独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

# 高等数学

## 下册

主　编　夏亚峰

副主编　杨　宏

科学出版社
www.sciencep.com

独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

# 高等数学

（下册）

主　编　夏亚峰
副主编　杨　宏

科学出版社
北　京

# 内 容 简 介

本书是在高等教育大众化和办学层次多样化的新形势下，结合工科本科高等数学的教学基本要求，在独立学院多年教学经验的基础上编写而成的.

全书分为上、下两册. 上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用. 下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程、曲线积分与曲面积分、数学建模初步. 节后配有习题，书后附有部分习题答案. 全书尽量削枝强干、分散难点，力求结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂.

本书可供工科各专业学生使用，也可供广大教师、工程技术人员参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学. 下册/夏亚峰主编. —北京：科学出版社，2010. 8
(独立学院应用型创新人才培养系列规划教材)
ISBN 978-7-03-028756-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①夏… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 163978 号

责任编辑：李鹏奇 滕亚帆 王国华 / 责任校对：朱光兰
责任印制：张克忠 / 封面设计：鑫联必升

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 8 月第一次印刷 印张：31
印数：1—3 500 字数：610 000

**定价：48.00 元(上、下册)**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前言

本书是面向独立学院工科类各专业学生编写的高等数学教材.

随着我国高等教育的大众化和办学层次的多样化,因材施教已成为当前教学改革和课程建设的重要内容之一.本书根据国家质量工程全面提高本科生素质教育的指导思想,结合工科本科高等数学的教学基本要求,在独立学院多年教学经验的基础上编写而成.近年来的教学实践与研究表明,独立学院的数学教学必须与独立学院的人才培养层次和模式紧密联系.因而本书的编写不仅强调学生掌握高等数学的基本概念、基本方法与基本技能,而且强调培养学生利用数学方法分析和解决工程实际问题的能力.

本书分为上、下两册.上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用.下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程、曲线积分与曲面积分、数学建模初步,下册中部分内容可根据教学需要适当删减.节后配有习题,书后附有部分习题答案.

本书在编写上尽量体现以下特点:

(1) 从独立学院工科类专业学生的基础出发,适度弱化一些纯数学理论及一些有难度的定理的证明,而代之以直观的几何说明;

(2) 结合独立学院工科类专业学生的实际需要,在编写过程中尽量削枝强干、分散难点,力求结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂;

(3) 侧重于培养学生的应用意识与应用能力,增加数学建模实例与训练,在例题与习题选编上,侧重于应用,未编入理论性较强的证明题与概念题.

参加本书编写的有夏亚峰、杨宏、玄海燕、罗双华、李冬娜、李建生.

本书的编写得到了兰州理工大学技术工程学院的支持与帮助,在此表示衷心的感谢.

本书中的不妥及错误之处,真诚希望读者批评指正.

编　者

2010 年 6 月

# 目　录

前言
第 8 章　向量代数与空间解析几何……1
8.1　向量及运算……1
8.2　向量的乘积运算……9
8.3　平面的方程……15
8.4　直线的方程……19
8.5　曲面与曲线……25
第 9 章　多元函数微分学……35
9.1　多元函数的极限与连续性……35
9.2　偏导数……39
9.3　全微分及其应用……45
9.4　复合函数与隐函数的微分法……50
9.5　隐函数的求导公式……55
9.6　多元函数的极值问题……59
第 10 章　重积分……67
10.1　二重积分的概念及性质……67
10.2　二重积分的计算……72
10.3　三重积分……83
10.4　重积分的应用……92
第 11 章　无穷级数……98
11.1　常数项级数的概念及性质……98
11.2　常数项级数敛散性的判别法……102
11.3　幂级数……109
11.4　函数的幂级数展开……117
11.5　函数的幂级数展开式的应用……123
11.6　傅里叶级数……128
11.7　周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数……135
第 12 章　微分方程……138
12.1　微分方程的基本概念……138
12.2　可分离变量的微分方程……141

12.3 齐次方程 …… 145
12.4 一阶线性微分方程 …… 150
12.5 可降阶的高阶微分方程 …… 155
12.6 高阶线性微分方程及其通解结构 …… 160
12.7 二阶常系数线性齐次微分方程 …… 163
12.8 二阶常系数线性非齐次微分方程 …… 167
**第 13 章　曲线积分与曲面积分** …… 172
13.1 对弧长的曲线积分 …… 172
13.2 对坐标的曲线积分 …… 176
13.3 格林公式　曲线积分与路径的无关性 …… 183
13.4 第一型曲面积分 …… 188
13.5 第二型曲面积分 …… 190
13.6 高斯公式与斯托克斯公式 …… 200
**第 14 章　数学建模初步** …… 206
14.1 数学建模基础知识 …… 206
14.2 数学建模实例 …… 210
14.3 数学建模竞赛 …… 229
14.4 全国数学建模竞赛优秀论文赏析——雨量预报方法的评论模型 …… 231
14.5 数学软件简介 …… 244
**部分习题答案** …… 249

# 第 8 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何知识对学习多元函数微积分很重要，因为空间解析几何可通过坐标法把空间上的点与有序数组对应起来，从而把空间上的图形和方程对应起来，即可用代数方法来研究几何问题.

## 8.1　向量及运算

### 8.1.1　空间直角坐标系

过空间一定点 $O$，作三条互相垂直的数轴，它们以 $O$ 为原点，且一般具有相同的长度单位，这三条轴分别称为 $x$ 轴（横轴）、$y$ 轴（纵轴）、$z$ 轴（竖轴），且统称为**坐标轴**. 通常把 $x$ 轴、$y$ 轴配置在水平面上，而 $z$ 轴则是铅垂线，它们的正方向要符合右手规则：

右手握住 $z$ 轴，当右手的四个指头从 $x$ 轴的正向以 $90°$ 角度转向 $y$ 轴正向时，大拇指的指向就是 $z$ 轴正向（图 8.1）. 这样就建立了空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ **直角坐标系**，点 $O$ 称为**坐标原点**.

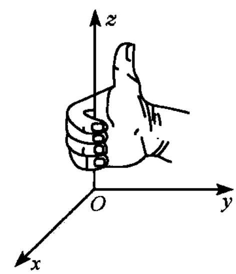


图 8.1

说明：为使空间直角坐标系画得更富于立体感，通常把 $x$ 轴与 $y$ 轴间的夹角画成 $130°$左右. 当然，它们的实际夹角还是 $90°$.

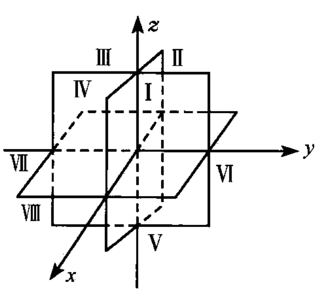


图 8.2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，称为**坐标面**. 由 $x$ 轴与 $y$ 轴所决定的坐标面称为 $xOy$ 面，另外还有 $xOz$ 面与 $yOz$ 面. 三个坐标面把空间分成了八个部分，这八个部分称为**八个卦限**，其中在 $xOy$ 面上方并且在 $yOz$ 面前方、$xOz$ 面右方的那个卦限称为第Ⅰ卦限、$xOy$ 面上按逆时针方向依次为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限，在 $xOy$ 面下方与Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限相对的依次是Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限（图 8.2）.

取定空间直角坐标系之后，就可以建立起空间点与有序数组之间的对应关系. 设 $M$ 为空间的一点，过 $M$ 点分别作垂直于 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的三个平面，它们与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的交点依次为 $P,Q,R$，这三点在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的坐标依次为 $x,y,z$，于是，空间一点就唯一地确定了一个有序数组 $x,y,z$. 反过来，若已知一有序数

组 $x,y,z$,可以在 $x$ 轴上取坐标 $x$ 的点 $P$,在 $y$ 轴上取坐标为 $y$ 的点 $Q$,在 $z$ 轴取坐标为 $z$ 的点 $R$,然后过 $P,Q,R$ 分别作 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的垂直平面,这三个平面的交点 $M$ 就是以有序数组 $x,y,z$ 为坐标的空间点. 这样,通过空间直角坐标系,建立了空间点 $M$ 和有序数组 $x,y,z$ 之间的一一对应关系(图 8.3),称 $x,y,z$ 为点 $M$ 的**坐标**. 依次称 $x,y,z$ 为点 $M$ 的**横坐标**、**纵坐标**、**竖坐标**,记作 $M(x,y,z)$.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间的两点,过 $M_1,M_2$ 各作三个分别垂直于三坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 $M_1M_2$ 为对角线的长方体(图 8.4),各棱边长度分别为 $|x_2-x_1|,|y_2-y_1|,|z_2-z_1|$.

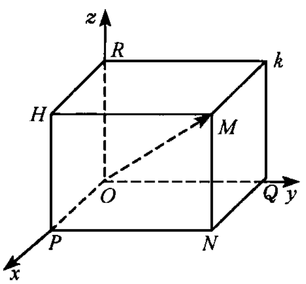


图 8.3

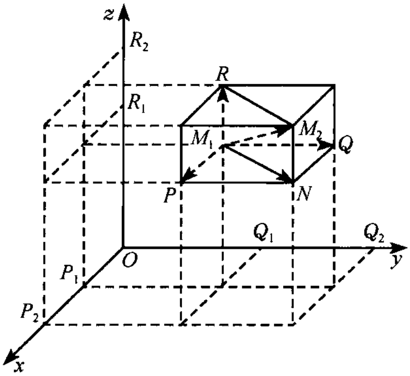


图 8.4

由勾股定理,对角线 $M_1M_2$ 的长度,即**空间两点间的距离**为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地,点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

**例 8.1** 求证以 $M_1(4,3,1)$,$M_2(7,1,2)$,$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

**解**

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$
$$|M_2M_3|=|M_3M_1|,$$

原结论成立.

**例 8.2** 在 $z$ 轴上,求一点 $M$,使该点到点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 的距离相等.

**解** 因为所求的点在 $z$ 轴上,所以设该点为 $M(0,0,z)$,由题意有 $|MA|=|MB|$,即

$$\sqrt{(-4)^2+1^2+(7-z)^2}=\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2},$$

两边平方，解得 $z=\dfrac{14}{9}$. 于是所求点为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

### 8.1.2　向量的概念

在研究实际问题时，我们通常遇到两种不同类型的量：一类是只有大小的量，如温度、质量、体积等，这种量称为**数量**或**标量**；另一类既有大小又有方向，如力、速度、加速度等，这种量称为**向量**或**矢量**.

数学上用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 $M_1$ 为始点，$M_2$ 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 通常也用粗体字母或一个上面加有箭头的字母表示向量，如向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 或 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 等.

向量的大小称为向量的**模**，向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$.

模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**，并记作 $\mathbf{0}$，并规定零向量的方向为任意的.

在直角坐标系中，以坐标原点为始点，向一点 $M$ 引向量，这个向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 $M$ 对于原点 $O$ 的**向径**，常用 $\boldsymbol{r}$ 表示，即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$. 空间的每一点都对应一个向径 $\overrightarrow{OM}$，反过来，每个向径 $\overrightarrow{OM}$ 都和它的终点 $M$ 相对应.

一切向量的共性是：它们都有大小和方向. 因此，在数学上我们只研究与始点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**，简称**向量**.

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ **相等**，并记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 显然，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，经过平行移动之后，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 能完全重合在一起.

如向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同方向或者反方向，称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量方向是任意的，故认为零向量与任何向量都平行.

### 8.1.3　向量的线性运算

1. *向量的加法*

1）平行四边形法则

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 为边作一平行四边形 $OACB$，取对角线向量 $\overrightarrow{OC}$，记 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，并记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 8.5）.

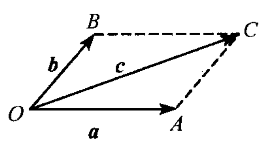

图 8.5

这种用平行四边形的对角线向量来规定两个向量之和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**.

如果向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ 在同一直线上，那么，规定它们的和是这样一个向量：若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的指向相同，和向

量的方向与原来两向量相同,其模等于两向量的模之和(图 8.6). 若$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的指向相反,和向量的模等于两向量的模之差,其方向与模值大的向量方向一致(图 8.7).

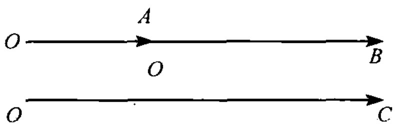


图 8.6

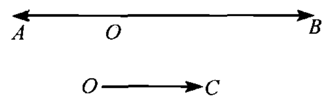


图 8.7

2) 三角形法则

由于平行四边形的对边平行且相等,可以这样来作出两向量的和向量:作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,以$\overrightarrow{OA}$的终点为起点作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,连接$\overrightarrow{OC}$得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}.$$

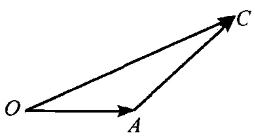


图 8.8

该方法称为向量加法的三角形法则(图 8.8).

向量加法的三角形法则的实质是:将两向量的首尾相连,则一向量的首与另一向量的尾的连线就是两向量的**和向量**. 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记作$-\boldsymbol{a}$. 规定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

特别地,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由向量加法的三角形法则可看出:要从 $\boldsymbol{a}$ 减去 $\boldsymbol{b}$,只要把与 $\boldsymbol{b}$ 长度相同而方向相反的向量$-\boldsymbol{b}$ 加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上去. 由平行四边形法则,可如下作出向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 8.9).

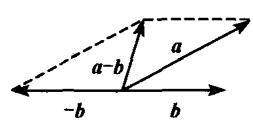


图 8.9

**例 8.3**　证明三角形两边的中点的连线平行于第三边,且长等于第三边的一半.

**证明**　记△$ABC$ 的三边分别为$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AB}$,$E$,$F$ 分别为 $AB$,$AC$ 的中点,则

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

所以

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

故

$$EF=\frac{1}{2}BC.$$

2. 向量与数量的乘法

设 $\lambda$ 是一个数量,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda$ 的乘积规定如下:

(1) 当 $\lambda>0$ 时,向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,其模等于$|\boldsymbol{a}|$的 $\lambda$ 倍,即$|\lambda\boldsymbol{a}|=$

$\lambda\cdot|\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda=0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量，即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(3) 当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，其模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$.

特别地，取 $\lambda=-1$，则向量 $(-1)\cdot\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，而方向相反. 由负向量的定义知：$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

**结论 8.1**　若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$（$\lambda$ 为数量），则向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行；反之，若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行，则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$（$\lambda$ 是数量）.

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的**单位向量**，则

$$\left|\,|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^0\right|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}^0|=|\boldsymbol{a}|,$$

即

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^0.$$

规定：若 $\lambda\neq0$，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}$. 于是 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

这表明：一个非零向量除以它的模是一个与原向量同方向的单位向量.

注意：向量之间并没有定义除法运算，因此绝不能将式子 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 改写成形式 $|\boldsymbol{a}|=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^0}$.

3. 线性运算的性质

1) 加减运算性质（图 8.10）

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

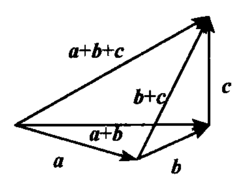


图 8.10

2) 数乘运算性质

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的方向是一致的，且 $|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu|\cdot|\boldsymbol{a}|$.

(2) 分配律：

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

以上性质，利用平面几何的知识是很容易证明的.

### 8.1.4　向量的坐标

为摆脱几何表示向量运算的烦琐与杂乱，运用代数的方法来表示，则建立向量

与数的联系,把向量放在直角坐标系中加以讨论,定义向量的坐标,从而把向量与有序数组对应起来.

1. 向量的坐标

在空间直角坐标系中,记 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 $x,y,z$ 轴正向的单位向量,并称它们为这一坐标系的基本单位向量.

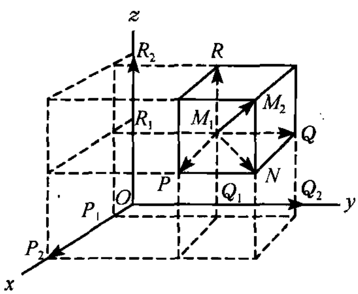


图 8.11

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是一空间向量,其始点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,过点 $M_1,M_2$ 各作垂直于三个坐标轴的平面,这六个平面围成一个以线段 $M_1M_2$ 为对角线的长方体(图 8.11).

从图 8.11 中可以看出

$$\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}=\overrightarrow{M_1N},\quad \overrightarrow{M_1N}+\overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{M_1M_2},$$
$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R},$$

由向量与和它同方向的单位向量的关系,知

$$\overrightarrow{M_1P}=\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{M_1Q}=\overrightarrow{Q_1Q_2}=(y_2-y_1)\boldsymbol{j},$$
$$\overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{R_1R_2}=(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{Q_1Q_2}+\overrightarrow{R_1R_2},$$

分别称向量 $\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{Q_1Q_2},\overrightarrow{R_1R_2}$ 为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 $x,y,z$ 轴上的**投影向量**,称它们分别为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 $x,y,z$ 轴上的**分向量**. 分别称 $x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $x,y,z$ 轴上的**投影**,记作 $a_x,a_y,a_z$,则

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$
$$=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 按基本单位向量的分解式.

一方面,由向量 $\boldsymbol{a}$ 可以唯一地定出它在三条坐标轴上的投影 $a_x,a_y,a_z$;另一方面,由 $a_x,a_y,a_z$ 又可以唯一地定出向量 $\boldsymbol{a}$. 这样,向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 $a_x,a_y,a_z$ 之间建立了一一对应的关系.

称向量 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影 $a_x,a_y,a_z$ 为向量的**坐标**,将表达式 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式**.

以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为始点及 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量的坐标式可表示成

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

特别地,空间点 $M(x,y,z)$ 对于原点的向径为

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\{x,y,z\},$$

即如果向量的起点为坐标原点,则这个向量的坐标与它的终点的坐标是一致的.

2. 向量的模与方向余弦的坐标表示式

设空间向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{a_x,a_y,a_z\}$，其起点和终点坐标为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，由空间两点距离公式知 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

又因

$$a_x=x_2-x_1,\quad a_y=y_2-y_1,\quad a_z=z_2-z_1,$$

于是有

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{8.1}$$

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的正向的夹角分别为 $\alpha,\beta,\gamma$.

**规定**　$0\leqslant\alpha\leqslant\pi, 0\leqslant\beta\leqslant\pi, 0\leqslant\gamma\leqslant\pi$，称 $\alpha,\beta,\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**(图 8.12).

因为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标就是向量在坐标轴上的投影，因此

$$\begin{aligned} a_x&=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\\ a_y&=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\\ a_z&=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma,\end{aligned} \tag{8.2}$$

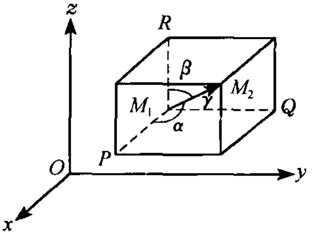


图 8.12

(8.2)式中出现的 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\{a_x,a_y,a_z\}=\{|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\ |\boldsymbol{a}|\cos\beta,\ |\boldsymbol{a}|\cos\gamma\}\\ &=|\boldsymbol{a}|\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}^0\doteq\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\[2ex] \cos\beta=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\[2ex] \cos\gamma=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\end{cases} \tag{8.3}$$

并且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

(8.1)式、(8.3)式分别给出了用坐标式给出的向量 $\boldsymbol{a}$ 的模与方向的计算公式.

3. 向量线性运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

于是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{cases}a_x-b_x=0\\a_y-b_y=0\\a_z-b_z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_x=b_x,\\a_y=b_y,\\a_z=b_z,\end{cases}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.$$

最后，我们得到了向量加减与数乘运算的坐标表示式

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\},$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,\quad a_y=b_y,\quad a_z=b_z.$$

因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 按向量的坐标表示即为

$$\{b_x,b_y,b_z\}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.$$

因此，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件为

$$b_x=\lambda a_x,\quad b_y=\lambda a_y,\quad b_z=\lambda a_z,$$

或写为

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda,$$

即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的对应坐标成比例(若 $a_x,a_y,a_z$ 中某个为零，则上式中理解为相应的分子为零).

**例 8.4** 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$.

**解**

$$\overrightarrow{AB}=\{7-4,1-0,3-5\}=\{3,1,-2\},$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14},$$

$$\boldsymbol{a}^0=\left\{\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right\}.$$

**例 8.5** 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

**解**

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-2,3-2,0-\sqrt{2}\}=\{-1,1,-\sqrt{2}\},$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2,$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \lambda=\frac{3\pi}{4}.$$

## 习　题　8.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限.

$A(1,-2,-3)$，$B(2,3,-4)$，$C(-4,-5,6)$，$D(5,-6,7)$，$E(-1,-2,-3)$，$F(-2,1,-3)$.

2. 指出下列各点所在的位置.

$A(3,4,0)$，　$B(0,2,3)$，　$C(0,3,0)$，　$D(0,0,-1)$.

3. 试写出点$(a,b,c)$关于 $xOy$ 面、关于 $y$ 轴及关于原点对称点的坐标.

4. 求点 $M(4,-3,5)$到各坐标轴的距离.

5. 在 $yOz$ 上求一点，使该点到点 $A(3,0,4)$和 $B(3,4,0)$的距离相等，且与原点的距离为 $3\sqrt{2}$.

6. 已知两点 $A(1,2,3)$和 $B(3,3,2)$.

(1) 写出向量$\overrightarrow{AB}$的坐标表达式；(2) 求$|\overrightarrow{AB}|$.

7. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$. 求 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

8. 设点 $M$ 的坐标为$(-1,1,-\sqrt{2})$，求$\overrightarrow{OM}$的单位向量和方向余弦、方向角.

9. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角都相等，求其方向余弦.

10. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

11. 设 $\boldsymbol{a}=\{-2,1,2,\}$，$\boldsymbol{b}=\{3,0,-4\}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的角平分线的单位向量.

12. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$处，它在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的投影依次为 $4,-4,7$，求该向量的起点 $A$ 的坐标.

13. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 $x$ 轴上的投影及在 $y$ 轴上的分向量.

14. 设 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，若向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，且$|\boldsymbol{b}|=14$，求 $\boldsymbol{b}$ 的坐标表达式.

# 8.2　向量的乘积运算

### 8.2.1　向量的数量积

设有两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 交于点 $s$(若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不相交，可将其中一个向量平移使之相交)，将其中一向量绕 $s$ 点在两向量所决定的平面内旋转，使它的正方向与另一向量的正方向重合，这样得到的旋转角度 $\varphi$(限定 $0<\varphi<\pi$)称为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 间的**夹角**(图 8.13)，记作$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\varphi$.

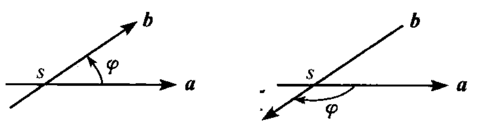


图 8.13

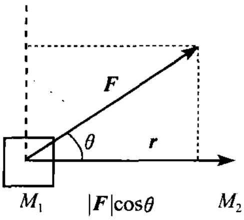

图 8.14

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行，当它们指向相同时，规定它们之间的夹角为 $\varphi=0$；当它们的指向相反时，规定它们的夹角为 $\varphi=\pi$. 若 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\varphi=\frac{\pi}{2}$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

设物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从点 $M_1$ 移到点 $M_2$，用 $\boldsymbol{r}$ 表示位移向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，力 $\boldsymbol{F}$ 在位移方向 $\boldsymbol{r}$ 上的分力大小为 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为(图 8.14)

$$w=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\cos\theta.$$

在流体力学中，求单位时间内通过单位面积 $A$ 的流量 $Q$：

$$h=|v|\cdot\cos\alpha,$$

$$Q=1\cdot|\boldsymbol{v}|\cos\alpha=|\boldsymbol{n}^0|\cdot|\boldsymbol{v}|\cos\langle\boldsymbol{n}^0,\boldsymbol{v}\rangle.$$

由以上实际问题出发，可定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

**定义 8.1**　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两向量，且它们之间的夹角为 $\theta$，称数量 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的**数量积**，亦称**内积**，并记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta.\tag{8.4}$$

(8.4)式中的因子 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影**，记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$，即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$. 当 $\theta$ 是锐角时，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 所在直线上投影线段的长度，当 $\theta$ 是钝角时，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 是投影线段的长度的相反数. 同样因子 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的**投影**，记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$. 因此，有投影公式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

数量积有以下性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律).

(4) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

(5) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$(数乘向量的结合律).

**证明**　(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=0$(而 $|\boldsymbol{a}|\neq0,|\boldsymbol{b}|\neq0$)

$$\Leftrightarrow\cos\theta=0(\text{又 }\theta\in[0,\pi])\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}.$$

(4) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\cdot(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})$

$$=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

(5) 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 $\theta$：

若 $\lambda>0$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，故 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角仍为 $\theta$，于是

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=\lambda\cdot(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta)=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

若 $\lambda<0$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向，故 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角仍为 $\pi-\theta$，于是

$(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = |\lambda \boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos(\pi - \theta) = \lambda \cdot (|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\theta) = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

若 $\lambda = 0$,

$$(0 \cdot \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\theta = 0 = 0 \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}).$$

综上,有 $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ 成立.

类似可证 $\boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

(6) 两向量数量积的坐标表示形式:设 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,则有 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

**证明**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \cdot (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) \\ &= (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \cdot (b_x \boldsymbol{i}) + (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \cdot (b_y \boldsymbol{j}) \\ &\quad + (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \cdot (b_z \boldsymbol{k}) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.\end{aligned}$$

说明:基本单位向量有 $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j} \perp \boldsymbol{k}$,且 $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$.

利用数量积的计算公式,得向量模计算公式:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

(7) 两向量间夹角余弦的坐标表示式:若 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$,由 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\theta$,有

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

并且有 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

**例 8.6**　设 $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \dfrac{\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 和 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$.

**解**

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 1 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3} = 1,$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1^2 + 2^2 + 2 \times 1 = 7,\end{aligned}$$

所以 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{7}$.

**例 8.7**　$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} = \{-3, 0, -4\}$, $\boldsymbol{b} = \{\beta, \gamma, 5\}$,求 $\beta, \gamma$.

**解**

$$\frac{-3}{\beta} = \frac{0}{\gamma} = \frac{-4}{5} \Rightarrow \beta = \frac{4}{15}, \gamma = 0.$$

### 8.2.2　两向量的向量积

设 $O$ 为一根杠杆的支点,有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上的点 $P$ 处,$\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 $\theta$,由力学知识可知,力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 $O$ 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$,它的模为 $|\boldsymbol{M}| = |OQ| \cdot |\boldsymbol{F}| = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\boldsymbol{F}| \cdot \sin\theta$(图 8.15),而方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面,其指向