$

$e^{\frac{\pi}{2}}$)的长度 $s$.

2. 求下列空间曲线的弧长 $s$:

(1) $x^2=3y,\ 2xy=9z$ 由点(0, 0, 0)到点(3, 3, 2);

(2) $4ax=(y+z)^2,\ 4x^2+3y^2=3z^2$ 由原点到点$(x, y, z)$.

## 1-2 第一型线积分的计算法与应用

当曲线 $C$ 的方程为已知时，第一型线积分就可以化成定积分来计算. 为了简便起见，下面先就平面线积分进行讨论.

设平面光滑曲线 $C$ 的参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

$f(x,y)$ 在 $C$ 上连续，则第一型线积分 $\int_C f(x,y)ds$ 存在，且

$$\boxed{\int_C f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt}\qquad(13\text{-}5)$$

现在我们来推导公式(13-5). 由(13-1)式,

$$\int_C f(x,y)\,ds=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

设弧段$(\Delta s_k)$两端点对应的参数值为 $t_{k-1}, t_k$, 其上$(\xi_k,\ \eta_k)$点对应的参数值为 $\tau_k$, 即 $\xi_k=x(\tau_k), \eta_k=y(\tau_k)\ (t_{k-1}\leqslant\tau_k\leqslant t_k)$. 因为

$$\Delta s_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$$

应用积分中值定理，就有

$$\Delta s_k=\sqrt{\dot{x}^2(t_k')+\dot{y}^2(t_k')}\,\Delta t_k\quad (t_{k-1}\leqslant t_k'\leqslant t_k)$$

这里 $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$. 于是，和数

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k=\sum_{k=1}^{n} f(x(\tau_k),y(\tau_k))\sqrt{\dot{x}^2(t_k')+\dot{y}^2(t_k')}\,\Delta t_k$$

根据假设条件，可知函数 $f(x(t),\ y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}$ 在区间

$[\alpha, \beta]$上连续，当$\max\Delta t_k \to 0$时，可以证明上式右边的极限就是定积分$\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$. 而当$d=\max\Delta s_k\to 0$时，$\max\Delta t_k\to 0$，所以和数$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$当$d\to 0$时的极限存在，即线积分$\int_C f(x, y)ds$存在，且等于定积分

$$\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$$

这就得到了(13-5)式.

由(13-5)式可知，线积分$\int_C f(x, y)ds$中的$ds$，就是积分路线$C$的弧微分. 要计算线积分$\int_C f(x, y)ds$，只要把$x$, $y$用曲线$C$上的点$(x(t), y(t))$代入，并把$ds$换成$C$的弧微分，就可化成(13-5)式右边的定积分.

如果$C$是空间光滑曲线：

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

那末在与前述平面线积分类似的假定下，同样可以得到

$$\int_C f(x, y, z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt \tag{13-6}$$

显然，如果积分路线$C$是按段光滑曲线，那末可先按段应用以上公式，然后把所得结果相加，根据积分性质，可知公式(13-5)与公式(13-6)同样成立. 今后我们假定积分路线$C$都是光滑曲线或按段光滑曲线.

应当注意，由于(13-5)与(13-6)两式中的$ds$是积分路线$C$的弧长的微分，我们在前面线积分的定义中规定它总是正的. 所以公式右边定积分的上限必须大于下限，以保证$ds>0$.

**例 1** 求 $I=\int_C xyzds$, 其中 $C$ 是螺旋线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=k\theta$ 的一段 $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$.

**解** $I=\int_0^{2\pi} a^2\cos\theta\sin\theta\cdot k\theta\sqrt{a^2+k^2}d\theta$

$$=\frac{1}{2}ka^2\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}\theta\sin 2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}ka^2\sqrt{a^2+k^2}\left(\frac{-\theta\cos 2\theta}{2}\bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta d\theta\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\pi ka^2\sqrt{a^2+k^2}$$

**例 2** 求 $I=\int_C xds$, 其中 $C$ 是连接点 $A(x_1, y_1)$ 与点 $B(x_2, y_2)$ 的直线段 $AB$(图 13.2).

**解** $AB$ 的参数方程为

$$\begin{aligned} x&=x_1+(x_2-x_1)t=(1-t)x_1+tx_2 \\ y&=y_1+(y_2-y_1)t=(1-t)y_1+ty_2 \end{aligned} \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,dt=Ldt$$

($L$ 为 $AB$ 的长度)

$$I=\int_C xds=\int_0^1[(1-t)x_1+tx_2]Ldt=L\frac{x_1+x_2}{2}=Lx_c$$

这里的 $x_c$ 是 $AB$ 中点 $M$ 的横坐标.

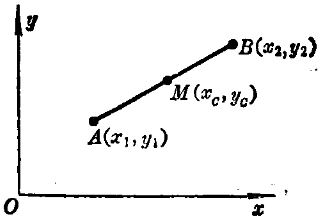


图 13.2

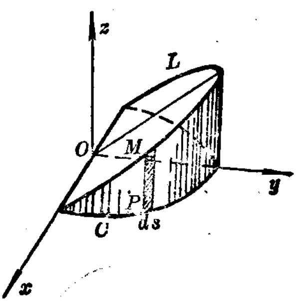


图 13.3

**例 3** 求$I=\int_C yds$，其中$C$是抛物线$y^2=4x$从点$(1,2)$到点$(1,-2)$的一段.

**解** 这里把$C$的方程写成$x=\frac{y^2}{4}$，$-2\leqslant y\leqslant 2$，才保证函数是单值的，所以应把$y$作为自变量，因而$ds=\sqrt{1+x'^2}dy$，

$$I=\int_{-2}^{2} y\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}dy=0$$

(因为被积函数是奇函数).

下面我们举例说明第一型线积分的应用.

**柱面的侧面积** 设有半片椭圆柱面$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，其上部被平面$z=y$所截(图 13.3)．求截下部分的侧面积$A$.

**解** 这个椭圆柱面的准线是$xOy$平面上的半个椭圆$C$:

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1 \quad (y\geqslant 0)$$

把$C$划分为许多小弧段，则对应于$P(x, y)$点处的弧元素$ds$上一小片柱面面积，近似等于以$ds$为底、以截线$L$在$M$点的竖坐标$z=y$为高的长方形面积，从而得面积微分

$$dA=yds$$

将$dA$沿曲线$C$无限积累，得侧面积

$$A=\int_C yds$$

其中$C$是$xOy$平面上的半个椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1 \quad (y\geqslant 0)$.

为了计算这个线积分，把$C$化为参数方程:

$$x=\sqrt{5}\cos t, \quad y=3\sin t \quad (0\leqslant t\leqslant \pi)$$

于是

$$A=\int_C yds=\int_0^{\pi} 3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\,dt$$

$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}\,d(\cos t)$$

$$=-3\int_1^{-1}\sqrt{5+4u^2}\,du=6\int_0^1\sqrt{5+4u^2}\,du$$

$$=9+\frac{15}{4}\ln 5$$

**物质曲线的重心与转动惯量** 设有一半圆弧，其上均匀分布着质量，求它的重心和对直径的转动惯量.

**解** 由对称性，知重心的横坐标 $\bar{x}=0$，设线密度为 $\mu$，因为质量均匀分布，$\mu$ 是一常数. 在半圆弧上任取一点 $P(x, y)$，求出 $P$ 点处的弧元素($ds$)的质量 $dm$对 $x$ 轴的静矩:

$$dM_x=ydm=\mu yds$$

这就是对 $x$ 轴的静矩微分. 把静矩微分 $dM_x$ 沿半圆弧 $C$ 积分，得

$$M_x=\int_C \mu yds$$

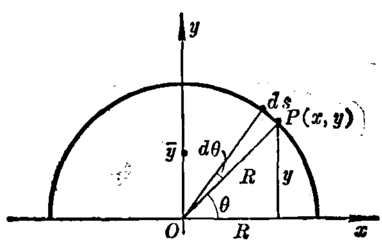


图 13.4

由图 13.4, $y=R\sin\theta$, $ds=Rd\theta$, 故

$$M_x=\int_C \mu yds=\mu\int_0^{\pi} R^2\sin\theta d\theta=2\mu R^2$$

而半圆弧的质量 $m=\pi R\mu$，所以重心的纵坐标

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{2\mu R^2}{\pi R\mu}=\frac{2R}{\pi}$$

再求$(ds)$的质量$dm$对直径即$x$轴的转动惯量:

$$dI_x=y^2dm=\mu y^2ds$$

这就是对$x$轴的转动惯量微分. 把转动惯量微分$dI_x$沿半圆弧$C$积分,得半圆弧对$x$轴的转动惯量

$$I_x=\int_C \mu y^2ds=\mu\int_0^\pi R^3\sin^2\theta d\theta=\mu R^3\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta$$

$$=\frac{\mu\pi R^3}{2}=\frac{m}{2}R^2$$

这里$m=\mu\pi R$为半圆弧的质量.

## 练　习　1-2

1. 计算沿下列各曲线$C$的第一型线积分:

(1) $\int_C \frac{1}{x-y}ds$, 从点$(0, -2)$到点$(4, 0)$的线段;

(2) $\int_C (x^2+y^2)^n ds$, $C$为圆周$x^2+y^2=a^2$;

(3) $\int_C y^2ds$, $C$为摆线$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(4) $\int_C zds$, $C$为螺线$x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ $(0\leqslant t\leqslant t_0)$;

(5) $\int_C (x+y)ds$, $C$为以$(0, 0)$, $(1, 0)$和$(0, 1)$为顶点的三角形周界;

(6) $\int_C x^2ds$, $C$为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

2. 试导出沿极坐标方程$\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$表示的曲线$C$的线积分计算公式:

$$\int_C f(x, y)ds=\int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$$

3. 计算下列第一型线积分:

(1) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$, $C$为圆周$x^2+y^2=ax$;

(2) $\int_C xds$, $C$为对数螺线$\rho=ae^{k\theta}$ $(k>0)$在圆$\rho=a$内的部分.