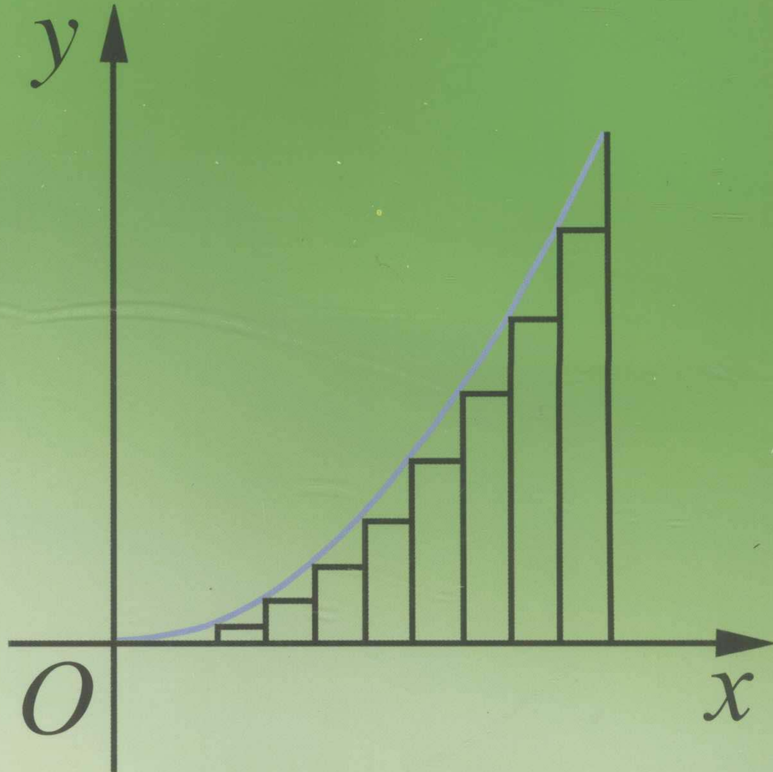
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

选修2-2

数学



凤凰国标教材

凤凰出版传媒集团

江蘇教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 2-2

苏教版高中数学教材编写组 编著

凤凰国标教材
凤凰出版传媒集团
江蘇教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

普通高中课程标准实验教科书
书　　名　数学(选修 2-2)
责任编辑　胡晋宾
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社(南京市湖南路 1 号 A 楼　210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京展望文化发展有限公司
印　　刷　江苏凤凰扬州鑫华印刷有限公司
厂　　址　扬州市江阳工业园蜀岗西路 9 号　(邮编 225008)
电　　话　0514-85868855
开　　本　890×1240 毫米　1/16
印　　张　8
版　　次　2008 年 7 月第 2 版
　　　　　2010 年 6 月第 5 次印刷
书　　号　ISBN　978-7-5343-6790-8
定　　价　7.27 元
盗版举报　025-83658551

主　　　编　单　墫

副　主　编　李善良　陈永高　王巧林

本册主编　徐稼红

主要编写人员　樊亚东　赵振威　张乃达　陈光立　袁亚良　李善良　等

参与设计　苏维宜　钱定边　秦厚荣　丁德成　仇炳生

责任编辑　胡晋宾

数学是科学的大门和钥匙.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学，你感到高中阶段的学习生活有趣吗?

我们知道，数学与生活紧密相连. 数学可以帮助我们认识世界，改造世界，创造新的生活. 数学是高中阶段的重要学科，不仅是学习物理、化学等学科的基础，而且对我们的终身发展有较大的影响.

面对实际问题，我们要认真观察、实验、归纳，大胆提出猜想. 为了证实或推翻提出的猜想，我们要通过分析，概括、抽象出数学概念，通过探究、推理，建立数学理论. 我们要积极地运用这些理论去解决问题. 在探究与应用过程中，我们的思维水平会不断提高，我们的创造能力会得到发展. 在数学学习过程中，我们将快乐地成长.

考虑到广大同学的不同需要，本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的“感受・理解”部分、阅读、回顾等内容构成一个完整的体系. 它体现了教材的基本要求，是所有学生应当掌握的内容. 相信你一定能学好这部分内容.

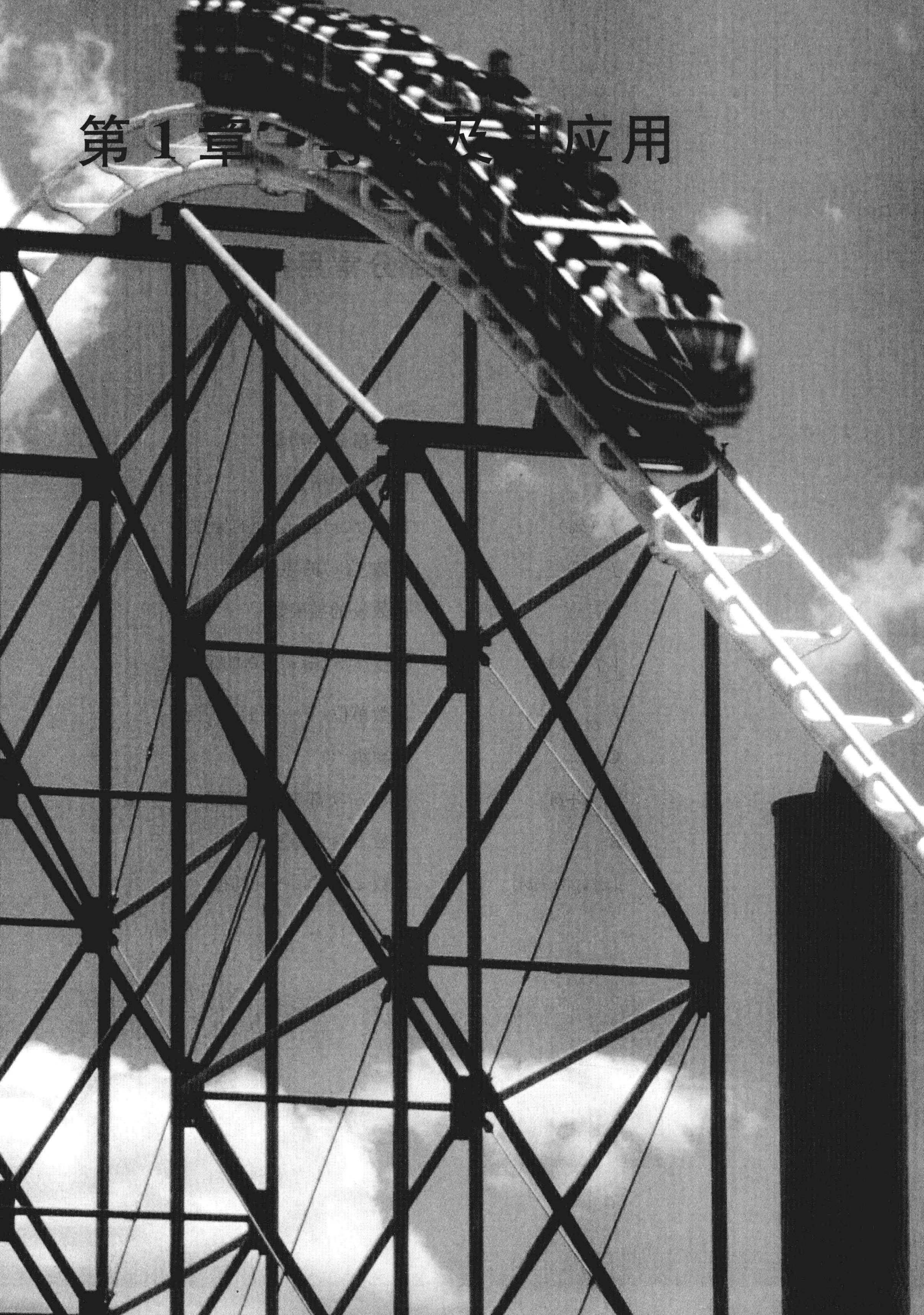
本书还设计了一些具有挑战性的内容，包括思考、探究、链接，以及习题中的“思考・运用”、“探究・拓展”等，以激发你探索数学的兴趣. 在掌握基本内容之后，选择其中一些内容作思考与探究，你会更加喜欢数学.

目　　录

本书部分常用符号

Δx	自变量 x 的增量
Δy	函数 y 的增量
$f'(x_0)$	函数 $f(x)$在 x_0 处的导数
$f'(x)$	函数 $f(x)$的导函数
y'	函数 y 的导函数
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	函数 $f(x)$由 a 至 b 的定积分
i	虚数单位，$\mathrm{i}^2=-1$
$\mathbf{C}$	复数集
z，$a+b\mathrm{i}$	复数 z;实部为 a,虚部为 b 的复数
$\overline{z}$	复数 z 的共轭复数
$\|z\|$，$\|a+b\mathrm{i}\|$	复数 z 的模,$a+b\mathrm{i}$ 的模

第 1 章 导数及其应用



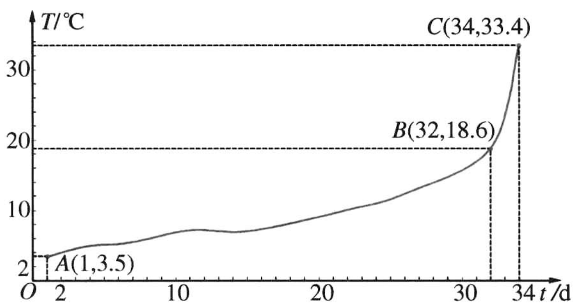
- 导数及其应用
  - 导数的概念
    - 平均变化率
    - 瞬时变化率——导数
  - 导数的运算
    - 常见函数的导数
    - 函数的和、差、积、商的导数
    - 简单复合函数的导数
  - 导数在研究函数中的应用
    - 单调性
    - 极大值与极小值
    - 最大值与最小值
  - 导数在实际生活中的应用
  - 定积分
    - 曲边梯形的面积
    - 定积分
    - 微积分基本定理

只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，而且也表明过程：运动.

——恩格斯

世界充满着变化，有些变化几乎不被人们所察觉，而有些变化却让人们发出感叹与惊呼.

某市2004年4月20日最高气温为33.4℃，而4月19日和4月18日最高气温分别为24.4℃和18.6℃，短短两天时间，气温陡增14.8℃，闷热中的人们无不感叹："天气热得太快了！"



但是，如果我们将该市2004年3月18日最高气温3.5℃与4月18日最高气温18.6℃进行比较，发现两者温差为15.1℃，甚至超过了14.8℃，而人们却不会发出上述感叹.

这是什么原因呢？

原来前者变化得太快，而后者变化得缓慢.

- 用怎样的数学模型刻画变量变化的快与慢？
- 这样的数学模型有哪些应用？

1.1 导数的概念

1.1.1 平均变化率

在本章引言的案例中，气温"陡增"的数学意义是什么呢?

为了弄清这个问题，我们先来观察如图 1-1-1 所示的气温曲线图(以 3 月 18 日作为第一天).

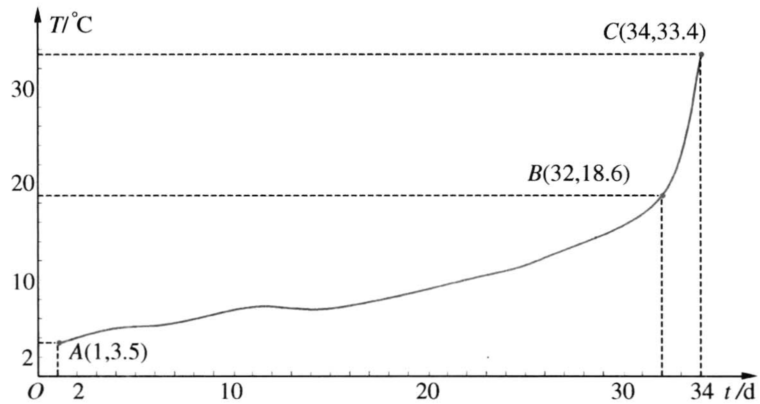


图 1-1-1

容易看出点 B，C 之间的曲线比点 A，B 之间的曲线更加"陡峭". 陡峭的程度反映了气温变化的快与慢.

● 如何量化曲线的"陡峭"程度呢?

联想到用斜率来量化直线的倾斜程度，我们用比值

$$\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{33.4-18.6}{34-32}$$

来近似地量化点 B，C 之间这一段曲线的陡峭程度，并称该比值为气温在区间$[32, 34]$上的平均变化率.

气温在区间$[1, 32]$上的平均变化率为

$$\frac{18.6-3.5}{32-1}=\frac{15.1}{31}\approx 0.5.$$

气温在区间$[32, 34]$上的平均变化率为

$$\frac{33.4-18.6}{34-32}=\frac{14.8}{2}=7.4.$$

虽然点 A，B 之间的温差与点 B，C 之间的温差几乎相同，但它

们的平均变化率却相差很大.

一般地，函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的**平均变化率**（average rates of change）为

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

在图 1－1－1 中，我们可以感受到：平均变化率是曲线陡峭程度的“数量化”，或者说，曲线陡峭程度是平均变化率的“视觉化”.

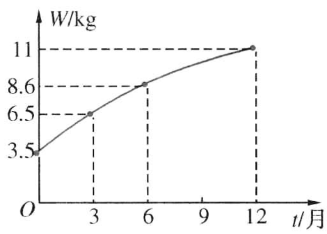


图 1－1－2

例 1 某婴儿从出生到第 12 个月的体重变化如图 1－1－2 所示，试分别计算从出生到第 3 个月以及第 6 个月到第 12 个月该婴儿体重的平均变化率.

解 从出生到第 3 个月，婴儿体重平均变化率为

$$\frac{6.5-3.5}{3-0}=1(\text{kg}/\text{月}),$$

从第 6 个月到第 12 个月，婴儿体重平均变化率为

$$\frac{11-8.6}{12-6}=\frac{2.4}{6}=0.4(\text{kg}/\text{月}).$$

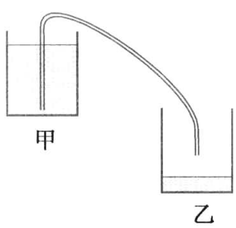


图 1－1－3

例 2 水经过虹吸管从容器甲流向容器乙（图 1－1－3），t s 后容器甲中水的体积 $V(t)=5e^{-0.1t}$（单位：cm^3），试计算第一个 10 s 内 V 的平均变化率.

解 在区间 $[0, 10]$ 上，体积 V 的平均变化率为

$$\frac{V(10)-V(0)}{10-0}\approx\frac{1.839-5}{10}=-0.3161(\text{cm}^3/\text{s}),$$

即第一个 10 s 内容器甲中水的体积的平均变化率为 $-0.3161\ \text{cm}^3/\text{s}$（负号表示容器甲中的水在减少）.

例 3 已知函数 $f(x)=x^2$，分别计算函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$，$[1, 2]$，$[1, 1.1]$，$[1, 1.001]$ 上的平均变化率.

解 函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2-1^2}{2}=4,$$

函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2^2-1^2}{1}=3,$$

函数 $f(x)$ 在 $[1, 1.1]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=\frac{1.1^2-1^2}{0.1}=2.1,$$

函数 $f(x)$ 在 $[1,\ 1.001]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(1.001)-f(1)}{1.001-1}=\frac{1.001^2-1^2}{0.001}=2.001.$$

例 4 已知函数 $f(x)=2x+1$，$g(x)=-2x$，分别计算函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在区间 $[-3,\ -1]$，$[0,\ 5]$ 上的平均变化率.

解 函数 $f(x)$ 在 $[-3,\ -1]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(-1)-f(-3)}{(-1)-(-3)}=\frac{[2\times(-1)+1]-[2\times(-3)+1]}{2}=2,$$

函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 5]$ 上的平均变化率为

$$\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=2,$$

函数 $g(x)$ 在 $[-3,\ -1]$ 上的平均变化率为

$$\frac{g(-1)-g(-3)}{(-1)-(-3)}=-2,$$

函数 $g(x)$ 在 $[0,\ 5]$ 上的平均变化率为

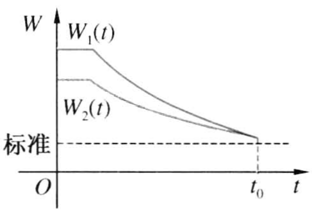
$$\frac{g(5)-g(0)}{5-0}=-2.$$

思 考

从例 4 的求解中，你能发现一次函数 $y=kx+b$ 在区间 $[m,\ n]$ 上的平均变化率有什么特点吗?

练 习

1. 甲、乙两人投入相同的资金经营某商品，甲用 5 年时间获利 10 万元，乙用 5 个月时间获利 2 万元，如何比较和评价甲、乙两人的经营成果?
2. 环境保护部门在规定的排污达标日期前，对甲、乙两家企业进行检查，连续检测结果如图所示(其中 $W_1(t)$，$W_2(t)$ 分别表示甲、乙两企业的排污量)，试比较两个企业的治污效果.



(第 2 题)

3. 已知 $f(x)=3x+1$，求 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的平均变化率:
   (1) $a=-1,\ b=2$;
   (2) $a=-1,\ b=1$;
   (3) $a=-1,\ b=-0.9$.
4. 求经过函数 $y=x^2$ 图象上两点 A，B 的直线的斜率:
   (1) $x_A=1,\ x_B=1.001$;
   (2) $x_A=1,\ x_B=0.9$;
   (3) $x_A=1,\ x_B=0.99$;
   (4) $x_A=1,\ x_B=0.999$.

1.1.2 瞬时变化率——导数

1. 曲线上一点处的切线

平均变化率近似地刻画了曲线在某区间上的变化趋势，那么，

● 如何精确地刻画曲线上某一点处的变化趋势呢？

如果将点 P 附近的曲线放大，那么就会发现，曲线在点 P 附近看上去有点像是直线(图 1-1-4).

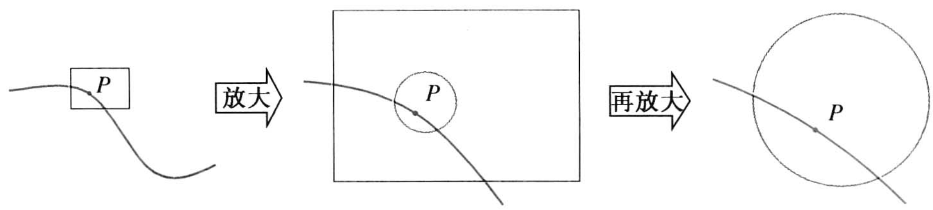


图 1-1-4

如果将点 P 附近的曲线再放大，那么就会发现，曲线在点 P 附近看上去几乎成了直线. 事实上，如果继续放大，那么曲线在点 P 附近将逼近一条确定的直线 l，该直线 l 是经过点 P 的所有直线中最逼近曲线的一条直线.

因此，在点 P 附近我们可以用这条直线 l 来代替曲线. 也就是说，在点 P 附近，曲线可以看做直线(即在很小范围内以直代曲).

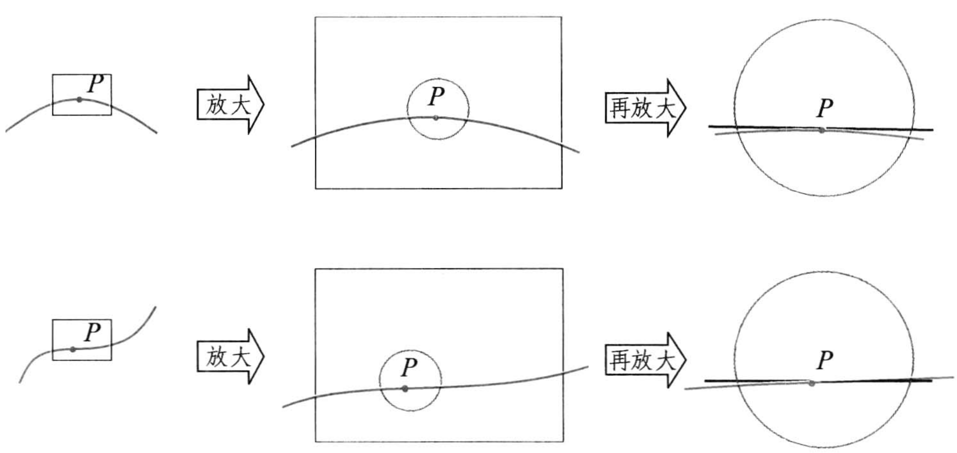


图 1-1-5

既然点 P 附近的曲线被看作直线 l，那么我们可以用直线 l 的斜率来刻画曲线经过点 P 时上升或下降的“变化趋势”.

探 究

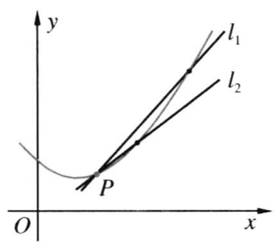


图 1-1-6

如图 1-1-6 所示，直线 l_1，l_2 为经过曲线上一点 P 的两条直线.

(1) 试判断哪一条直线在点 P 附近更加逼近曲线；

(2) 在点 P 附近能作出一条比 l_1，l_2 更加逼近曲线的直线 l_3 吗？

(3) 在点 P 附近能作出一条比 l_1，l_2，l_3 更加逼近曲线的直线 l_4 吗？

怎样找到经过曲线上一点 P 处最逼近曲线的直线 l 呢？

如图 1-1-7，设 Q 为曲线 C 上不同于 P 的一点，这时，直线 PQ 称为曲线的**割线**(secant line). 随着点 Q 沿曲线 C 向点 P 运动，割线 PQ 在点 P 附近越来越逼近曲线 C. 当点 Q 无限逼近点 P 时，直线 PQ 最终就成为在点 P 处最逼近曲线的直线 l，这条直线 l 称为曲线在点 P 处的**切线**(tangent line).

利用这种割线逼近切线的方法，我们来计算曲线上一点处切线的斜率.

动画浏览参见 http://www.1088.com.cn/math/2-2.

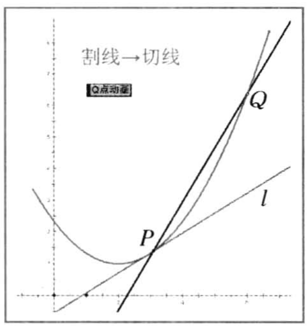


图 1-1-7

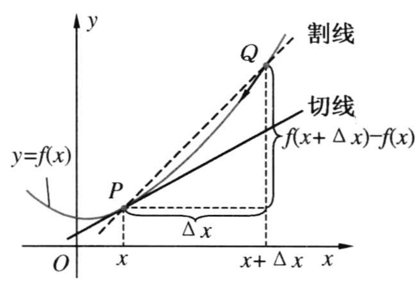


图 1-1-8

Δx 可正也可负，当 Δx 取负值时，点 Q 位于点 P 的左侧.

如图 1-1-8，设曲线 C 上一点 $P(x, f(x))$，过点 P 的一条割线交曲线 C 于另一点 $Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$，则割线 PQ 的斜率为

$$k_{PQ}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

当点 Q 沿曲线 C 向点 P 运动，并无限靠近点 P 时，割线 PQ 逼近点 P 的切线 l，从而割线的斜率逼近切线 l 的斜率，即当 Δx 无限趋近于 0 时，$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 无限趋近于点 $P(x, f(x))$ 处的切线的斜率.

例 1 已知 $f(x)=x^2$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线斜率.

分析 为求得过点(2, 4)的切线斜率，我们从经过点(2, 4)的任意一条直线(割线)入手.

解 设 $P(2, 4)$，$Q(2+\Delta x, (2+\Delta x)^2)$，则割线 PQ 的斜率为

$$k_{PQ}=\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4+\Delta x.$$

当 Δx 无限趋近于 0 时，k_{PQ} 无限趋近于常数 4，从而曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2, 4)$ 处的切线斜率为 4.

EXCEL

在 Excel 中计算可知（如图 1-1-9），当 Δx 越接近 0，割线斜率 k_{PQ} 就越接近常数 4.

	A	B	C	D
1	Δx	$\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}$	Δx	$\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}$
2	1	5	-1	3
3	0.1	4.1	-0.1	3.9
4	0.01	4.01	-0.01	3.99
5	0.001	4.001	-0.001	3.999
6	0.0001	4.0001	-0.0001	3.9999
7	0.00001	4.00001	-0.00001	3.99999

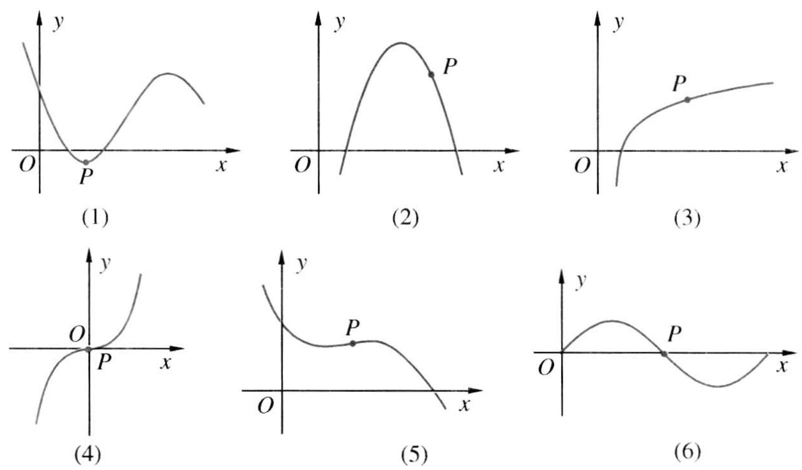
单元格 B2, D2 中的公式.

	B	C	D
2	=((2+A2)^2-2^2)/A2	-1	=((2+C2)^2-2^2)/C2

图 1-1-9

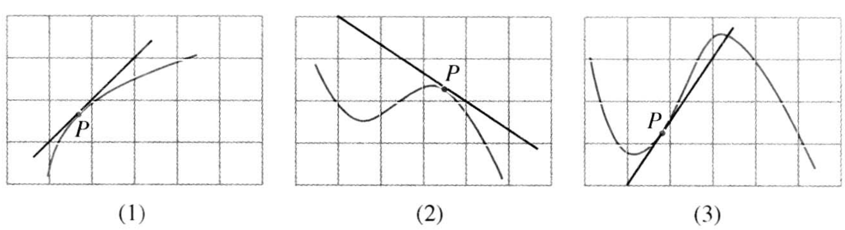
练　习

1. 利用直尺，用割线逼近切线的方法作出下列曲线在 P 点处的切线.



（第 1 题）

2. 在下列 3 个图中，直线 l 为曲线在点 P 处的切线，分别求 l 的斜率.

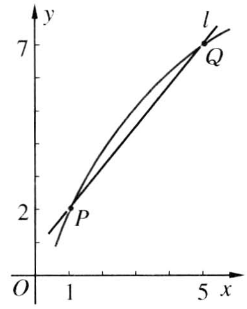


（第 2 题）

3. 如图，l 为经过曲线上点 P 和 Q 的割线.

(1) 若 $P(1,\ 2)$，$Q(5,\ 7)$，求 l 的斜率；

(2) 当 Q 沿曲线向点 P 靠近时，l 的斜率变大还是变小？



（第 3 题）

4. 运用例 1 中割线逼近切线的方法，分别求曲线 $y=x^2$ 在 $x=0$，$x=-2$，$x=3$ 处的切线斜率.

2. 瞬时速度与瞬时加速度

在物理学中，运动物体的位移与所用时间的比称为**平均速度**(mean velocity)，它反映了物体在某段时间内运动的快慢程度. 那么，如何精确刻画物体在某一时刻运动的快慢程度呢？

我们先看下面的实例. 跳水运动员从 10 m 跳台腾空到入水的过程中，不同时刻的速度是不同的. 假设 t s 后运动员相对于水面的高度为

$$H(t)=-4.9t^2+6.5t+10,$$

试确定 $t=2$ s 时运动员的速度.

先求出运动员在 2 s 到 2.1 s(即 $t\in[2,\ 2.1]$) 的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{H(2.1)-H(2)}{2.1-2}=-13.59(\text{m/s}).$$

同样，可以算出更短的时间内的平均速度.

	A	B	C	D	E	F
1	时间区间	Δt	平均速度	时间区间	Δt	平均速度
2	[2, 2.1]	0.1	-13.59	[1.9, 2]	-0.1	-12.61
3	[2, 2.01]	0.01	-13.149	[1.99, 2]	-0.01	-13.051
4	[2, 2.001]	0.001	-13.1049	[1.999, 2]	-0.001	-13.0951
5	[2, 2.0001]	0.0001	-13.10049	[1.9999, 2]	-0.0001	-13.09951
6	[2, 2.00001]	0.00001	-13.100049	[1.99999, 2]	-0.00001	-13.099951

单元格 C2 中的公式.

	C
2	=((-4.9*(2+B2)^2+6.5*(2+B2)+10)-(-4.9*2^2+6.5*2+10))/B2

图 1-1-10

由图 1-1-10 可以看出，当 Δt 越接近 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 越接近