数学物理中的微分几何与拓扑学

Differential Geometry and Topology in Mathematical Physics

汪容 著

数学物理中的
微分几何与拓扑学

汪 容 著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学物理中的微分几何与拓扑学 / 汪容著. —杭州：浙江大学出版社，2010.12
ISBN 978-7-308-07818-4
Ⅰ.①数… Ⅱ.①汪… Ⅲ.①微分几何②拓扑 Ⅳ.①018

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 139416 号

数学物理中的微分几何与拓扑学
汪　容　著

责任编辑　徐素君
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　杭州日报报业集团盛元印务有限公司
开　　本　880mm×1230mm　1/32
印　　张　9
字　　数　242 千
版 印 次　2010 年 12 月第 1 版　2010 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-07818-4
定　　价　25.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

序　言

汪容去世一年多了。为了纪念他，浙江大学出版社重印汪容在最后还能工作的几年里完成的这本著作。作为多年的老朋友，我很荣幸有机会为本书重印写序，以寄托哀思。

我和汪容相识在抗战时期内迁贵州的浙江大学。1943 年，我上浙大物理系，在永兴上课。汪容比我高一年级，在湄潭读书。虽然相隔约三十里，但两地的学生时常有交往，我与汪容也经常切磋一些物理问题。一年后，我离开浙大去昆明读书。这样，我与汪容便有一年的同学之谊。1972 年，我第一次回中国，提出想见的人中就有汪容，但由于种种原因未能如愿。再遇汪容，是第二年，1973 年，汪容率一个三人小组访美，了解国外高能物理发展的情况，为中国高能加速器的预制作调研。我在纽约接待他们，根据他们的来意，我专门开车一天，带他们参观访问。世道沧桑，故人相见，已是时隔近三十年。令人欣慰的是，虽然三十年未谋面，我们俩竟仍是同行。这点我早已知道，因为汪容在当年层子模型的研究中是有重要贡献的。后来，在量子规范场论的研究中，汪容也有很好的工作，他的《量子规范理论》一书是国内最早介绍规范场论的书之一。此是后话。

我与汪容这辈子一起做的最重要的一件事是建立浙江近代物理中心。1981 年，汪容回到母校当教授，他一直希望在浙江大学建立一个基础物理理论研究的机构。1990 年前后，汪容询问我有否此意向，我同意了。而后，时任浙江大学校长的路甬祥先生向我发了正式邀请。1991 年，浙江近代物理中心在浙江大学正式成立，我和汪容

分别任中心的主任和副主任。经过十几年，在汪容和中心全体成员的努力下以及国内外同行的支持下，浙江近代物理中心已成为国内理论物理学界的一支重要研究队伍。现在汪容已经逝世，希望中心的年轻人能把中心越办越好，以慰藉汪容在天之灵。

1998 年以后，我发现每年都参加中国高等科技中心顾问委员会会议的汪容不来了。后来，收到他夫人的信，说汪容的记忆力严重衰退，不能再来开会了。又听说这本《数学物理中的微分几何与拓扑学》是汪容与病魔抢时间，最终得以完成的。我深深地为汪容坚韧的意志力和高尚的敬业精神所感动。现代微分几何和拓扑学已在物理研究中起着很重要的作用，例如，高能物理中的规范反常和引力反常，凝聚态物理中的分数量子霍尔效应，分数电荷和分数统计现象，等等的研究，都与各种物理空间中的拓扑性质相关。此书虽是在病中完成，但汪容的书仍保持了他一贯的细致、清晰的风格，描述清楚，推导详尽。这本书深入浅出，渗透着一名优秀的物理学家对这些数学理论的深刻理解。我相信，对于学理论物理的学生，这是一本很好的入门书。同时，此书对从事相关研究的物理学工作者肯定也有很好的参考价值。

李政道

2008 年 9 月 4 日

前　　言

陈省身先生于1980年春季在北京大学讲授微分几何时，曾谈起数学研究与理论物理研究之间的相互启发和相互促进。在他1982年出版的《理论物理与力学论文集》中有一篇文章，题目是《微分几何与理论物理》，文中画了一个意味深长的图：

这个图很形象地表达了数学和物理的发展既是互相独立的，又是互相启发和互相促进的，陈省身先生的这篇论文使读者们体会到在数学和理论物理的交叉中，蕴含着一种十分深刻的内在联系和推动力。

在这20世纪不久就要结束的时候，还不能预言下一个交叉点将是什么。但人们已经注意到，微分几何与拓扑学在数学物理中所起的作用必定是十分重要的。尤其引人注目的有两件事：

(i) 2维流形的共形变换群具有无穷多个生成元，这与$n>2$维流形的共形变换群只有$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$个生成元截然不同；

(ii) 4维欧氏空间R^4有不可数的无穷种互相不微分同胚的微分结构。这又和$n\neq4$的R^n只有唯一的一种微分结构大不一样！同微分几何和拓扑学的进展有关的数学与物理新的交叉点将是什么呢？人们正在拭目以待。

作者深深感谢侯伯元教授、沈纯理教授和干丹岩教授的内容丰富的讲课和有益的讨论。

汪　容

1997年春于杭州浙江大学

目　　录

第1部分　微分流形

第2部分 整体拓扑性质

第 1 部分　微分流形

第 1 章　预备知识

§1.1　什么是流形

流形的概念来源于欧氏空间。n 维实流形就可看作是由一块块 R^n(实 n 维欧氏空间)黏起来的结果。因此,n 维实流形的最重要的特性就是在它的每一点的邻近,都有 n 维的局部坐标系。

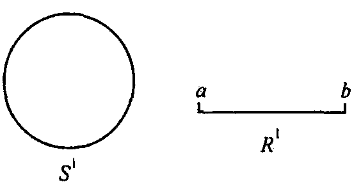

图1.1.1

图 1.1.1 中,S^1 和 R^1 中的开区间 $a<x<b$ 都是一维实流形。

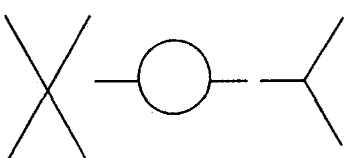
图1.1.2

图 1.1.2 中各个一维图形都不是一维实流形,因为交点处及其邻近都不与 R^1 同胚。

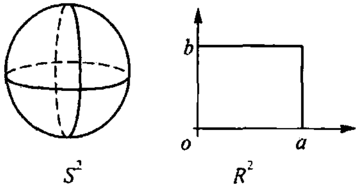

图 1.1.3

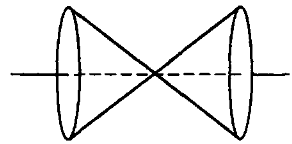

图 1.1.4

图 1.1.3 中 S^2（球面）和 R^2 中的开区间 $0<x<a, 0<y<b$ 都是二维实流形。

图 1.1.4 中的二维图形不是二维实流形，因为两锥交点及其邻近不与 R^2 同胚，同胚的意义见以下四个定义。

定义 1.1.1 设有两个空间 X 和 Y，$f(x)=y$ 是从空间 X 到空间 Y 的映射，而且**对于每一个** $y\in Y$ **都存在** $x\in X$（但存在的 x 可以不止一个），**满足** $f(x)=y$，则 $f:X\rightarrow Y$ 称为**满射**。

定义 1.1.2 设在 X 中任意取**两个不同的点** x_1, x_2，Y 中的 $y_1=f(x_1)$ 与 $y_2=f(x_2)$**也都各不相同**，则 f **是一个一一对应的映射，简称一一映射**。

定义 1.1.3 如果 f **既是一一映射，又是满射，则称** f **为双射**。

定义 1.1.4 如果 X **与** Y **之间存在双射关系**，而且 f **和** f^{-1} 都是**连续函数**，则称 X **与** Y **之间存在**一个**同胚映射**。简称 X **与** Y **同胚**。

在同胚映射下不变的性质称为拓扑性质。如紧致性、分离性、连通性、开集维数……。拓扑性质又称拓扑不变性质。

根据“同胚”的定义，以及实流形是可分（由一块块 R^n 黏成）的，

可以写出实 n 维流形的定义如下。

定义 1.1.5 实 n 维流形 M 是一个 Hausdorff 空间，它的每一个点有一个含有该点的开集与 R^n 的开集同胚。

Hausdorff 空间和开集都是拓扑学的重要概念。

定义 1.1.6 Hausdorff 空间是一个可分空间，其中任意两个分开的点各自具有互不相交的开邻域。

定义 1.1.7 开集 A 是给定空间（例如 Hausdorff 空间）中的点的子集合，开集 A 中的每一点的邻域都完全在 A 之中[①]。

§1.2 在流形中引入坐标与微分结构

令 f_U 代表定义 1.1.4 中的同胚映射，U 是流形 M 中的某个开集，则有

$$f_U: U \to f_U(U) \tag{1.2.1}$$

$f_U(U)$ 是 R^n 中的一个开集，(U, f_U) 称为流形 M 的一个**坐标卡**。

由于 f_U 是同胚映射，所以可以把 $f_U(z) \in R^n$ 在 R^n 上的坐标定义成为 M 上的 z 点的坐标：

$$u^i = (f_U(z))^i \qquad z \in U \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (1.2.2)_1$$

并且称 $u^i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 为 $z (z \in U)$ 的局部坐标。

又设 V 是流形 M 中的另一个开集，则又有同胚映射 f_V，

$$f_V: V \to f_V(V) \tag{1.2.3}$$

① 开集 A 的定义与“邻域”的形状无关，与所选的距离函数也无关。

$f_V(V)$是 R^n 中另一个开集。(U,f_U)和(V,f_V)都是流形 M 的**坐标卡**。一般来说,不能整个流形 M 与 R^n 同胚,所以 M 需要用若干个开集$\{U_\alpha\}$来覆盖它,写成

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = M \tag{1.2.4}$$

于是就有一系列的坐标卡(U_1,f_{U_1}),(U_2,f_{U_2}),…,所有坐标卡的集合叫做**坐标卡集** $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}=\{(U_1,f_{U_1}),(U_2,f_{U_2}),\cdots\} \tag{1.2.5}$$

设 $U\cap V\neq\varnothing$,则 $f_U(U\cap V)$和 $f_V(U\cap V)$,必定是 R^n 中的两个非空开集,而且它们之间有如下关系:

$$\left.\begin{aligned} &f_V\cdot f_U^{-1}:f_U(U\cap V)\rightarrow f_V(U\cap V)\\ &f_U\cdot f_V^{-1}:f_V(U\cap V)\rightarrow f_U(U\cap V)\end{aligned}\right. \tag{1.2.6}$$

仿照(1.2.2)式,同样可以把 $f_V(z)\in R^n$ 上的坐标定义成为 M 上的 z 点的坐标

$$v^j=(f_V(z))^j \quad z\in V \quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.2.2$_2$}$$

于是(1.2.6)式就是 M 上开集 $U\cap V$ 中的两种坐标 u^i 和 v^j 之间的坐标变换。$f_U\cdot f_V^{-1}$与 $f_V\cdot f_U^{-1}$互为逆变换。

(1.2.6)式中的 $f_U(U\cap V)$和 $f_V(U\cap V)$都是 R^n 上的点,所以其坐标都是实连续函数,从而坐标变换 $f_U\cdot f_V^{-1}$ 和 $f_V\cdot f_U^{-1}$ 的矩阵元也应该是实连续函数,如图 1.2.1 所示。

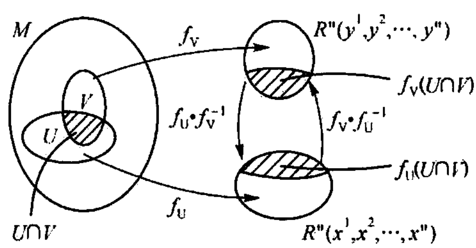

图 1.2.1

图 1.2.1 中的 x^i 和 y^i 之间的连续变换可写成

$$\begin{aligned} y^i &= (f_V \cdot f_U^{-1}(x^1, \cdots, x^n))^i = \varphi^i(x^1, \cdots, x^n) \\ x^i &= (f_U \cdot f_V^{-1}(y^1, \cdots, y^n))^i = \psi^i(y^1, \cdots, y^n) \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

其中 φ^i 和 ψ^i 都是连续函数,并满足:

$$\begin{aligned} \varphi^i(\psi^1(y^1, \cdots, y^m) \cdots \psi^m(y^1, \cdots, y^n)) &= y^i \\ \psi^i(\varphi^1(x^1, \cdots, x^m) \cdots \varphi^m(x^1, \cdots, x^n)) &= x^i \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

如果 $U \cap V = \varnothing$,或者 $U \cap V \neq \varnothing$ 时,坐标变换(1.2.7)式中的坐标变换函数 $\varphi^i(x^1, \cdots, x^n)$ 和 $\psi^j(y^1, \cdots, y^n)$ 都是 C^r 的,则称两个坐标卡 (U, f_U) 和 (V, f_V) 是 C^r-相容的。"C^r-"的含义是:微分一直到 r 次都是保持连续的。

定义 1.2.1　设 n 维流形 M 上给定的坐标卡集 $\mathscr{A} = \{(U_1, f_{U_1}), (U_2, f_{U_2}), \cdots\}$ **满足下列三个条件,则 $\mathscr{A}$ 是 M 的一个 C^r 微分结构。**

(i) $(U_1, U_2, \cdots)$ 是 M 的一个开覆盖(开覆盖是指 $\bigcup U_i = M$)

(ii) $\mathscr{A}$ 中的任意两个坐标卡是 C^r-相容的。

(iii) $\mathscr{A}$ 是最大的坐标卡集,就是说,M 上任意一个坐标卡 $(\tilde{U}, f_{\tilde{U}})$ 如果与属于 $\mathscr{A}$ 的每一个坐标卡都 C^r-相容,则 $(\tilde{U}, f_{\tilde{U}})$ 必也属于 $\mathscr{A}$。于是,$\mathscr{A}$ 就是 M 的一个 C^r 微分结构。

定义 1.2.2　M 上如果有一个 C^r 微分结构,则 M 就是一个 C^r-**微分流形**。

定义 1.2.3　若流形 M 上有一个 C^∞ 微分结构,则 M 就是一个**光滑流形**,或者称为**微分流形**(differential manifold)。

定义 1.2.4　若流形 X 和 Y 不但同胚(Homeomorphic),而且

它们之间的同胚映射是 C^∞ 可微的，则称 X 与 Y 为微分同胚(diffeomorphic)。两个微分同胚的流形必定同胚，但两个同胚的流形不一定微分同胚。

1956 年，Milnor 证明：存在若干种 7 维流形，它们都与 7 维球 S^7(拓扑)同胚，但微分结构都各不相同(不微分同胚)。

20 世纪 80 年代，Donaldson，Freedman，Kirby 和 Taubes 通过一系列的研究，发现 4 维欧氏空间 R^4 除通常的微分结构外，还有不可数的无穷多种不寻常的微分结构。换句话说，就是存在不可数的无穷多种 R^4，它们互相不微分同胚，但是互相拓扑同胚。

以下是微分流形的几个有代表性的例子。

例 1 n 维球面：

$$S^n = \{(x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}) \in R^{n+1} \Big| \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\}$$

用两个开集 U_+，U_- 就可以覆盖。

北多半球 $U_+ = S^n - (0,0,\cdots,-1)$，相应的映射 f_+ 是：

$$f_+ : (x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}) \to \left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}}, \frac{x^2}{1+x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right)$$

南多半球 $U_- = S^n - (0,0,\cdots,1)$，相应的映射 f_- 是：

$$f_- : (x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}) \to \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \frac{x^2}{1-x^{n+1}}, \cdots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right)$$

可证明它们是 C^∞ 相容的，所以 S^n 是光滑流形。目前，已知除上述微分结构外，对于 S^7, S^9, S^{11} 还有其他的微分结构，所以存在不止一种(拓扑)同胚而又不微分同胚的 S^7, S^9, S^{11}。

例 2 实 Grassmann 流形 $Gr(N,k)$ 是 N 维向量空间中通过原点的 k 维线性子空间的集合。k 维线性子空间的维数就是 k，k 维线性子空间在 N 维向量空间中各种取向的自由度为 $(N-k)$，所以 $Gr(N,k)$ 的总维数应该是 $k(N-k)$。

$Gr(N,k)$有 C^{∞} 微分结构，从而是 $k(N-k)$维微分流形。

例 3　实 n 维射影空间 $RP(n)$是 $Gr(N,k)$取 $N=n+1,k=1$ 的实 Grassmann 流形，所以它的维数是 $k(N-k)=n$。

$RP(n)$有 C^{∞} 微分结构，是实 n 维微分流形。

例 4　复 Grassmann 流形 $Gr(N,k,c)$是复 C^N 向量空间(C 代表复数)中通过原点的复 k 维线性子空间的集合。复 k 维线性子空间的维数是 k，复 k 维线性子空间在复 N 维向量空间中取向的自由度为$(N-k)$，所以 $Gr(N,k,c)$的维数是 $k(N-k)$(复数的维数)。

例 5　复 n 维射影空间 $CP(n)$是 $Gr(N,k,c)$中取 $N=n+1,k=1$ 的复 Grassmann 流形。它的维数也是 $k(N-k)=n$。

$CP(n)$有 C^{∞} 微分结构，是复 n 维微分流形。以下考察一下 $CP(1)$的性质：

$CP(1)$就是 $Gr(N=2,k=1,c)$，有两个复坐标，记作 $z=(z_1,z_2)$，z_1,z_2 不能同时为 0，可取两个开集覆盖：

(1) $U_{z_1\neq 0}$：取坐标，　$\zeta=\dfrac{z_2}{z_1}$；

(2) $U_{z_2\neq 0}$：取坐标，　$\zeta'=\dfrac{z_1}{z_2}$。

在交叠区(z_1,z_2 都$\neq 0$)，可取

$$\zeta=\frac{z_2}{z_1}=u+\mathrm{i}v,\quad \zeta'=\zeta^{-1}=\frac{z_1}{z_2}=\frac{u-\mathrm{i}v}{u^2+v^2},\quad \zeta\zeta'=1$$

存在映射：

$$f:U_{z_1}\to U_{z_2},\quad f:\zeta\to\zeta'$$

从而可见：

$$f:(u,v)\to\left(\frac{u}{u^2+v^2},-\frac{v}{u^2+v^2}\right)$$

这是一个复解析映射，故 $CP(1)$是一个复解析流形。如果换变数：

$$u=\frac{x}{1+z},v=\frac{-y}{1+z}$$