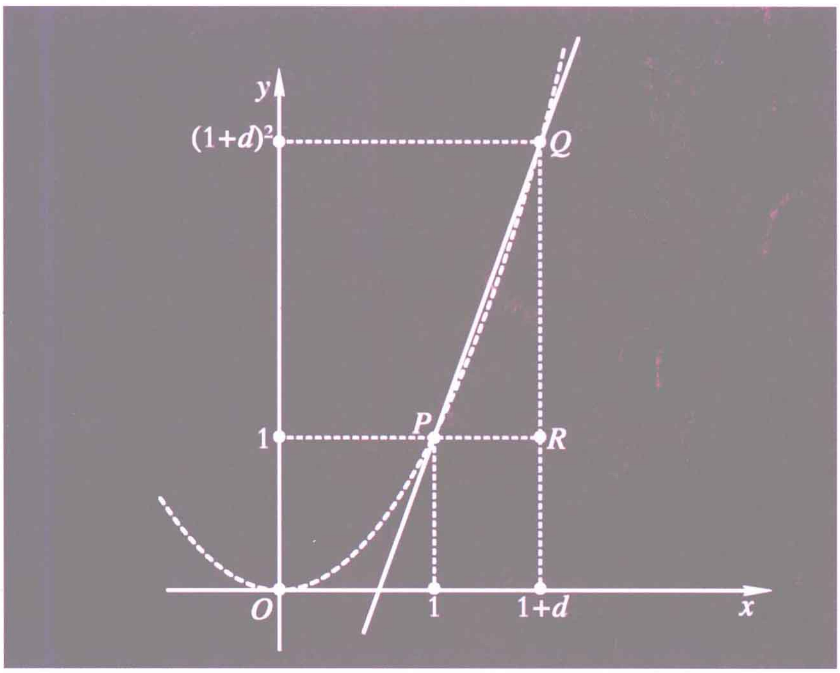
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

Mathematics

普通高中课程标准
实验教科书

数学

选修2-2（理科）



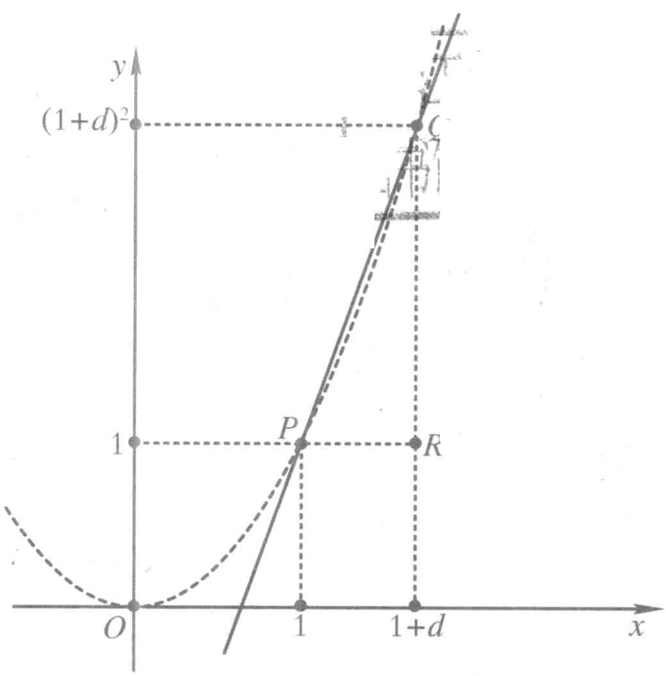
湖南教育出版社

Mathematics

普通高中课程标准
实验教科书

数学

选修 2−2(理科)



主　　编　张景中　陈民众
执行主编　李尚志
编　　委　朱华伟　郑志明　查建国
　　　　　文志英　袁宏喜　孟实华

普通高中课程标准实验教科书
数　学
选修 2—2（理科）
责任编辑：孟实华　邹伟华　甘　哲
美术编辑：肖　毅
技术插图：徐　航
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 643 号）
网　　址：http：//www.hneph.com
电子邮箱：postmaster @ hneph.com
湖南省新华书店经销
湖南新华印刷集团有限责任公司印刷
890×1240　16 开　印张：10　字数：250000
2005 年 8 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 7－5355－4613－7／G·4608
定价：11.40 元

感受数学思维的力与美

这一段课程，包括导数及其应用、推理与证明、数系的扩充和复数的引入.

微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开启了向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段. 运动物体的瞬时速度，曲线上一点处的切线斜率，函数的瞬时变化率，到了数学世界本是一回事，就是导数！导数的引入使数学变得更有力更迷人. 回顾过去：大量的几何问题和物理问题，数学家本来要一个一个地辛苦地研究. 在微积分的方法和工具的威力之下，这些问题摧枯拉朽般地被解决了. 展望前程：微积分的出现，开创了数学的新时期，一系列内容丰富、思想深刻、应用广泛的数学分支在微积分的基础上诞生成长.

我们将通过大量的实例，理解导数的思想的奥妙，感受数学思想的力量，体会微积分的产生对人类文化发展的价值.

数学的力量和美，来自对万物万象冷静的分析、深入的探究和严谨的思维. 推理与证明，是数学的基本思维过程，也是学习和生活中常用的思维方式. 通过经验和直觉，用归纳、类比的方式来推测和发现有用的概念或可能的结论，叫作合情推理. 数学中许多重大创新，如导数概念的提出，定积分概念的提出，

合情推理功不可没．根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等），按照严格的逻辑法则得到新的结论，叫作演绎推理．合情推理和演绎推理紧密联系，相辅相成，使数学生机勃勃，使数学严谨有力．数学欢迎一切有用有趣有创意的概念，但它归根结底只接受经过一丝不苟的演绎推理证明了的结论．数学的正确性必须由逻辑证明来保证．数学证明的方法多姿多彩，有直接证明的分析法、综合法、数学归纳法，也有间接证明的反证法、同一法等．灵活使用这些方法解决形形色色的数学问题，往往需要多年的专业磨练；而结合学过的知识体会数学证明的特色并对这些方法有所了解，则是人人皆有机会体验的美的享受．这种感受将留下言之成理、论证有据习惯，使人终生受益．

从自然数到有理数，从有理数到实数，数系的扩充体现了数学的发现和创造过程，也体现出数学发生发展的客观需求和背景．复数的引入，是数系的又一次扩充．这是合情推理与演绎推理在数学中一次成功的合作．复数的引入，为数学增添了一系列最华丽最深刻最有用的篇章，祝愿你将来有更多机会欣赏这人类文化典藏中的瑰宝！

作　者

2004 年 12 月

目录

第4章 导数及其应用

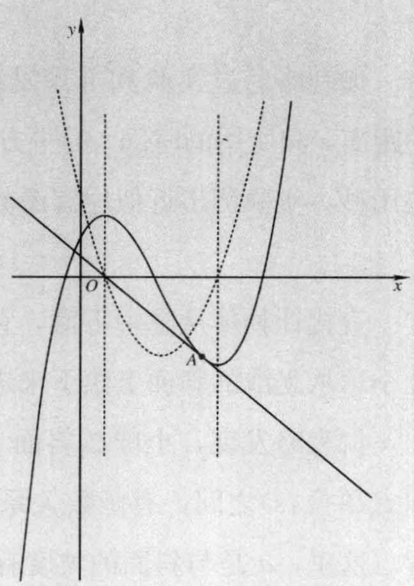
第 5 章 数系的扩充与复数

第 6 章 推理与证明

第4章

导数及其应用

求积问切难题多，
瞬速极值奈若何.
群贤同趋坎坷路，
双雄竞渡智慧河.
百年寻谜无穷小，
万代受益财富多.
撑起数学参天树，
人类精神奏凯歌.



如何求曲线上任一点处的切线，如何求运动物体在每一时刻的瞬时速度，这些问题好像是无穷无尽，永远做不完. 但是，用微积分的方法，成千上万的问题被一举突破，一个新的数学领域出现了. 所以恩格斯认为，微积分的发现是人类精神的伟大胜利.

4.1 导数概念

4.1.1 问题探索——求自由落体的瞬时速度

伽利略通过实验和推理发现了自由落体的运动定律：物体下落的距离 s 和所用的时间 t 的平方成正比. 如果距离单位用米，时间单位用秒，实验测出近似地有函数关系：

$$s=s(t)=4.9t^2.$$

直接让物体从空中下落，它落得很快，不便观察测量. 伽利略是让小球从光滑的斜面上滚下来进行观察测量的.

伽利略发现，小球在斜面上滚下的距离 s(单位:m)和所用的时间 t(单位:s)之间，有函数关系 $s=s(t)=at^2$，这叫作小球的运动方程. 这里，a 是与斜面的坡度有关的常数.

要计算物体的速度，就要知道物体在一段时间里走过的一段距离，用时间除距离得到速度，也叫平均速度. 如果只看某一个时刻，物体在这个时刻只有一个位置，时间和距离都是 0，通常的速度概念不是失去了意义吗?

所以，伽利略面临的困难是深刻的，是概念上的困难.

伽利略看到，重力作用下在斜面上向下滚的小球，每时每刻都滚得更快. 但是，他只知道如何计算在一个时间段里的平均速度，却不知道如何计算小球在某一个时刻的速度，即瞬时速度.

一百多年之后，牛顿给出了瞬时速度的概念和计算方法，回答了伽利略的问题.

牛顿是怎么想，怎么做的呢?

如果小球在某个斜面上向下滚动的运动方程是

$$s(t)=3t^2,$$

要计算小球在开始运动 2 s 时的速度，不妨先看看它在 2 s 到 2.1 s 之间的平均速度，即在区间 [2，2.1] 上的平均速度：

$$\frac{s(2.1)-s(2)}{2.1-2}=\frac{13.23-12}{0.1}=12.3\ (\mathrm{m/s}).$$

同样，可以计算出[2，2.01]，[2，2.001]，…上的平均速度，也可以计算出[1.99，2]，[1.999，2]，…上的平均速度：

时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)	时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)
[2,2.1]	0.1	12.3	[1.9,2]	0.1	11.7
[2,2.01]	0.01	12.03	[1.99,2]	0.01	11.97
[2,2.001]	0.001	12.003	[1.999,2]	0.001	11.997
[2,2.000 1]	0.000 1	12.000 3	[1.999 9,2]	0.000 1	11.999 7
[2,2.000 01]	0.000 01	12.000 03	[1.999 99,2]	0.000 01	11.999 97
…	…	…	…	…	…

仔细观察，时间间隔越来越小的过程中，对应的平均速度似乎越来越接近一个数值，就是12 m/s．

但是，时间间隔的缩小是一个无穷无尽的过程．有限的几次计算，能得出12 m/s这个确定的结果吗？

用字母代替数，可以把问题看得更清楚：

设d是一个绝对值很小的非0的数，在$[2,2+d]$或$[2+d,2]$这段时间里，小球运动的平均速度是

$$\frac{3(2+d)^2-3\times 2^2}{d}=\frac{3(4d+d^2)}{d}=(12+3d)\ (\mathrm{m/s}).$$

当d越来越接近于0时，这个平均速度确实就越来越接近于12m/s．

用数学语言来说，就是"时间段的长度趋于0时，这段时间内的平均速度以12 m/s为极限"．

这个极限数值，就叫作小球开始运动后2s时的瞬时速度．

用这个办法，不难计算小球在任意时刻t的瞬时速度：先计算出时刻t和$t+d$之间这段时间运动的距离，除以这时间段的长度d，求出平均速度并把结果化简，再让d趋于0，就得到时刻t的瞬时速度．

计算过程是：

(1) 求平均速度：

$$\frac{s(t+d)-s(t)}{d}=\frac{3(t+d)^2-3t^2}{d}=6t+3d;$$

(2) 在平均速度表达式$6t+3d$中让d趋于0，得到$6t$．所以，小球在时刻t的瞬时速度是$6t$．

类似地，从自由落体的运动方程$s(t)=4.9t^2$出发，可以求出它

下落 t s 时的瞬时速度为 9.8 m/s.

例 运动员从 10 m 高台跳水时，从腾空到进入水面的过程中，不同时刻的速度是不同的．设起跳 t s 后运动员相对水面的高度为：

$$H(t)=-4.9t^2+6.5t+10,$$

用代数推导方法计算在 2 s 时运动员的速度（瞬时速度），再用数值计算列表观察检验计算的结果.

解 计算步骤是：

（1）求 $[2,\ 2+d]$ 上的平均速度：

$$\frac{H(2+d)-H(2)}{d}=\frac{-4.9d^2-13.1d}{d}=-49d-13.1(\mathrm{m/s});$$

（2）在平均速度表达式 $-4.9d-13.1$ 中让 d 趋于 0，得到 -13.1．所以，运动员在 2 s 时的瞬时速度是 -13.1 m/s.

下面是数值计算的结果：

时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)	时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)
[2,2.1]	0.1	−13.59	[1.9,2]	0.1	−12.61
[2,2.01]	0.01	−13.149	[1.99,2]	0.01	−13.051
[2,2.001]	0.001	−13.104 9	[1.999,2]	0.001	−13.0951
[2,2.000 1]	0.000 1	−13.100 49	[1.999 9,2]	0.000 1	−13.099 51
[2,2.000 01]	0.000 01	−13.100 049	[1.999 99,2]	0.000 01	−13.099 951
…	…	…	…	…	…

从计算结果看出，当时间间隔越来越小时，运动员的平均速度趋于 13.1 m/s，这和上面的代数推导的结论是一致的.

现在，把上面解决问题的思路和方法总结一下：

（1）开始提出的问题是：知道了运动方程，求某个时刻的瞬时速度；

（2）但是我们还不知道如何用数学语言描述瞬时速度；

（3）所以我们面临两个任务，要建立瞬时速度的数学概念，并且找出计算方法；

（4）要计算时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$，先求出时刻 t 和时刻 $t+d$ 之间这个时间段的平均速度 $v(t,\ d)$；

（5）再在 $v(t,\ d)$ 中让 d 趋于 0,得到的极限数值就叫瞬时速度 $v(t)$.

这样，既有了瞬时速度的数学概念，又有了计算它的方法.

若物体的运动方程为 $s=f(t)$，则物体在任意时刻 t 的瞬时速度

$v(t)$，就是平均速度 $v(t,d)=\dfrac{f(t+d)-f(t)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限.

练 习

1. 在本节例题中，求出运动员在任意时刻 t 的瞬时速度.
2. 在本节例题中，求出
   (1) 运动员起跳时刻的瞬时速度；
   (2) 运动员到达最高点时的瞬时速度；
   (3) 运动员入水时的瞬时速度.

习题 1

学而时习之

1. 匀速运动物体的运动方程是 $s=s(t)=s_0+v_0t$，求物体在时刻 t 的瞬时速度.
2. 一球沿某一斜面自由滚下，测得滚下的垂直距离 h（单位：m）与时间 t（单位：s）之间的函数关系为 $h=t^2$．求 $t=4$ s 时此球在垂直方向的瞬时速度.

温故而知新

3. 根据竖直上抛物体的运动方程

$$h(t)=h+vt-\frac{gt^2}{2},$$

计算该物体在时刻 t 的瞬时速度．再应用物理学的能量守恒原理，分析运动过程中动能和势能的相互转化，说明用数学方法计算出的瞬时速度是否和物理现象相符合.

4. 设 $f(x)$ 是增函数，请分别指出 $d>0$ 或 $d<0$ 时 $\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 的符号.

4.1.2 问题探索——求作抛物线的切线

自由落体的速度方向总是向下的.

竖直上抛的物体，例如跳水运动员跳水的运动过程中，速度的方向开始向上，后来向下.

斜抛或平抛的物体，例如炮弹的运动过程中，速度的方向时时都在变化. 在物理中知道，这时物体运动的轨线是抛物线，而速度的方向线正是抛物线的切线.

在历史上，解析几何的主要开创人笛卡儿曾经研究过这个问题. 但他所用的方法比较特殊. 我们希望寻求更一般更简便的方法.

但是，怎样作出抛物线的切线呢?

遇到一个问题而不知道如何解答时，不妨想想过去做过的类似的问题. 看哪些经验适用于解决新的问题.

过去，我们作过圆的切线.

圆的切线垂直于半径，这条性质对抛物线用不上.

但是，圆的切线和割线的某些联系，却有启发性.

温故知新，是学习知识的一般规律.

如图 4－1，A，B 是圆周上两点，过 AB 可以作一条割线. 当点 B 趋于 A 时，割线就趋于切线的位置.

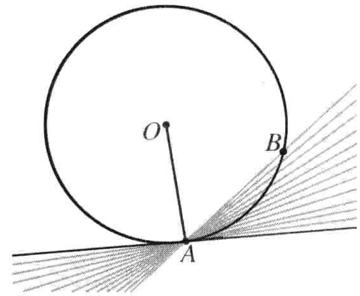


图 4－1

对于一般曲线，也可以照此办理.

从特殊过渡到一般，是思考数学问题的好方法.

图 4－2 是曲线 $y=f(x)$ 的图象. P，Q 是曲线上的两个点，直线 PQ 是曲线的割线. 让点 Q 趋于 P，割线 PQ 如果趋于一条直线，这条直线不就是曲线在点 P 处的切线吗?

这样的设想如果成功，既建立了一般曲线的切线的概念，又指出了作切线的途径.

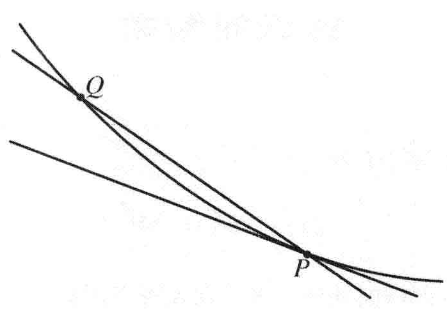


图 4－2

下面回到作抛物线切线的具体问题上来，用实际操作检验我们的设想是否有效.

图 4－3 是抛物线 $y=f(x)=x^2$ 的图象．$P(1,1)$是图象上的一个点．为了过点 P 作出该抛物线的切线，只要求出这条切线的斜率就可以了．

有时候，解题的困难，在于不知道要求的东西究竟是什么，也就是问题没有说清楚．把问题说清楚了，往往就有了解决的办法．

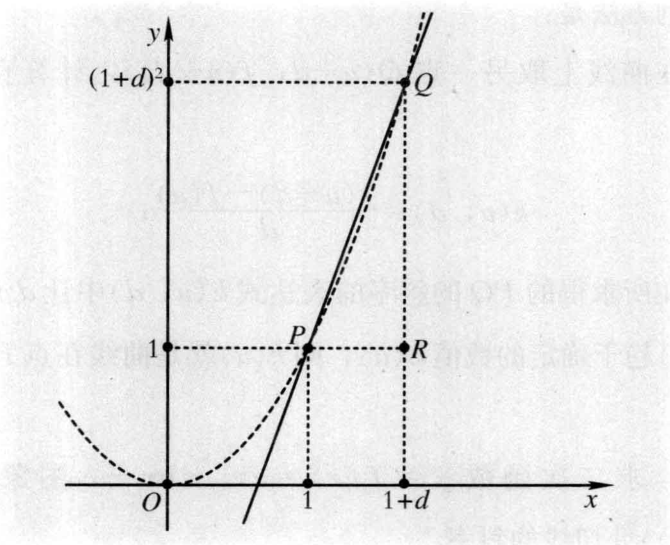


图 4－3

在抛物线上再取一个点 $Q(1+d,(1+d)^2)$，作割线 PQ．当 d 趋于 0 时，点 Q 趋于点 P，割线 PQ 趋于所要作的切线，割线 PQ 的斜率也就趋于切线的斜率．

过 Q 作 y 轴的平行线，过 P 作 x 轴的平行线，两线交于 R．则在 $\mathrm{Rt}\triangle QRP$ 中，斜边 PQ 的斜率就是$\angle QPR$ 的正切，即

$$\frac{QR}{PR}=\frac{(1+d)^2-1}{d}=2+d,$$

让 d 趋于 0，得到过点 P 的切线的斜率为 2．

根据直线的点斜式方程，得到切线的直线方程：

$$y=2x-1,$$

这说明我们的设想是对的．

同样的方法，可以求出这条抛物线上任一点 $P(u,u^2)$处的切线的斜率．具体的步骤为：

(1) 取不同于 P 的点 $Q(u+d,(u+d)^2)$．根据 P，Q 两点坐标，计算出直线 PQ 的斜率为$\dfrac{(u+d)^2-u^2}{(u+d)-u}=2u+d$；

(2) 在 PQ 的斜率 $2u+d$ 中让 d 趋于 0，得到点 $P(u,u^2)$处切

在解决上述问题的过程中，我们实际上得到了根据函数的解析式计算函数曲线上任一点处切线斜率的途径.

线斜率为 $2u$.

所以，过点 $P(u, u^2)$ 的切线的直线方程为 $y=2ux-u^2$.

设 $P(u, f(u))$ 是函数 $y=f(x)$ 的曲线上的任一点，则求点 P 处切线斜率的方法是：

(1) 在曲线上取另一点 $Q(u+d, f(u+d))$，计算直线 PQ 的斜率

$$k(u, d)=\frac{f(u+d)-f(u)}{d};$$

(2) 在所求得的 PQ 的斜率的表达式 $k(u, d)$ 中让 d 趋于 0，如果 $k(u, d)$ 趋于确定的数值 $k(u)$，则 $k(u)$ 就是曲线在点 P 处的切线的斜率.

例 1 求二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 图象曲线上点 $P(u, f(u))$ 处切线的斜率.

解 (1) 在曲线上取另一点 $Q(u+d, f(u+d))$，计算直线 PQ 的斜率

$$k(u, d)=\frac{f(u+d)-f(u)}{d}=2au+da+b.$$

(2) 在所求得的斜率表达式中让 d 趋于 0，表达式趋于 $2au+b$.

所以，所求的切线的斜率 $k(u)=2au+b$.

例 2 初速大小为 v 的炮弹，如果发射方向和地面所成的角为 θ，则炮弹所经过的曲线在不计空气阻力时为抛物线. 以炮弹到发射点的水平距离为自变量 x，炮弹到发射点的垂直距离 y 可以看成是 x 的函数，其表达式为 $y=f(x)=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$，其中 g 值为 9.8 是重力常数. 根据例 1 的结果，求 $f(x)$ 的曲线上任一点 $(x, f(x))$ 处切线的斜率.

解 对照例 1，$a=\frac{-g}{2v^2\cos^2\theta}$，$b=\tan\theta$，$u=x$，故所求斜率为

$$k(x)=\frac{-gx}{v^2\cos^2\theta}+\tan\theta.$$

练 习

1. 判断曲线 $y=2x^2$ 在点 $P(1,\ 2)$ 处是否有切线，如果有，求出切线的方程.
2. 设 $P(x_0,\ y_0)$ 是曲线 $y=3-x^2$ 上的一点，写出曲线在点 P 处的切线的方程.

习题 2

学而时习之

1. 求曲线 $y=x^2+1$ 在点 $P(1,\ 2)$ 处的切线的斜率.
2. 计算抛物线 $y=x^2-3x+2$ 上任一点 $P(u,\ v)$ 处的切线的斜率，并求出抛物线顶点处切线的方程.

温故而知新

3. * 用“Z+Z超级画板”或具有类似功能的作图软件，取适当的单位和比例，在计算机屏幕上作出例2中的抛物线，在抛物线上任取一点 P，使用例中求出的斜率作过 P 的直线. 拖动点 P 或改变炮弹的出射角，观察直线与曲线是否相切.

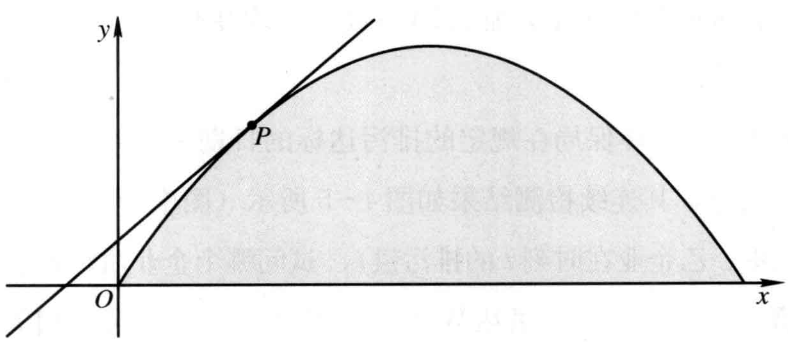


图 4－4