高等数学

解题指引与同步练习

③ 微分中值定理与导数的应用

曾令武　吴　满　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指引与同步练习/曾令武,吴满编著.—广州：华南理工大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-5623-2708-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①曾…②吴… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 200962 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487 87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn http://www.scutpress.com.cn
责任编辑：欧建岸 乔 丽
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开 本：787mm×960mm 1/16 **印张**：32 **字数**：645 千
版 次：2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷
印 数：1～5000 册
定价（1～10 册）：48.50 元

前　　言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分,它不同于普通高等教育,有着自身的特点.因此,编写、使用适合成人教育特点的教材及辅导用书,是提高教学质量的有力保证.作者从事各类不同层次数学学科的教学近50年,在长期的教学实践中,深知要使学生掌握数学的"三基"(基本概念、基本理论、基本方法),必须要通过一定数量的习题练习才能实现.为了达到这个目标,作者作了一种新的尝试,把辅导与练习合编成一册,即对每章的"三基"内容给予小结,并举例作解题指引,接着安排一些基本练习题给读者反复练习,以便及时巩固"三基".然后配置适量的拓展题给读者一个充分训练的平台.章末附有习题答案.

本书可作为成人高等教育院校各类专业的辅导用书.对专科学生,书中的拓展题部分及有"*"号标记的内容不作要求.

本书的编写和出版,自始至终得到了华南理工大学继续教育学院有关领导的大力支持,在此向他们表示感谢.

由于水平所限,书中不完善之处,恳请同仁和读者批评指正.

编　者

2007年10月于广州

出版说明

由吴满、曾令武编著的这套教学辅导与练习册，在华南理工大学继续教育学院使用已 10 年，一直得到任课教师和学生的好评，这次出版的是第三次修订本.

学好数学就一定要做习题.我国伟大的数学家华罗庚说过，“学数学不做习题，等于你进了一个宝藏后出来时却是两手空空的”.两位作者从事成人教育多年，十分了解成人教育的特点，即学员都是在做好本职工作的前提下，业余学习，甚至部分学生还需兼顾家庭.因此，如何利用更少的时间完成学习任务是学生面对的实际问题.作者根据多年的教学经验，把辅导与练习合编成一册，对每章的“三基”内容给予小结，并精选一些例题，指引学生掌握解题的要领.然后安排一些基本题型，分类编排，使学生由浅入深地掌握数学的基本知识.最后配置适量的拓展题给学生一个充分训练的平台，使部分学生的学习能力提高一个层次，为以后深造打下坚实的基础.

练习题目都留出空白给学生解题之用，免去再抄题目而省时，任课教师批改作业也很方便.因此，这是一套很实用的教辅工具.

华南理工大学继续教育学院
教学主管院长　金军

微分中值定理与导数的应用

利用导数研究函数及其曲线的某些性态,并应用这些知识解决一些实际问题是本章的重点内容.

一、微分中值定理

微分中值定理是罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理的统称.这些定理的共同点是:建立函数在一个区间上增量与区间内某一个点处的导数之间的联系,它是沟通函数局部性态和整体性态的桥梁,也是导数应用的理论依据.学习要求是会叙述前两个定理的条件和结论.

1. 罗尔定理

若函数 $y=f(x)$满足条件:(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;(2) 在开区间(a,b)内可导;(3) $f(a)=f(b)$.则在开区间(a,b)内至少有一点 ξ,使得

$$f'(\xi)=0 \quad (a<\xi<b)$$

注意,罗尔定理的条件是充分非必要的,即当满足定理条件时,结论必定成立.而当定理三个条件至少有一个不满足时,结论可能成立,也可能不成立.

2. 拉格朗日中值定理

如果函数 $f(x)$满足:(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;(2) 在开区间(a,b)内可导.则至少有一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{或} \qquad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

定理的条件亦是充分条件.

由拉格朗日中值定理可以得出将在积分学中有用的两个推论:

推论 1 若 $f'(x)$在(a,b)内恒等于零,则 $f(x)$在(a,b)内必为常数;

推论 2 若在(a,b)内恒有 $f'(x)=g'(x)$,则有 $f(x)=g(x)+C$(C 是任意常数).

例 1 下列函数在区间$[-1,1]$上满足罗尔定理条件的是( ).

A. $y=\frac{\sin x}{x}$ B. $y=(x+1)^2$ C. $y=|x|$ D. $y=x^2+1$

解 对每个函数都依照罗尔定理的三个条件逐一检查：

A. $y=\frac{\sin x}{x}$在$x=0$无定义，所以不连续，因此$y=\frac{\sin x}{x}$在区间$[-1,1]$上不满足罗尔定理的条件.

B. $y=(x+1)^2$在区间$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$内可导，但$f(-1)=0\neq f(1)=4$，因此也不满足罗尔定理的条件.

C. $y=|x|$在区间$[-1,1]$上连续，但在$x=0$处不可导，因此不满足罗尔定理的条件.

D. $y=x^2+1$在区间$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$内可导，并且$f(-1)=2=f(1)$，因此满足罗尔定理的条件.

综上所述，应选 D.

例 2 验证函数$f(x)=\sin x$在区间$[0,\pi]$上满足罗尔定理的条件，并求出符合定理结论的ξ的值.

解 因$f(x)=\sin x$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，并且$f(0)=f(\pi)=0$，故函数满足罗尔定理的条件. 则必存在$\xi\in(0,\pi)$，使

$$f'(\xi)=\cos\xi=0$$

解得

$$\xi=\frac{\pi}{2}\in(0,\pi)$$

例 3 验证函数$f(x)=2x^2-x$在区间$[1,2]$上满足拉格朗日中值定理的条件，并求出符合定理结论的ξ值.

解 函数$f(x)=2x^2-x$在区间$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内存在导数$f'(x)=4x-1$，因此满足拉格朗日中值定理的条件. 则必存在$\xi\in(1,2)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\qquad \text{即}\qquad 4\xi-1=\frac{6-1}{2-1}=5$$

解得

$$\xi=\frac{3}{2}\in(1,2)$$

例 4 验证函数$f(x)=\ln(1+x)$在区间$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理的条件，并求出符合定理结论的ξ值.

解 函数$f(x)=\ln(1+x)$在区间$[0,1]$上连续，其导数$f'(x)=\frac{1}{1+x}$在$(0,1)$内有意义，所以在$(0,1)$内处处可导，满足拉格朗日中值定理的条件. 则必存在$\xi\in(0,1)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\qquad \text{即}\qquad \frac{1}{1+\xi}=\frac{\ln2-\ln1}{1-0}=\ln2$$

解得

$$\xi = \frac{1}{\ln 2} - 1 \in (0,1)$$

习题 3 − 1

基本练习题

1. 选择一个正确的答案填在括号中:

(1) 下列函数中,在闭区间$[-1,1]$上满足罗尔定理条件的是 (　　)

A. $y=e^x$　　B. $y=1+|x|$　　C. $y=1-x^2$　　D. $y=\ln x$

(2) 函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$在下列指定区间上,能满足罗尔定理全部条件的是区间 (　　)

A. $[-2,0]$　　B. $[0,1]$　　C. $[-1,2]$　　D. $[-2,2]$

(3) 函数 $f(x)=x^3+2x$ 在区间$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理的条件,则该函数在$(0,1)$内符合定理结论的 ξ 值是 (　　)

A. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　　B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$　　C. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　　D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. 验证函数 $f(x)=x\sqrt{1-x}$在区间$[0,1]$上满足罗尔定理的条件,并求出符合定理结论的 ξ 值.

解

3. 验证函数 $f(x)=\arctan x$ 在$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理的条件,并求出符合定理结论的 ξ 值.

解

拓展题

4. 对于函数 $f(x)=x(x+1)(x-2)$不求出导数 $f'(x)$的表达式,判定方程 $f'(x)=0$ 有几个实根,并指出所在的区间.(提示:利用罗尔定理)

解

5. 证明当 $x>0$ 时,$\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.(提示:利用推论 1)

证

二、洛必达法则

求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$,若它属$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型时,一般都先考虑应用洛必达法则:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{存在})\text{或}\infty$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$.

解法 1 所给极限属$\dfrac{0}{0}$型.若用第一章的求极限方法,分子、分母应分解出极限为 0 的因式$(x-1)$将其约去,得

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x+1}=2$$

解法 2 应用洛必达法则有

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+2x-3)'}{(x^2-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{2x+2}{2x}=2$$

例 6 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

解法 1 所给极限属$\dfrac{0}{0}$型.应用第一章的极限运算法则和重要极限,得

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}=\frac{1}{2}$$

解法 2 应用洛必达法则有

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)}{2x}=\frac{1}{2}$$

洛必达法则把求函数比的极限转化为求导数比的极限,在许多情况下,导数比的极限比原来函数比的极限更容易求得.但使用法则时应注意以下几点:

(1) 使用洛必达法则求函数比的极限时应注意使用条件.如果导数比的极限仍为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型,且也满足洛必达法则的条件,则可以再次使用洛必达法则;

(2) 使用洛必达法则的过程中,若极限函数含有定式因子,应将其分离出来单独求极限,余下部分使用洛必达法则,求导运算才简单;

(3) 使用洛必达法则应该与第一章中求极限的方法,特别是在乘、除的情况下用等价无穷小替换的方法结合起来,常能简化运算;

(4) 对其他未定式,主要是$(0\cdot\infty)$型和$(\infty-\infty)$型,要根据函数的特点进行适当的恒等变形,转换为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型后,才能使用洛必达法则;

(5) 当 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在($\infty$除外)时,洛必达法则失效,这时应改用其他求极限方法去求 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

例 7　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-x-1}{\sin x^{2}}$.

解法 1　所给极限属$\dfrac{0}{0}$型.应用洛必达法则有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-x-1}{\sin x^{2}} &= \lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{\cos x^{2}\cdot 2x}\left(\frac{0}{0}\text{ 型. 因}\lim_{x\to0}\cos x^{2}=1\neq0,\text{应分离出来}\right)\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos x^{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}\left(\frac{0}{0}\text{ 型. 再用洛必达法则}\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^{x}}{1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

解法 2　当 $x\to0$ 时，$\sin x^{2}\sim x^{2}$. 因此，先用等价无穷小代换，然后再使用洛必达法则得

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-x-1}{\sin x^{2}} &= \lim_{x\to0}\frac{e^{x}-x-1}{x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{2x}\left(\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to0}\frac{e^{x}}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

解法 3　在上述解题过程中，若第 1 次使用洛必达法则之后再利用当 $x\to0$ 时，$e^{x}-1\sim x$，则不需要第 2 次使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-x-1}{\sin x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-x-1}{x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

*__例 8__　求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^{3}}\right)$.

解　所给极限属$\infty-\infty$型.一般遇到分式应先通分(遇到根式应先有理化)化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，再使用洛必达法则.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^{3}}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^{2}-3}{1-x^{3}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+2x}{-3x^{2}}=-1$$

*__例 9__　求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

解　所给极限属 $0\cdot\infty$型.应该先把极限函数变形化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，再使用洛必达法则.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}x\cdot(e^{\frac{1}{x}}-1) &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)}{-\frac{1}{x^{2}}}\\
&= \lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{0}=1
\end{aligned}
$$

例 10　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$.

解 这是一个$\frac{\infty}{\infty}$型极限.若应用洛必达法则,由于分子、分母分别求导后的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\cos x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}(1-\sin x)$$

不存在,洛必达法则的条件不满足,方法不适用,此时改用其他方法求极限.事实上

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\cos x\right)\\&=1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos x\text{(无穷小乘有界量)}=1\end{aligned}$$

习题 3－2

基本练习题

6. 选择一个正确的答案填在括号中:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=$ ( )

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}=$ ( )

A. 0　　B. ∞　　C. -1　　D. 1

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}=$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. ∞　　D. 不存在

(4) 下列极限不能使用洛必达法则的是 ( )

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$　　B. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{e^3-e^x}{x-3}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{x-1}$　　D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2x+3}{x-1}$

7. 用洛必达法则求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

解

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{3x+1}-2}$；

解

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-b^x}{x}(a>0,b>0)$；

解

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}$；

解

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sqrt{x^3}}$；

解

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

解

8．用洛必达法则求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$（$n$ 为正整数）；

解

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1-2x^3}{3x+x^3}$；

解

(3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin x)}$；

解

(4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\ln\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\tan x}$．

解

拓展题

9．用洛必达法则求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x^2} \ln x$；

解

(2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$；

解

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)$；

解

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$；

解

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$；

解

(6) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$；

解

(7) $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解

10. 采用适合的求极限方法计算下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{(e^x - 1)\sin x}{1 - \cos x}$；

解

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x \arcsin x^2}$；

解

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x \arctan x^2}$；

解

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x \sin x^2}$；

解

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 + x^2}}{\sin 4x^2}$；

解

(6) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - \sin x}{x + \cos x}$；

解

(7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$；

解

(8) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$．

解

11．若 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + ax + b}{\sin(x^2 - 1)} = \dfrac{3}{2}$，试确定 a，b 之值．

解