数学卷

中国科学技术经·典·文·库

射影曲面概论

苏步青 著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学技术经典文库·数学卷

射影曲面概论

苏步青 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是著者继《射影曲线概论》后的又一本射影微分几何专著，概括了作者在 1935 年左右和近年来在这方面的研究成果.

全书计有：曲面的基本元素；所有主切曲线全属于线性丛的曲面；射影极小曲面；某些构图(T)和其有关变换等四章. 其中第 2、3 章是本书的重点. 特别是第 3 章，基本内容围绕交扭定理编成，还涉及奥克塔夫・迈叶尔和戈德的工作，著者在这里作出了一些有关定理和公式的补充. 对射影极小曲面论本身，以及对研究高维射影空间共轭网论都提供了丰富的内容.

图书在版编目(CIP)数据

射影曲面概论/苏步青著. —北京：科学出版社，2010
(中国科学技术经典文库・数学卷)
ISBN 978-7-03-029370-1

Ⅰ. 射…　Ⅱ. ①苏…　Ⅲ. 射影微分几何—曲面论—概论　Ⅳ. ①O186.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 217396 号

责任编辑：王丽平　房　阳/责任校对：纪振红
责任印制：钱玉芬/封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
http //www sciencep com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
1954 年 1 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2010 年 11 月第二次印刷　印张：20 3/4
印数：1—2 000　字数：407 000

定价：78.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

自从笔者的《射影曲线概论》一书于1954年出版(1958年中国科学院英文版) 以来, 时间又经过了十年. 在这个期间里一直想把以往关于普通空间射影曲面论的一些成果, 如同射影曲线论一样, 加以整理, 但迟迟未能动笔. 从文献上看来, 尽管富比尼和切赫早在1926年就已奠定了射影曲面论的基础, 三十多年来国际上仍然不断出现这方面的论著, 被写成各国文字(见卷末所附参考书籍) , 而用中文写成的专著只有上面一本, 显得太少了. 何况, 我国有过一些致力于射影微分几何研究的数学家, 他们的不少研究成果虽已被介绍于各国论著中, 但大都语焉不详. 因此, 整理出版这些成果是一件重要工作.

本书采用的叙述方法不是像各国著书那样地仅局限于所谓“纯粹的”一种, 而是针对不同的研究对象, 运用各种方法到所讨论的问题中去. 例如, 在第1章里基本上运用了富比尼的方法来推导一些基本公式, 但也不排斥另外方法, 如戈德的方法就被利用于戈德织面序列的探讨. 对第3章射影极小曲面论的处理也是这样: 本来可以一贯运用富比尼的规范坐标系和基本方程, 可是由于采取了戈德的表达方式, 对几个有关的拉普拉斯序列便得到更明显的公式和其间关系. 又如, 对伴随织面的推导和应用则选择了嘉当规范标形(1.6节、1.8节) , 而且在第4章全部应用活动标形法作为研究某些构图(T) 的有效工具. 这样采用多种多样方法进行研究, 既能充分发挥各种方法的优点, 又能较快地明确它们之间的联系.

本书共分4章. 第1章叙述曲面的基本元素, 从头假定了曲面是非直纹、非退缩的, 而且选用的参数是曲面的主切曲线参数. 在简单推导出以后常用的一些公式和定理之后, 重点地导入笔者最初发现, 而且后来已被验证为重合于第二个戈德织面的伴随织面, 为第2章做好准备工作. 其次, 详细介绍白正国、张素诚等关于姆塔儿织面的研究, 并指出这些结论与曲面平截线的密切二次曲线分层(1.15节) 之间的关系. 最后, 作为姆塔儿织面的进一步推广, 还叙述了洼田锥面和有关构图, 特别是这锥面与塞格雷锥面的联系(1.19节). 第2章内容基本上是根据笔者1935年到1936年发表的六篇文章写成的. 仅在讨论两曲面在对应点具有共同的德穆兰四边形的问题中, 结合近年戈德和波尔的研究作了必要的修订(见2.6节), 而对于其他部分仍保持原有形式, 未加任何改动. 中心定理是: 在各点的伴随织面都变为固定在空间的织面, 这种曲面只能是S 曲面, 就是: 主动曲线全属于线性丛的曲面. 最后一节(2.8节) 引进了白正国关于单系主切曲线属于线性丛的曲面的重要研究. 第3章射影极小曲面主要是叙述笔者近年来的研究结果, 基本内容是围绕交扭定理(3.4节) 编成的. 它

还牵涉到奥克塔夫·迈叶尔和戈德的工作, 所以在3.2节和3.3节作出了一些有关定理和公式的补充. 这些研究不但极大地丰富了射影极小曲面论的内容, 而且还提供了作为研究高维射影空间共轭网论的典型范例, 有利于有关方面工作的发展. 第4章阐述了从菲尼可夫构图(T) 出发, 经过构图(T_4)、(T^*) 和其加拉普索变换的讨论而最后到达于伴随构图(T) 的研究. 这样, 连接了笔者二十多年前的工作和近年来的研究编出较有系统的内容.

由此可见, 本书所收集的资料有相当一部分是来自笔者论文的. 为便于读者查考, 特别地把这些论文连同白正国、张素诚、吴祖基三位教授的有关于射影曲面论的著作列成"部分参考文献", 附于卷后. 至于其他论文只在引用的有关章节里就地注明其作者姓名、刊物名称、卷数、页数和年份. 凡在本书中未及引用的论著, 包括我国一些几何学家的工作在内, 因篇幅关系都未予列入. 关于这部分, 请读者参考卷后所列的"参考书籍"、国内外数学专刊和国内各大学自然科学学报.

在本书编写过程中, 笔者曾经作了一番努力, 务使读者在学完高等几何和微分几何的基础上能够领会本书的内容. 但是, 限于笔者的学术水平和表达能力, 说理不够严密, 叙述不够深入浅出, 欠妥及疏漏之处还在所难免, 希望读者随时加以指正.

苏步青

1964年在上海

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　曲面的基本元素

1.1　主 切 曲 线

设x, y, z, t是三维射影空间一点(x) 的齐次坐标, 如果它们都是两个自变量u, v 的函数:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad t = t(u, v),$$

那么点(x) 的轨迹是一个曲线σ, 而且曲线u (单独变动u 而固定v 时的点(x) 的轨迹) 和曲线v (单独变动v 而固定u 时的称呼) 称为σ 的参数曲线或坐标曲线. 以下单用

$$x = x(u, v) \tag{1.1}$$

代替上列四个方程, 并规定函数$x(u, v)$ 在研究范围内都是连续的, 而且有连续的导来函数

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad x_{uv} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad \cdots.$$

在σ 的任意正常点(x) 引曲面的切线, 其全体形成一平面, 就是σ 的切平面, 从

$$dx = x_u\, du + x_v\, dv$$

得出切平面的方程

$$(X \;\; x \;\; x_u \;\; x_v) = 0, \tag{1.2}$$

其中的括号表示四阶行列式, 括号中所列出的是它的第一行, 其余三行顺次是Y, y, y_u, y_v; Z, z, z_u, z_v; T, t, t_u, t_v, 并且(X, Y, Z, T) 表示动点(X) 的坐标.

在曲线σ 上取一曲线Γ, 设它的方程是

$$u = u(\tau), \quad v = v(\tau), \tag{1.3}$$

那么Γ 的密切平面决定于下列三点:

$$x, \quad dx, \quad d^2x.$$

为了Γ 要变成曲面σ 的主切曲线, 充要条件是: 它在每一点的密切平面恒与曲面在这点的切平面重合, 也就是

$$(x \;\; x_u \;\; x_v \;\; d^2x) = 0. \tag{1.4}$$

当σ 经受到直线变换时, (1.4) 式的左边行列式仅添加一个不等于0的因子, 所以曲面的主切曲线是射影协变曲线.

按照曲面的共轭曲线也可定义主切曲线, 从此容易看出: 主切曲线关于曲面的逆射变换也是协变的.

从(1.3) 获得

$$dx = x_u\, du + x_v\, dv,$$

$$d^2x = x_{uu}\, du^2 + 2x_{uv}\, du\, dv + x_{vv}\, dv^2 + x_u\, d^2u + x_v\, d^2v.$$

代入(1.4) , 便可改写主切曲线的微分方程:

$$(x\, x_u\, x_v\, x_{uu})du^2 + 2(x\, x_u\, x_v\, x_{uv})du\, dv + (x\, x_u\, x_v\, x_{vv})dv^2 = 0. \tag{1.5}$$

方程(1.4)也可表成为另外的形式. 从(1.2) 首先导入

$$\xi = \rho(x,\ \ x_u,\ \ x_v), \tag{1.6}$$

式中ρ 表示不等于0的因子, $(x,\ \ x_u,\ \ x_v)$ 表示行列式$(X\ \ x\ \ x_u\ \ x_v)$ 关于第一列四个元的小行列式. 这样, 方程(1.2) 可以写成

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z + \tau T = 0,$$

或简单地,

$$\xi \cdot X = 0.$$

按照定义得知, ξ 是切平面的坐标, 而且它满足

$$\xi \cdot x = x_u \cdot \xi = x_v \cdot \xi = 0, \tag{1.7}$$

从而(1.4) 变为

$$\xi \cdot d^2x = 0. \tag*{(1.4)$'$}$$

由(1.7)得出

$$\xi \cdot dx = x \cdot d\xi = 0, \quad x \cdot d^2\xi = -dx \cdot d\xi = \xi \cdot d^2x.$$

因而, (1.4)$'$也可写为

$$x \cdot d^2\xi = 0. \tag*{(1.4)$''$}$$

由于$x \cdot \xi = x \cdot d\xi = 0$, 便有

$$x = r(\xi,\ \ \xi_u,\ \ \xi_v), \tag{1.8}$$

式中r 表示一个不等于0的比例因子. 从而(1.4)″ 又可改写为

$$(\xi\ \ \xi_u\ \ \xi_v\ \ d^2\xi) = 0. \tag{1.4}'''$$

由此可见, 主切曲线关于曲面的逆射变换是协变曲线.

原来, 曲面σ 上一点的齐次坐标除了一个比例因子$h = h(u, v)$ 而外是完全决定的. 同样地, 在(1.6) 中函数$\rho = \rho(u, v)$ 的选择也是任意的. 如果取ρ' 以代ρ, 且同时取r' 以代(1.8) 式中的r, 就有

$$\xi' = \rho'(x, x_u, x_v) = \frac{\rho'}{\rho}\xi,$$

从而

$$(\xi', \xi'_u, \xi'_v) = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^3 (\xi, \xi_u, \xi_v),$$

$$x = r'(\xi', \xi'_u, \xi'_v) = r'\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^3 (\xi, \xi_u, \xi_v).$$

最后式和(1.8)相比较, 便得到

$$r'\rho'^3 = r\rho^3.$$

如果取$\rho' = \sqrt[4]{|r\rho^3|}$, 就有$r' = \pm\rho'$, 从而$\rho'$ 的绝对值已经确定, 只是它的正负号还有任意选择的余地. 现在, 仍沿用ρ 和ξ 以代ρ' 和ξ', 我们导出

$$\xi = \rho(x,\ \ x_u,\ \ x_v),\quad x = \varepsilon\rho(\xi,\ \ \xi_u,\ \ \xi_v)\quad (\varepsilon = \pm 1), \tag{1.9}$$

式中ρ 和ε 都是往后待定的.

其次, 将证明: 这样决定ξ 的方法对于参数u, v 的任何变换是不变的.

实际上, $u = u(u', v')$, $v = v(u', v')$; 其中雅可比式

$$J = \frac{\partial(u,\ \ v)}{\partial(u',\ \ v')} \neq 0,$$

便有

$$(x,\ \ x_{u'},\ \ x_{v'}) = J(x,\ \ x_u,\ \ x_v),$$

$$(\xi,\ \ \xi_{u'},\ \ \xi_{v'}) = J(\xi,\ \ \xi_u,\ \ \xi_v),$$

所以

$$\xi = \rho'(x,\ \ x_{u'},\ \ x_{v'}),\quad x = \varepsilon\rho'(\xi,\ \ \xi_{u'},\ \ \xi_{v'})\quad (\rho' = \rho J^{-1}). \tag{1.9}'$$

如上所述, 从点(x)的坐标除了符号而外, 可以完全决定切平面(ξ) 的坐标ξ. 称这ξ 为对应于x 的切平面坐标. 当x 乘以一因数时, 很明显地对应的ξ 也乘以同一因数. 这是切赫首创的方法(参看富-切, 导论, 40).

最后, 我们来决定ρ 和ε. 为此, 置

$$F_2 = \xi \cdot d^2x = a_{11}du^2 + 2a_{12}du\,dv + a_{22}dv^2,$$

并假定$a_{12} = a_{21}$, $u = u_1$, $v = v_2$, 那么

$$F_2 = \xi \cdot d^2x = -d\xi \cdot dx = x \cdot d^2\xi = a_{rs}du_r du_s, \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} a_{11} = \xi \cdot x_{uu} = -\xi_u \cdot x_u = x \cdot \xi_{uu}, \\ a_{12} = a_{21} = \xi \cdot x_{uv} = -\xi_u \cdot x_v = -\xi_v \cdot x_u = x \cdot \xi_{uv}, \\ a_{22} = \xi \cdot x_{vv} = -\xi_v \cdot x_v = x \cdot \xi_{vv}. \end{cases} \tag{1.11}$$

主切曲线的微分方程(1.4)$'$可以写为$F_2 = 0$. 假定点(x) 不是曲面σ 的抛物点, 那么

$$A = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 \neq 0,$$

而且过这点有两条主切曲线.

从(1.9)和(1.10)得到

$$F_2 = \rho(x \;\; x_u \;\; x_v \;\; d^2x) = \varepsilon\rho(\xi \;\; \xi_u \;\; \xi_v \;\; d^2\xi), \tag{1.12}$$

应用行列式的乘法定理, 便导出

$$F_2^2 = \varepsilon\rho^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & F_2 \\ 0 & -a_{11} & -a_{12} & * \\ 0 & -a_{21} & -a_{22} & * \\ F_2 & * & * & * \end{vmatrix} = -\varepsilon\rho^2 A F_2^2,$$

因而

$$\varepsilon = -\operatorname{sgn} A, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{|A|}}, \quad A = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2. \tag{1.13}$$

置

$$(x \;\; x_u \;\; x_v \;\; d^2x) = b_{rs}\,du_r\,du_s, \tag{1.14}$$

我们获得

$$a_{rs} = \rho b_{rs}, \quad A = \rho^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2),$$

且从此导出

$$\rho = \frac{1}{\sqrt[4]{|b_{11}b_{22} - b_{12}^2|}}, \quad \varepsilon = -\operatorname{sgn}(b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2).$$

当曲面的参数方程(1.1)是给定时, 按照最后两方程可以算出ρ 和ε.

很明显, 如果x乘以一因数$\sigma(u,\ v) \neq 0$, F_2 必乘以因数σ^2. 另外, 对于参数u, v 的变换F_2 至多只能更改一个符号, 而实际上只当雅可比式$J < 0$ 时更改符号.

从(1.13) 看出, 对于虚的主切曲线所在的曲面$\varepsilon = -1$; 而在相反的情况下$\varepsilon = +1$.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

1.2 主切参数表示和基本微分方程

为完整起见, 首先讨论以后必须除外的两种情况, 就是$F_2 \equiv 0$ 和F_2 分解为一次微分式的平方. 在后一情况下, 只要适当地选取参数u, v, 就可把$F_2 = 0$ 化为$dv^2 = 0$, 从而得到

$$a_{11} = \xi \cdot x_{uu} = -\xi_u \cdot x_u = 0,$$

$$a_{12} = \xi \cdot x_{uv} = -\xi_u \cdot x_v = 0.$$

比较这些方程和$\xi_u \cdot x = 0$, 并注意到

$$\|x_u, \ x_v, \ x\| \neq 0,$$

便得出$\xi_u = \lambda' \xi$. 再取ξ 的适当比例函数, 还可把这方程化为$\xi_u = 0$. 这就是说, 原曲面是可展面.

根据同样的方法, 可以证明: 在$F_2 \equiv 0$ 的假定下, $\xi_u = \xi_v = 0$; 所以主切曲线不定的曲面必须退缩为平面.

下文中除去可展面和平面, 而且取曲面σ 的两系主切曲线做坐标曲线u 和v; 这一来,

$$a_{11} = \xi \cdot x_{uu} = -\xi_u \cdot x_u = x \cdot \xi_{uu} = 0, \tag{2.1}$$

$$a_{22} = \xi \cdot x_{vv} = -\xi_v \cdot x_v = x \cdot \xi_{vv} = 0, \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 = -a_{12}^2, \\ a_{12} = \xi \cdot x_{uv} = -\xi_u \cdot x_v = -\xi_v \cdot x_u = x \cdot \xi_{uv}. \end{cases} \tag{2.3}$$

我们还假定$\varepsilon = 1$, 就是实的主切曲线存在. 但是, 所得到的公式在虚的主切曲线的情况下也同样成立.

从 (2.1)~(2.3) 得出

$$\begin{cases} (x\ x_u\ x_v\ x_{uu}) = (\xi\ \xi_u\ \xi_v\ \xi_{uu}) = 0, \\ (x\ x_u\ x_v\ x_{vv}) = (\xi\ \xi_u\ \xi_v\ \xi_{vv}) = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \xi = \rho(x, \ \ x_u, \ \ x_v), \quad x = \rho(\xi, \ \ \xi_u, \ \ \xi_v), \\ \rho = \dfrac{\omega}{a_{12}} \quad (\omega = \pm 1), \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} a_{12} = \rho(x\ x_u\ x_v\ x_{uv}) = \dfrac{\omega}{a_{12}}(x\ x_u\ x_v\ x_{uv}), \\ \omega a_{12}^2 = (x\ x_u\ x_v\ x_{uv}) = (\xi\ \xi_u\ \xi_v\ \xi_{uv}) \quad (\omega = \pm 1). \end{cases} \tag{2.6}$$

如果u, v 是实数, 而且避免使用复数, 就必须取定

$$\omega = \operatorname{sgn}(x\ x_u\ x_v\ x_{uv}), \tag{2.7}$$

从而, 对调u, v, 便要更改ω 的符号.

由于主切线$(x,\ x_u)$ 和它的共轭切线$(\xi,\ \xi_u)$ 重合, 而且主切线$(x,\ x_v)$ 和它的共轭切线$(\xi,\ \xi_v)$ 也重合,

$$(x,\ \ x_u) = \lambda(\xi,\ \ \xi_u), \quad (x,\ \ x_v) = \mu(\xi,\ \ \xi_v),$$

式中λ, μ 表示待定的比例因数. 可是

$$\begin{aligned} \omega a_{12}^2 &= (x\, x_u\, x_v\, x_{uv}) = (x,\ \ x_u)\cdot(x_v,\ \ x_{uv}) \\ &= \lambda(\xi,\ \ \xi_u)\cdot(x_v,\ \ x_{uv}) \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \xi\cdot x_v & \xi\cdot x_{uv} \\ \xi_u\cdot x_v & \xi_u\cdot x_{uv} \end{vmatrix} = \lambda a_{12}^2, \end{aligned}$$

所以$\lambda=\omega$. 同样, 得到$\mu=-\omega$. 因此,

$$(x,\ \ x_u) = \omega(\xi,\ \ \xi_u), \quad (x,\ \ x_v) = -\omega(\xi,\ \ \xi_v). \tag{2.8}$$

当曲面的点(x) 沿曲面的任意方向$du : dv$进行时, 我们获得

$$(x,\ \ dx) = (x,\ \ x_u)du + (x,\ \ x_v)dv = \omega[(\xi,\ \ \xi_u)du - (\xi,\ \ \xi_v)dv].$$

从此看出: 两直线

$$(x,\ \ dx) \pm (\xi,\ \ d\xi) \tag{2.9}$$

就是主切线. 这个结果显然是与参数的选择无关的(参看富-切, 导论, 46).

根据(2.4) 一定有u, v的函数α, β, γ, ε, p_{11}, p_{22}, 使得

$$x_{uu} = \alpha\, x_u + \beta\, x_v + p_{11}x,$$

$$x_{vv} = \gamma\, x_u + \varepsilon\, x_v + p_{22}\, x.$$

微分的结果是

$$\left\{\begin{aligned} x_{uuu} &= (\alpha_u+\alpha^2+p_{11})x_u + (\beta_u+\alpha\beta)x_v + (p_{11u}+\alpha p_{11})x + \beta\, x_{uv}, \\ x_{uuv} &= (\alpha_v+\beta\gamma)x_u + (\beta_v+\beta\varepsilon+p_{11})x_v + (p_{11v}+\beta p_{22})x + \alpha\, x_{uv}, \\ x_{uvv} &= (\gamma_u+\gamma\alpha+p_{22})x_u + (\varepsilon_u+\beta\gamma)x_v + (p_{22u}+\gamma p_{11})x + \varepsilon\, x_{uv}, \\ x_{vvv} &= (\gamma_v+\varepsilon\gamma)x_u + (\varepsilon_v+\varepsilon^2+p_{22})x_v + (p_{22v}+\varepsilon p_{22})x + \gamma\, x_{uv}. \end{aligned}\right. \tag{I$_1$}$$

从此容易算出第四阶导来函数, 使表成为x, x_u, x_v, x_{uv} 的一次齐式, 并且按照

$$\frac{\partial}{\partial u}x_{uvv} = \frac{\partial}{\partial v}x_{uuv}$$

得到可积分条件. 特别是, 注意到x_{uv} 的系数, 一方是ε_u 而他方是α_v, 所以$\alpha_v=\varepsilon_u$. 因此, 存在一函数θ, 使$\alpha=\theta_u$, $\varepsilon=\theta_v$.

从另外方面也可以求出θ. 微分(2.6),

$$
\begin{aligned}
2\omega a_{12}\frac{\partial a_{12}}{\partial u} =&(x\ x_{uu}\ x_v\ x_{uv}) + (x\ x_u\ x_v\ x_{uuv}) \\
=&2\alpha(x\ x_u\ x_v\ x_{uv}) = 2\theta_u\omega a_{12}^2,
\end{aligned}
$$

即

$$\theta_u = \frac{\partial}{\partial u}\log|a_{12}|.$$

同样地, 得到

$$\theta_v = \frac{\partial}{\partial v}\log|a_{12}|.$$

我们不妨取定$\theta = \log|a_{12}|$, 而且$\alpha = \theta_u$, $\varepsilon = \theta_v$, 从而x 满足下列微分方程组:

$$
\begin{cases}
x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11}x, \\
x_{vv} = \theta_v x_v + \gamma x_u + p_{22}x;
\end{cases} \tag{I}
$$

$$
\begin{cases}
|a_{12}| \ = e^{\theta}, \\
(x\ x_u\ x_v\ x_{uv}) = (\xi\ \xi_u\ \xi_v\ \xi_{uv}) = \omega a_{12}^2 = \omega e^{2\theta}.
\end{cases} \tag{I$_2$}
$$

这组方程称为曲面的基本方程. 从(I) 容易求出可积分条件, 在下节将详细讨论.

应用上述方法到ξ, 同样得到类似方程组

$$\xi_{uu} = \theta_u\xi_u + \beta'\xi_v + \pi_{11}\xi,$$

$$\xi_{vv} = \theta_v\xi_v + \gamma'\xi_u + \pi_{22}\xi,$$

式中θ 就是在(I$_2$) 所决定的同一函数.

为确定β', γ', π_{11} 和π_{22}, 微分(2.1) 并利用$\xi\cdot x_u = \xi_u\cdot x = 0$; 从此得到

$$
\begin{aligned}
0 = \xi_u\cdot x_{uu} + x_u\cdot\xi_{uu} =&\xi_u\cdot(\theta_u x_u + \beta x_v + p_{11}x) + x_u\cdot(\theta_u\xi_u + \beta'\xi_v + \pi_{11}\xi) \\
=&\beta\xi_u\cdot x_v + \beta' x_u\cdot\xi_v = -(\beta+\beta')a_{12},
\end{aligned}
$$

所以$\beta' = -\beta$. 同样, 成立$\gamma' = -\gamma$. 因此, ξ 所满足的基本方程组是

$$
\begin{cases}
\xi_{uu} = \theta_u\xi_u - \beta\xi_v + \pi_{11}\xi, \\
\xi_{vv} = \theta_v\xi_v - \gamma\xi_u + \pi_{22}\xi.
\end{cases} \tag{II}
$$

其次, 我们来确定π_{11} 和π_{22}. 为此, 注意到关系式:

$$
\begin{aligned}
\xi_u\cdot x_{uv} =& \frac{\partial}{\partial u}(\xi_u\cdot x_v) - x_v\cdot\xi_{uu} \\
=& -\frac{\partial a_{12}}{\partial u} - x_v\cdot(\theta_u\xi_u - \beta\xi_v + \pi_{11}\xi)
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{\partial a_{12}}{\partial u} + \theta_u a_{12} = 0$$

和其类似式, 便导出

$$\xi_u \cdot x_{uv} = \xi_v \cdot x_{uv} = x_u \cdot \xi_{uv} = x_v \cdot \xi_{uv} = 0. \tag{2.10}$$

经微分的结果,

$$\begin{aligned}\xi_u \cdot x_{uuv} &= -\xi_{uu} \cdot x_{uv} = -(\theta_u \xi_u - \beta \xi_v + \pi_{11}\xi) \cdot x_{uv} \\ &= -\pi_{11}\xi \cdot x_{uv} = -\pi_{11} a_{12}.\end{aligned}$$

可是从(I_1) 和(2.10) 看出

$$\xi_u \cdot x_{uuv} = \xi_u \cdot (\beta_v + \beta\theta_v + p_{11}) x_v = -(\beta_v + \beta\theta_v + p_{11}) a_{12},$$

所以

$$\pi_{11} = p_{11} + \beta_v + \beta\theta_v, \tag{2.11}$$

且同样,

$$\pi_{22} = p_{22} + \gamma_u + \gamma\theta_u. \tag{2.11$'$}$$

如果给定了方程组(I), 就能求出方程组(II), 并且反过来也成立.

从方程(2.10) 还可导出一个重要公式. 从

$$x_{uv} \cdot \xi_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}(\xi_u \cdot x_{uv}) - \xi_u \cdot x_{uvv} = -\xi_u \cdot x_{uvv}$$

和(I) 获得

$$x_{uv} \cdot \xi_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma) a_{12} = a_{12}^2 \Omega, \tag{2.10$'$}$$

式中

$$\Omega = \frac{1}{a_{12}}(\theta_{uv} + \beta\gamma). \tag{2.10$''$}$$

当β, γ, p_{11}, p_{22} 顺次改为$-\beta$, $-\gamma$, π_{11}, π_{22} 时, 方程(2.11) 和(2.11)$'$ 保持不变.

此外, 从(I) 和(I_1) 得到

$$(x\ x_u\ x_{uu}\ x_{uuu}) = \beta^2 (x\ x_u\ x_v\ x_{uv}) = \omega\beta^2 a_{12}^2.$$

同样,

$$(\xi\ \xi_u\ \xi_{uu}\ \xi_{uuu}) = \omega\beta^2 a_{12}^2.$$

因此,

$$(x\ x_u\ x_{uu}\ x_{uuu}) = (\xi\ \xi_u\ \xi_{uu}\ \xi_{uuu}). \tag{2.12}$$

微分方程(I) 是富比尼和其学派常用的, 因而有富比尼型的基本方程的称谓. 如果置

$$x = e^{\frac{1}{2}\theta} y,$$

(I) 便化为

$$\begin{cases} y_{uu} = \beta\, y_v - c_1 y, \\ y_{vv} = \gamma\, y_u - c_2 y, \end{cases} \tag{2.13}$$

式中β 和γ 保持不变. 置

$$\beta = -2b, \quad \gamma = -2a, \tag{2.14}$$

又可改写(2.13) 为维尔清斯基型的基本方程:

$$\left.\begin{aligned} y_{uu} + 2b\, y_v + c_1 y = 0, \\ y_{vv} + 2a\, y_u + c_2 y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

作为这组方程的应用, 在这里将决定一曲面的主切曲线要全属于线性丛的条件.

从(2.13) 得到

$$\beta\, y_v = y_{uu} + c_1 y,$$

$$\beta y_{uv} = y_{uuu} - (\log\beta)_u y_{uu} + c_1 y_u + \{c_{1u} - c_1(\log\beta)_u\} y,$$

从而, 在$\beta\gamma \neq 0$ 的假定下得出

$$y_{uuuu} + 4b_1 y_{uuu} + 6c_2 y_{uu} + 4d_3 y_u + e_4 y = 0,$$

其中已置

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{2}(\log\beta)_u, \\ c_2 &= -\frac{1}{6}[(\log\beta)_{uu} - (\overline{\log\ \beta})_u^2 - 2c_1 + \beta_v], \\ d_3 &= \frac{1}{4}[2c_{1u} - \beta^2\gamma - 2c_1(\log\ \beta)_u]. \end{aligned}$$

又导入

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{3}(\log\beta)_{uu} - \frac{1}{12}(\overline{\log\beta})_u^2 + \frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{6}\beta_v, \\ q_3 &= \frac{1}{2}c_{1u} - \frac{1}{4}\beta^2\gamma - \frac{1}{4}(\log\beta)_u(\log\beta)_{uu} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\log\beta)_{uuu} - \frac{1}{4}\beta(\log\beta)_u(\log\beta)_v, \\ \theta_3 &= q_3 - \frac{3}{2}p_{2u}, \end{aligned}$$

容易证明:

$$\theta_3 = \frac{1}{4}\beta[(\log\beta)_{uv} - \beta\gamma]. \tag{2.16}$$

主切曲线u 属于线性丛的条件是$\theta_3 = 0$ (参看苏步青: 射影曲线概论, 79~80) , 就是

$$(\log\beta)_{uv} = \beta\gamma. \tag{2.17}$$

根据同样的理由, 得到曲线v 属于线性丛的条件

$$(\log\gamma)_{uv} = \beta\gamma. \tag{2.18}$$

由此导出

$$\left(\log\frac{\beta}{\gamma}\right)_{uv} = 0, \tag{2.19}$$

就是说, $\beta:\gamma$ 必须是单独u 的函数与单独v 的函数的比. 凡满足(2.19) 的曲面称为**等温主切曲面**. 如果适当地选取参数u, v, 便可化(2.19) 式为

$$\beta = \gamma. \tag{2.20}$$

这是因为, 施行参数变换$\overline{u} = \overline{u}(u)$, $\overline{v} = \overline{v}(v)$, 便有

$$\overline{\beta}\frac{d\overline{u}^2}{d\overline{v}} = \beta\frac{du^2}{dv}, \quad \overline{\gamma} = \frac{d\overline{v}^2}{d\overline{u}} = \gamma\frac{dv^2}{du}, \tag{2.21}$$

从而

$$\overline{\beta}:\overline{\gamma} = (\beta:\gamma):(\overline{u}':\overline{v}')^3.$$

这一来, 所论曲面的$\beta = \gamma$ 必须满足刘维尔型的微分方程:

$$\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} = \beta^2. \tag{2.22}$$

因而,

$$\beta = \gamma = \frac{\sqrt{U'V'}}{U+V}, \tag{2.23}$$

式中U 单独是u 的任意函数, V 单独是v 的任意函数;

$$U' = \frac{dU}{du}, \quad V' = \frac{dV}{dv}.$$

1.3 可积分条件

对于一个给定的曲面, 常可求两函数β, γ 和无穷多θ, p_{11}, p_{22}, 使得曲面一点的坐标x 满足方程组(I) . 实际上, 施行变换

$$x = \rho x' \quad (\rho \neq 0),$$

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com