GONGKELEI YANJIUSHENG
SHUXUE KECHENG FUDAOSHU

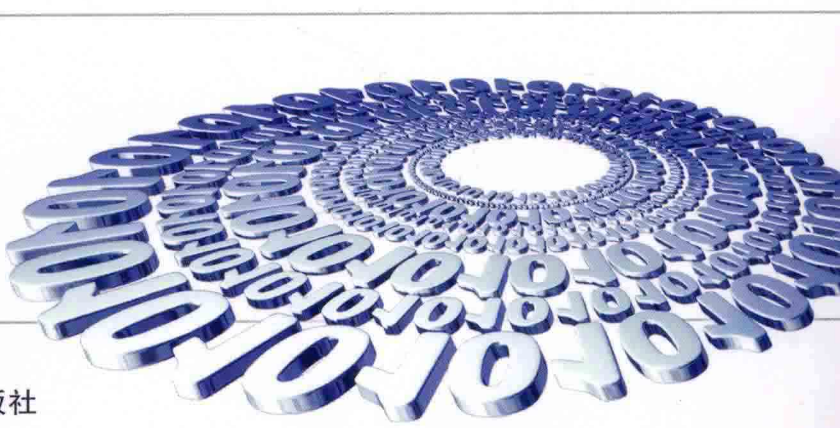
工科类研究生数学课程辅导书

高等工程数学学习指导

[上]

胡庆军　冯良贵/编著

GAODENG GONGCHENG SHUXUE
XUEXI ZHIDAO



国防科技大学出版社

工科类研究生数学课程辅导书

高等工程数学

学习指导

（上）

胡庆军　冯良贵　编著

国防科技大学出版社
·长沙·

内 容 简 介

本书是工科类硕士研究生数学公共课程《高等工程数学》的学习参考书，分上、下两册，上册（矩阵理论）包括五章：线性空间与线性变换、方阵的相似化简、矩阵分析及其应用、矩阵分解及其应用、矩阵的广义逆及其应用；下册（数理统计）包括六章：统计量及其分布、参数估计、假设检验、线性回归分析、方差分析、多元统计分析简介。

本书是广大工科类（包括工程类）硕士研究生在学习研究生课程《高等工程数学》或《矩阵理论》、《数理统计》的学习辅导书，也适合理工科院校高年级本科生阅读，并可供青年科技工作者和工科院校有关专业教师查阅和参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等工程数学学习指导（上）/胡庆军，冯良贵编著．—长沙：国防科技大学出版社，2009.4

ISBN 978-7-81099-603-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．①胡…②冯…　Ⅲ．工程数学—研究生—教学参考资料　Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 022493 号

国防科技大学出版社出版发行

电话：（0731）4572640　邮政编码：410073

http://www.gfkdcbs.com

责任编辑：耿　筠　　责任校对：唐卫葳

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本：787×960　1/16　印张：19.5　字数：382 千

2009 年 4 月第 1 版第 1 次印刷　印数：1-1000 册

ISBN 978-7-81099-603-7

全套定价：76.00 元

前 言

本书是工科类硕士研究生数学公共课程《高等工程数学》的学习参考书，分上、下两册。上册（矩阵理论）包括五章：线性空间与线性变换、方阵的相似化简、矩阵分析及其应用、矩阵分解及其应用、矩阵的广义逆与 Kronecker 积；下册（数理统计）包括六章：统计量及其分布、参数估计、假设检验、线性回归分析、方差分析、多元统计分析简介。每一章按节细分，每一节的具体安排：内容归纳（包括基本概念、主要结论、补充结论和注释）、例题解析、习题、习题解答或参考答案。

本书是作者担任《高等工程数学》课程讲授十多年的经验积累和总结，并汇集了教科书[1-2]的绝大多数习题，且做了较详细的解答；同时还收集了该课程多年的博士生入学考试试题，并按章、节归纳在各个部分作为习题。上册包括 190 多个例题和 250 余道习题，其中带“*”号的例题或习题偏难。

本书条理清楚，层次分明，表达清晰，并具有如下特点：对于每一节，注释中点出了该节内容的重点或难点；主要结论对应到教科书中的有关引理和定理，补充结论对应到教科书中的有关命题、推论和作者总结出来的常用结论，且主要结论和补充结论中的大多数命题，均可从例题和习题中找到证明方法；部分例题是从主要结论或补充结论中的命题挑选出来改造而成的，并给出了相应的证明方法，以此来化解工科学生面对数学定理证明难读懂的障碍，启发他们的数学思维，提高他们的数学逻辑推理能力；对部分例题和习

题给出了一题多解法，以强调对已学知识的灵活运用和各方面知识的综合运用，扩大读者的知识面；对于证明或推导题，强调解题的切入点和解题思路，且推导过程细致，使读者阅读易懂；习题中有许多计算题，以强调读者的计算化简能力。

本书是广大工科类（包括工程类）硕士研究生在学习研究生课程《高等工程数学》或《矩阵理论》、《数理统计》时的学习辅导书，也适合理工科院校高年级本科生阅读，并可供青年科技工作者和工科院校有关专业教师查阅和参考。

由于作者水平有限，纰漏之处在所难免，恳望读者批评指正。

作 者

2009.01

目　录

上册：矩阵理论

第 1 章 线性空间与线性变换

1.1 线性空间

1.1.1 内容归纳

1. 内容提纲

数域、线性空间、零元、负元、向量、向量组的线性组合、线性相关、线性无关；线性空间的维数、基；向量在基下的表示、坐标向量、过渡矩阵、子空间、矩阵的零空间、列空间；向量组的张子空间、和子空间、交子空间、基的扩充定理、维数公式、子空间的直和.

2. 基本概念

1) 数集 F 是**数域**,即指：

$$0,1\in F,\text{且}\forall a,b\in F,\text{有 } a+b,a-b,a\cdot b,\frac{a}{b}(b\neq 0)\in F.$$

2) 设 V 是一非空集合,F 是数域,$\forall \alpha,\beta\in V$,规定一个**加法运算**(记为“+”)：$\alpha+\beta\in V$；又规定一个**数乘运算**：$k\alpha\in V,\forall k\in F$.若这两种运算满足下列八条规律：

加法交换律：$\forall \alpha,\beta\in V$,有 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

加法结合律：$\forall \alpha,\beta,\gamma\in V$,有 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

存在零元：$\exists\,\theta\in V$,使$\forall \alpha\in V$,有 $\alpha+\theta=\alpha$,且称 θ 为 V 的**零元**；

存在负元：$\forall \alpha\in V,\exists\,\beta\in V$,使 $\alpha+\beta=\theta$,且称 β 为 α 的**负元**,记为 $-\alpha$,即 $\alpha+(-\alpha)=\theta$；

数乘分配律①：$\forall k\in F,\forall \alpha,\beta\in V$,有 $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$；

数乘分配律②：$\forall k,l\in F,\forall \alpha\in V$,有 $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

数乘结合律：$\forall k,l\in F,\forall \alpha\in V$,有 $k(l\alpha)=(kl)\alpha$；

酉性：$\forall \alpha\in V$,有 $1\alpha=\alpha$.

则称 V 为数域 F 上的**线性空间**,记为 $V(F)$；在不强调数域时,就称 V 为线性空间,简记为 V.

3) V 中的元称为**向量**；当 $F=\mathbf{R}$ 时,称 V 为**实线性空间**；当 $F=\mathbf{C}$ 时,称 V 为**复线性空间**；元 $\alpha+\beta$ 称为 α 与 β 的**和**,元 $k\alpha$ 称为 k 与 α 的**数积**,加法和数乘通常总称为 V 的**线性运算**.

4) $\forall \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in V(F),k_1,k_2,\cdots,k_m\in F$,称向量 $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\alpha_i$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个**线性组合**.

5) 对于 $V(F)$ 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m\in F$,使

$$\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=\theta,$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **线性相关**；若仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时,上式才能成立,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **线性无关**.

6) 若线性空间 V 存在无限多个线性无关的向量,则称 V 为**无限维**的；若只能找到有限多个线性无关的向量,则称 V 为**有限维**的,且把线性无关向量的最大个数称为 V 的**维数**,记为 $\dim(V)$；$\dim(V)=n$ 的线性空间 V 称为 ***n* 维线性空间**,记为 V^n.

7) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V^n$,且线性无关,则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V^n 的一个**基**,记为 $\mathscr{B}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$；若向量 $\xi=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=\mathscr{B}x$,则称 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 ξ 在基 $\mathscr{B}$ 下的**坐标(向量)**.

8) 设 $\mathscr{B}_\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\},\mathscr{B}_\beta=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 是 V^n 的两个基,若 n 阶方阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$ 满足

$$\mathscr{B}_\beta=\mathscr{B}_\alpha P,$$

则称 P 为由基 $\mathscr{B}_\alpha$ 到 $\mathscr{B}_\beta$ 的**基变换矩阵**(or:**过渡矩阵**).

9) 设 W 是线性空间 V 的非空子集,若 W 中的元关于 V 的线性运算也构成线性空间,则称 W 为 V 的**子空间**.

10) $V,\{\theta\}$(仅由零元构成的子空间)称为 V 的**平凡子空间**；其它子空间称为 V 的**非平凡子空间**.

11) 给定 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$,集合：$N(A)\overset{\mathrm{def}}{=}\{x\mid Ax=0,x\in\mathbf{R}^n\}$ 称为矩阵 A 的**零空间**

(or: **核空间**); 集合: $R(A)\overset{\text{def}}{=}\{y\mid y=Ax,x\in\mathbf{R}^n\}$称为矩阵 A 的**列空间**.

12) 线性空间 $V(F)$的 r 个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 形成的集合:

$$\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}\overset{\text{def}}{=}\{\alpha\mid\alpha=\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i,\forall k_i\in F\},$$

称为由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **张成的子空间**(亦叫**张子空间**).

13) 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的两个子空间,记

$$W_1+W_2=\{\xi\in V\mid\xi=\xi_1+\xi_2,\xi_i\in W_i,i=1,2\},$$
$$W_1\cap W_2=\{\xi\in V\mid\xi\in W_1,\xi\in W_2\},$$

分别称为 W_1 与 W_2 的**和子空间**、**交子空间**.

14) 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的两个子空间,$\forall\xi\in W_1+W_2$,若存在唯一的 $\xi_1\in W_1,\xi_2\in W_2$, 使 $\xi=\xi_1+\xi_2$,则称 W_1+W_2 为 W_1 与 W_2 的**直和**,记为

$$W_1\oplus W_2(=W_1+W_2).$$

3. 主要结论

1) 线性空间 V^n 中的任一向量ξ 都可由基 $\mathscr{B}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$唯一地线性表示.

2) **基的扩充定理**:设 W 是线性空间V^n 的r 维子空间,$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$是 W 的一个基,则必存在 $n-r$ 个向量$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$,使得$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$是 V^n 的一个基.

3) 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的两个子空间,则 $W_1\cap W_2,W_1+W_2$ 都是 V 的子空间.

4) **维数公式**: 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的两个子空间,则

$$\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2).$$

5) 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的两个子空间,则 $W_1+W_2=W_1\oplus W_2\Leftrightarrow$ 是下列条件之一成立:

① $W_1\cap W_2=\{\theta\}$;

② 若 $\xi_1+\xi_2=\theta,\xi_i\in W_i,i=1,2$,则 $\xi_1=\xi_2=\theta$;

③ $\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)$.

6) 设 V_1 是线性空间 V^n 的子空间,则存在子空间 V_2,使 $V_1\oplus V_2=V^n$.

4. 补充结论

1) 线性空间中的零元是唯一的; $\forall \alpha \in V$(线性空间),则 α 存在唯一的负元.

2) 由于负元的唯一性,可在线性空间 V 中定义减法:

$$\alpha - \beta \overset{\text{def}}{=} \alpha + (-\beta), \forall \alpha, \beta \in V.$$

3) 对于线性空间 V, $\forall \alpha \in V$, $\forall k \in F$(数域),则

$$0\alpha = \theta(\text{零元});\ (-1)\alpha = -\alpha;\ k\theta = \theta.$$

4) 线性空间 V 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中至少有一个向量 $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ 可由组中其余向量线性表出.

5) 对于线性空间 V,若某向量组线性无关,则其中任一子向量组必线性无关; 若某向量组中有一子向量组线性相关,则该向量组必线性相关.

6) 线性空间中的单个零向量线性相关;单个非零向量必线性无关.

7) 线性空间 V^n 中的基不唯一,可有多个基; 但基中所含向量的个数是唯一的,且为 n 个.

8) 同一向量在不同基下的坐标向量可能是不同的.

9) 设 $\mathscr{B}_\alpha, \mathscr{B}_\beta$ 是线性空间 V^n 的两组基,且 $\mathscr{B}_\beta = \mathscr{B}_\alpha P$,则过渡矩阵 P 是可逆矩阵.

10) 设 $\mathscr{B}_\alpha, \mathscr{B}_\beta$ 是线性空间 V^n 的两组基,若 P 是 $\mathscr{B}_\alpha \to \mathscr{B}_\beta$ 的过渡矩阵, 则 P^{-1} 是 $\mathscr{B}_\beta \to \mathscr{B}_\alpha$ 的过渡矩阵.

11) 设 V^n 是数域 F 上的线性空间,$\mathscr{B}$ 是 V^n 的一个基,$P = (p_{ij})_{n\times n}$ 是数域 F 上的可逆矩阵.记 $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}P$,则 $\mathscr{B}_1$ 也是 V^n 的一个基.

12) 设 $\mathscr{B}_\alpha, \mathscr{B}_\beta$ 是线性空间 V^n 的两组基,且 $\mathscr{B}_\beta = \mathscr{B}_\alpha P$.对于向量 $\xi \in V^n$ - 若 $\xi = \mathscr{B}_\alpha x = \mathscr{B}_\beta y$,则

$$y = P^{-1} x,$$

且称上式为向量 ξ 在不同基下的**坐标变换公式**.

13) W 是线性空间 V 的子空间 $\Leftrightarrow$ W 中的元关于 V 中的线性运算是封闭的,即

$$\forall \alpha, \beta \in W, k \in F(\text{数域}),\ \text{则}\ \alpha + \beta \in W,\ k\alpha \in W.$$

14) 设 V 是有限维线性空间,W 是 V 的子空间,则 $\dim(W) \leqslant \dim(V)$.

15) 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间,则

$W_1 \cap W_2$ 也是 W_i 的子空间,$i = 1,2$; W_i 也是 $W_1 + W_2$ 的子空间,$i = 1,2$;

$W_1 \cap W_2$ 也是 $W_1 + W_2$ 的子空间; $W_1 \cap W_2 \subset W_1, W_2 \subset W_1 + W_2 \subset V$.

5. 注释

本节基本概念较多,可通过具体例子去体会、理解,并熟练掌握;本节的重点包括线性空间的基、维数、向量在基下的坐标向量、过渡矩阵、矩阵 A 的零空间 $N(A)$、列空间 $R(A)$、向量组的张子空间、和子空间、交子空间的求解和计算,向量组的线性无关的判别,基的扩充定理和维数公式的使用,子空间直和的判断.

本节的难点是线性空间的定义、直和概念的理解和维数公式的证明.

1.1.2　例题解析

例 1　验证下列集合都是数域:

1) 全体实数集 $\mathbf{R}$;　2) 全体复数集 $\mathbf{C}$;　3) 全体有理数集 $\mathbf{Q}$.

解: 由数域的定义即得本例的结论,具体说明略.

例 2　指出下列集合都不是数域:

1) 全体正实数集 $\mathbf{R}_+$;　2) 全体整数集 $\mathbf{Z}$.

解: 由于两个正实数相减不一定是正实数,则 $\mathbf{R}_+$ 不是数域;又由于两个整数相除不一定是整数,则 $\mathbf{Z}$ 不是数域.

例 3　验证下列命题成立:

1) 全体 n 维实向量形成的集合 $\mathbf{R}^n$,按向量加法及实数数乘,则 $\mathbf{R}^n$ 是一个实线性空间;

2) 按向量加法及数乘,全体 n 维复向量形成的集合 $\mathbf{C}^n$ 是一个:
$$\begin{cases}\text{实线性空间(当 } F=\mathbf{R}\text{ 时)}\\ \text{复线性空间(当 } F=\mathbf{C}\text{ 时)}\end{cases};$$

3) 实数域 $\mathbf{R}$ 上的多项式全体形成的集合 $P(t)$,按多项式加法及实数与多项式乘法,则 $P(t)$是一个实线性空间;

4) 实数域 $\mathbf{R}$ 上的次数不超过 n 的多项式全体 $P_n(t)$,按多项式加法及实数与多项式乘法,则 $P_n(t)$是一个实线性空间.

解: 直接验证满足线性空间定义中的八条: 加法交换律、加法结合律、存在零元、存在负元、数乘分配律两条、数乘结合律、$1\alpha=\alpha,\forall\alpha$. 即得本例中的结论,具体说明略.

例 4　求线性空间的维数:

1) $\dim(\mathbf{R}^n)=$ ________;　　2) $\dim(P_n(t))=$ ________;

3) $\dim(\mathbf{R}^{m\times n})=$ ________ ; 4) $\dim(P(t))=$ ________ .

解: 对每一个问题,由线性空间维数的定义,能找到一组最大个数的线性无关的向量组,即得本例中的结论.如:在 $P_n(t)$中,$1,t,t^2,\cdots,t^n$ 是一组最大个数的线性无关的向量组,且 $P_n(t)$中任一向量都可由向量组 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 线性表示,故 $P_n(t)$是 $n+1$ 维的,其余说明略. 则

$$\dim(\mathbf{R}^n)=n;\quad \dim(P_n(t))=n+1;$$

$$\dim(\mathbf{R}^{m\times n})=mn;\quad \dim(P(t))=+\infty(\text{无限维的}).$$

例 5 求证: 线性空间中零元是唯一的.

证: (用反证法)若存在二个零元 θ_1,θ_2,由于 $\theta_1=\theta_1+\theta_2=\theta_2 \Rightarrow \theta_1=\theta_2$.

例 6 对于线性空间 V, $\forall\alpha\in V$,求证:α 的负元是唯一的.

证: (用反证法)若存在 β,γ,使 $\alpha+\beta=\theta$(零元), $\alpha+\gamma=\theta$,则

$$\beta=\beta+\theta=\beta+(\alpha+\gamma)=(\beta+\alpha)+\gamma=\theta+\gamma=\gamma,$$

所以 $\beta=\gamma$,即负元唯一.

例 7 设 $\mathscr{B}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$是 V^n 的一个基,求证: V^n 中的任一向量 ξ 都可由基 $\mathscr{B}$唯一地线性表出.

证: 证明分两步:其一,给出向量 ξ 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示的存在性;其二,(用反证法)推断这种表示的唯一性.

因为 $\dim(V^n)=n$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\xi$ 是$n+1$ 个向量,必线性相关.从而,存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$,使

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i+k_{n+1}\xi=\theta(\text{零元}),$$

且 $k_{n+1}\neq 0$(否则,若 $k_{n+1}=0$,则由 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=\theta \Rightarrow k_i=0,i=1,2,\cdots,n$.这与已知矛盾).

则

$$\xi=-\frac{1}{k_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{k_i}{k_{n+1}}\right)\alpha_i,$$

故 ξ 可由基 $\mathscr{B}$线性表出.

下证唯一性(反证法): 设有

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}y_i\alpha_i\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\alpha_i=\theta.$$

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,则 $x_i-y_i=0$, 即 $x_i=y_i$, $i=1,2,\cdots,n$.所以 ξ 由基 $\mathscr{B}$线性表出是唯一的.

例 8　已知 $P_2(t)$中的向量 $p(t)=2t^2-t+1$,试分别求向量 $p(t)$在基 $\mathscr{B}=\{1,t,t^2\}$和基 $\mathscr{B}_1=\{t+1,t+2,t^2\}$下的坐标向量.

解: 这种问题一般用待定系数法,由 $p(t)=\mathscr{B}x$,可确定待定系数向量 x,即为所求坐标向量.但特殊问题还可特殊处理.

由 $2t^2-t+1=\{1,t,t^2\}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$,则知 $p(t)=2t^2-t+1$ 在基 $\mathscr{B}$下的坐标为 $(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

又由 $2t^2-t+1=-3(t+1)+2(t+2)+2t^2=\mathscr{B}_1\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$,则知 $p(t)$在基 $\mathscr{B}_1$ 下的坐标向量是$(-3,2,2)^{\mathrm{T}}$.

例 9　在 $\mathbf{R}^{2\times2}$中,求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$在基$\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$下的坐标,其中

$$E_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ E_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

解: 用待定系数法,由 $A=k_1E_1+k_2E_2+k_3E_3+k_4E_4$,即

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}=k_1\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+k_2\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+k_3\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+k_4\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$$

可得系数为 $k_1=3,k_2=-3,k_3=2,k_4=-1$.

故 $A=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\\-1\end{pmatrix}$, 则所求坐标向量为$(3,-3,2,-1)^{\mathrm{T}}$.

例 10　已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基:

$$\mathscr{B}_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\mathscr{B}_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

试求由 $\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2$ 的基变换矩阵(or: 过渡矩阵)P.

解：要求三阶方阵 P，使 $\mathscr{B}_2=\mathscr{B}_1P$，即 $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}P$.

此处基 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 均是矩阵，对 $(\mathscr{B}_1 \mid \mathscr{B}_2)$ 用行初等变换得

$$(I \mid \mathscr{B}_1^{-1}\mathscr{B}_2) \Rightarrow P=\mathscr{B}_1^{-1}\mathscr{B}_2.$$

则

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-1&0\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

例 11 已知 $P_2(t)$ 的两个基：

$$\mathscr{B}_1=\{1,t-1,(t-1)^2\},$$
$$\mathscr{B}_2=\{1+t,2-t,t^2-t+1\}.$$

试求由 $\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2$ 的过渡矩阵 P.

解：要求矩阵 $P=(p_{ij})_{3\times3}$，使 $\mathscr{B}_2=\mathscr{B}_1P$，即

$$\{1+t,2-t,t^2-t+1\}=\{1,t-1,(t-1)^2\}\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{cases}1+t=p_{11}\cdot1+p_{21}\cdot(t-1)+p_{31}\cdot(t-1)^2\\2-t=p_{12}\cdot1+p_{22}\cdot(t-1)+p_{32}\cdot(t-1)^2.\\t^2-t+1=p_{13}\cdot1+p_{23}\cdot(t-1)+p_{33}\cdot(t-1)^2\end{cases}$$

再由上述等式可唯一确定矩阵 $P=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

例 12 设 $\mathscr{B}_\alpha,\mathscr{B}_\beta$ 是线性空间 V^n 的两组基，且 $\mathscr{B}_\beta=\mathscr{B}_\alpha P$，求证：过渡矩阵 P 是可逆矩阵.

证：(反证法)若 P 不可逆，则存在 $x\neq0$，使 $Px=0$. 由 $\mathscr{B}_\beta=\mathscr{B}_\alpha P$，则知

$$\mathscr{B}_\beta x=\mathscr{B}_\alpha Px=\theta \quad\Rightarrow\quad x=0.$$

这与 $x\neq0$ 矛盾. 所以 P 是可逆矩阵.

例 13 设 $\mathscr{B}_\alpha,\mathscr{B}_\beta$ 是线性空间 V^n 的两个基，P 是 $\mathscr{B}_\alpha\to\mathscr{B}_\beta$ 的基变换矩阵，求证：P^{-1} 是基 $\mathscr{B}_\beta\to\mathscr{B}_\alpha$ 的基变换矩阵.

证：由 $\mathscr{B}_\beta=\mathscr{B}_\alpha P\Rightarrow\mathscr{B}_\beta P^{-1}=(\mathscr{B}_\alpha P)P^{-1}=\mathscr{B}_\alpha PP^{-1}=\mathscr{B}_\alpha$，即有

$$\mathscr{B}_\alpha = \mathscr{B}_\beta P^{-1}.$$

所以 P^{-1}是基 $\mathscr{B}_\beta \to \mathscr{B}_\alpha$ 的基变换矩阵.

例 14　设 $\mathscr{B}_\alpha, \mathscr{B}_\beta$ 是线性空间 V 的两个基,对于向量 $\xi \in V$,若

$$\xi = \mathscr{B}_\alpha x = \mathscr{B}_\beta y \text{ 且 } \mathscr{B}_\beta = \mathscr{B}_\alpha P,$$

求证:$y = P^{-1}x$.

证: 由

$$\begin{aligned} \xi &= \mathscr{B}_\alpha x = \mathscr{B}_\beta y \text{ 及 } \mathscr{B}_\beta = \mathscr{B}_\alpha P \\ &\Rightarrow \mathscr{B}_\alpha x = \mathscr{B}_\beta y = \mathscr{B}_\alpha P y \\ &\Rightarrow \mathscr{B}_\alpha (x - Py) = \theta(\text{零元}) \\ &\Rightarrow x = Py \text{ or: } y = P^{-1}x. \end{aligned}$$

例 15　已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基 $\mathscr{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathscr{B}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,试求在这两个基下有相同坐标的所有向量.

解: 设所求向量为 ξ,对应坐标向量为 x,由题意知,应有

$$\xi = \mathscr{B}_1 x = \mathscr{B}_2 x \tag{$*$}$$

即坐标向量 $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

由

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad k \text{ 为任意实数}.$$

将 x 代入(*)式,得所求向量 $\xi = k(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意实数.

例 16 给定矩阵 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $rk(A)$表示 A 的秩,求证:$N(A)$是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间,且

$$\dim(N(A)) = n - rk(A).$$

证:首先易知,$N(A)$是 $\mathbf{R}^n$ 的子集合,而对于 $\forall\, x, y\in N(A)$,即

$$Ax=0,\ Ay=0 \Rightarrow A(x+y)=0,\text{则 } x+y\in N(A).$$

又对于 $\forall\, x\in N(A)$, $\forall\, k\in\mathbf{R}$,由 $Ax=0\Rightarrow A(kx)=0$,则 $kx\in N(A)$.所以 $N(A)$是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

而方程组 $Ax=0$ 的线性无关解向量的最大个数为 $n-rk(A)$,则

$$\dim(N(A)) = n - rk(A).$$

例 17 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$,试求子空间 $N(A)$和 $R(A)$.

解:由 $N(A)=\{x\mid Ax=0, x\in\mathbf{R}^3\}$,利用矩阵的行初等变换可知:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $Ax=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0\Leftrightarrow x=\begin{pmatrix} 2x_3 \\ -\frac{5}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, k 任意.

记 $\alpha=(4,-5,2)^{\mathrm{T}}$,则 $N(A)=\operatorname{span}\{\alpha\}$,且 α 是$N(A)$的一个基.

又记 $A=(a_1, a_2, a_3)$,而 $R(A)=\operatorname{span}\{a_1, a_2, a_3\}$,注意到 $rk(A)=2\Rightarrow \dim(R(A))=2$,且 A 的前两列为 A 的列向量的一个最大线性无关组.则 $R(A)=\operatorname{span}\{a_1, a_2\}$,且 a_1, a_2 是 $R(A)$的一个基.