名校名师数学教学与训练荟萃

MINGXIAOMINGSHISHUXUEJIAOXUE YUXUNLIANHUICUI

高三

几何总复习

JIHEZONGFUXI

主编\李荫楷

名校名师

长春出版社
CHANGCHUNCHUBANSHE

名校名师数学教学与训练荟萃

高三几何总复习

主　　编　李荫楷
副 主 编　才裕平　陈受真
本册主编　李盘喜

长 春 出 版 社

书　　名	高三几何总复习
作　　者	李荫楷/主编
责任编辑	毕素香
封面设计	王国擎
督　　印	陈凤和
出　　版	长春出版社(长春市建设街43号)
发　　行	新华书店经销
照　　排	长春市正泰印务有限责任公司
印　　刷	吉新月历公司印刷分公司
开　　本	850×1168　1 / 32
印　　张	17.125
字　　数	439 000
印　　数	1—16 080 册
版　　次	1999 年 1 月第 1 版
印　　次	1999 年 1 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7—80604—730—1 / G · 226
定　　价	17.50 元

（如遇有质量问题请与印刷厂联系调换）

绪　论

《名校名师数学教学与训练荟萃》是一套系列丛书，从初一到高三，每个年级有代数、几何两册，共十二册，同现行教科书及课堂教学相对应，面向各年级中学生，是他们学好数学的指导书、参考书和趣味读物.

编写动意及过程

现在的中学生是实现21世纪中叶我国成为世界中等发达国家战略目标的主要建设者.数学是现代科学和技术的语言和工具，在现代文化中扮演着中心角色.中学生学好数学，是将来成为高素质建设者的必备基础.

怎样才能真正更快更好地学好数学?中学生以及家长都十分关注这个问题.我们发现一些中学生数学学习正在走弯路，他们把数学学习的主要时间和精力用于做习题和试卷上.做不完的习题，答不完的试卷，似乎这样就能提高所需的解题能力.但结果却往往不近如人意，即使有人侥幸得了高分，他又是进一步学习的低能儿.其实，他们忽视了数学学习中的基础和精华部分，即：数学概念、公式、法则、定理、定律的深入理解和掌握，以及对数学思想的认识和数学意识的培养.他们学得的只是一些缺乏内在联系的杂乱的做题方法，记忆负担沉重，心理压力巨大，这是典型的应试教育摧残着我们的中学生.

名牌学校中的数学学科教学带头人在多年实践中，为解决学生数学学习的上述问题，积累了丰富的经验.它是我们教育行业宝贵的共同财富.趁这些年高的名师还健在的时候，将他们毕生之积

累挖掘并汇集起来，再进一步提炼、归纳、整理并推广，是当前大力推进中学实施素质教育的重要举措.为此，在长春教育学院党委书记李凤翔、院长郭建枢的大力支持下，我们组织了长春市名牌学校：东北师大附中、吉林省实验中学、长春市实验中学、长春市十一中、长春市六中、长春市朝阳区教师进修学校以及长春市教育学院数学系中曾多年在第一线任教的中学数学教研组长、特级教师、有建树高水平的高级教师十五位，分别任丛书及各册主编.经多次讨论研究确定了本书的编写原则和编写模式.在他们徒弟们的配合下，经近一年的努力，完成了本书稿.

为实施素质教育服务是本丛书编写的基本原则

一个中学生的数学素质是他文化素质中的核心部分，居于学生认知结构的顶端，是学生智力因素的基础.在深入理解数学概念，牢固掌握公式、法则、定理、定律的基础上，对数学知识和数学方法产生的本质认识就是数学思想.

数学思想的不断积累，逐步形成用数学的思维方式去分析问题和解决问题的思维习惯或自觉意识，这就是数学素质，它是数学能力的内在部分.培养学生的数学素质应是数学教育和数学学习的出发点和归宿.提高了学生的数学素质，不仅为进一步学习或参加社会实践打下了基础，也同时具备了应试能力.有志考入重点学校，将来成为21世纪高素质人才的中学生，只有着眼于提高自身的数学素质，在数学学习上才能不走或少走弯路，达到事半功倍的效果.这也是本丛书编写的中心意图.

能否“淡化概念”

为培养数学素质，首先必须重视数学概念的学习.高度抽象的数学概念，来源于客观现实的具体事例.它是反映事物本质属性

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的思维形式，是人们思维和数学语言的最基本的元素．一切数学公式、法则、定理、定律都是由数学概念组合而成．弄懂数学概念、学好数学概念是数学学习的前提．当前轻视数学概念教学与学习的倾向十分严重，甚至有人提出“淡化概念”这是一种错误且十分有害的导向．诚然，鉴于中学生的年龄特征，有些数学概念的学习不能提出过高的要求，特别是将概念形式化、给出概念定义的语言，不应追求过分严谨，考虑到可接受性原则，九年义务教育数学教学大纲对一些数学概念，如：有理数、方程、不等式、代数式、二次根式等等，从以前大纲中要求“理解”降到“了解”的层次，这是因为初中学生对上述概念很难达到理性认识，只要求在感性认识的水平上，能说出是什么和在有关问题中能识别就够用了．这决不是“淡化”，“淡化”概念的结果，必然在学生认知结构中出现概念的不稳定、不清晰、不准确，容易出现学习的负迁移，使进一步学习失去了稳定的基础，使学生陷入似是而非的境地．

丛书各册的基本结构与意图

本丛书各册都按教科书对应的各章标题编写．每章（或单元）的开头，我们都编写了一段能引起学生兴趣的导言，根据不同情况，采用了不同的编写方式，有的从数学史的角度；有的从主要知识的广泛应用的角度；有的从本章知识的地位和作用、历史故事、有趣问题…… 等角度，其目的是引起读者对学习本章（或单元）内容的兴趣，诱发读者学习的积极性、主动性，并尽可能帮助读者寻求对抽象数学知识的具体感觉．

数学概念、公式、法则、定理、定律以及它们之间的联系，构成了数学各章的知识结构，它是数学学习的核心内容．导言之后是本章（或单元）的知识结构分析，分析它们之间的联系、本章主要解决哪些问题、其中哪个是主要问题、解决主要问题的基本方法和依据的基本原理．对主要的概念、公式、法则、定理、定律，深入剖析它

们的实质，尽可能用通俗的语言和学生常见的事例来阐述抽象的数学原理.

在每章的知识结构分析之后选编了若干例题、习题.在数学教学与学习中，训练占有重要地位.通过例题、习题的学习与训练，不仅可以加深对概念、公式、法则、定理、定律的认识和理解，同时也是训练技能、发展能力的重要手段.所谓技能，是在理解概念、公式、法则、定理、定律等知识的基础上，经过反复练习，对其应用达到熟练程度，甚至表现为自动化的行动方式，即形成了运用知识的技术，通常称为技能.如此便达到了教学大纲中对概念、公式、法则、定理、定律等知识要求“掌握”的水平.在掌握的基础上，对概念、公式、法则、定理、定律等知识的综合运用达到了灵活的程度，成为学生高级神经系统活动的潜在势能，如此便达到了教学大纲中“灵活运用”的水平.这时学生便形成了能力、培养了数学素质.

按数学教学大纲对知识要求的不同层次（了解、理解、掌握、灵活运用）选配例题、习题是本丛书的重要编写原则.本丛书例题、习题的配置基本上和教科书相应部分的例题、习题平行，且起点相当.力求层次分明，小步上升，循序渐进，题型新颖，类型全面.例题侧重于解题思路的分析、解题思维过程的揭示、易犯错误的纠正、典型解题方法的归纳.重要的典型例题之后，附有对解题方法、解题规律以及对所蕴含的数学方法和数学思想的概括和小结.

一个数学题目的解答过程，是由题目已知到结论，用学过的概念、公式、法则、定理、定律等知识按着一定的逻辑关系进行组合，建立逻辑通道的过程.这个逻辑通道，相应一个数学知识链，其每根链条就是已学过的概念、公式、法则、定理、定律等数学基础知识.按数学中的排列组合法则，一定个数基础知识的排列种数是相当大的，其中每个符合逻辑关系排列的知识链就对应一道数学题.因而数学题目的个数相当之多，多到有人比做“题海”.只靠埋头做题争取考试高分的学生，实质上想通过模仿记忆中的数学知识链的办法，提高自己的解题能力.这类似于“熊瞎子掰苞米”，费力大，

收效少.数学例题、习题的学习和演算过程,应当是深入理解数学知识、概括数学方法、提炼数学思想的过程.对于典型的例题、习题,应当反复学习、演算、理解、概括和提炼,从而训练解题技能,提高解题能力.

为了面向全体学生,满足高、中、低各层次的学生的不同要求,习题一般分A组、B组、C组.A组相当于教材习题的水平,重点作为强化基础知识的形成型训练.B组相当于每章复习题的水平,作为学完一章后的提高型训练.C组略高于复习题水平,供上等学生进一步培养能力使用.各组习题都配有较详细的提示、略解和答案,使后进学生能看懂,排在每章最后.

例题、习题之后是本章的总结.对本章例题、习题所用的方法和技巧进行梳理、分类、归纳、概括,分析其中的内在联系,总结解本章数学问题最基本、最典型的数学方法.读书有个"由薄到厚,再由厚到薄"的过程,做数学习题也有个"由少到多,再由多到少"的过程.当做完一章的习题之后,通过分析、综合,提炼出最基本的数学方法和数学思想之后,诸多的数学习题,只不过是几类数学题的变形,这是培养数学解题能力、提高数学素质的重要手段.也是名师教学与训练的精华.

每章最后附两套测试题,初中一二年级要求40分钟内完成.初三至高三各年级要求90分钟内完成.测试题的内容力求对本章涉及的知识、技能和能力做到全面覆盖,供读者学完本章之后,作自我验收用.每册书最后都配有两套综合测试题.测试题的略解与答案排在每册书的最后.

例题、习题、测试题是数学训练的主要内容.科学地组织训练,是培养高能学子的必由之路,也是名校名师的共同经验.

本丛书在编写过程中,尽可能结合中学现行数学教学的进度和安排.初中几何、代数,分别与现行数学教科书平行编写,初三几何和初三代数最后各加总复习一章,为参加中考学生使用.高一立体几何、高二解析几何和现行教科书平行编写.高一代数与现行高

中代数第一册平行编写，高二代数涵盖现行高中代数第二册、第三册. 高三几何、高三代数面向高三学生总复习，为参加高考学生使用.

由于时间仓促，不适之处望读者校正.

本册书主编是吉林省实验中学数学教研组组长李盘喜，参加撰稿人还有于海洋、王兴国、李景秋、高长山、孙立文.

李荫楷

目　录

立体几何部分

第一章　直线与平面……（1）

第二章　多面体和旋转体 ……（91）

解析几何部分

第一章　直线……（233）

第二章　圆锥曲线……（298）

第三章　参数方程、极坐标……（445）

综合测试题……（511）

测试题答案……（517）

立体几何部分

第一章　直线与平面

知识概述

一、平面

1. 知识要点

(1) **公理** 1　如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线上的所有的点都在这个平面内.

(2) **公理** 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

(3) **公理** 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

(4) **推论** 1　经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个平面.

(5) **推论** 2　经过两条相交直线有且只有一个平面.

(6) **推论** 3　经过两条平行直线有且只有一个平面.

2. 重点、难点分析

弄清三公理三推论的地位和作用，着重掌握它们的条件、结论和应用. 它是研究立体几何的基本元素点、线面之间关系的，是立体几何转化为平面几何的理论基础. 其中公理 1 是判定直线是否在平面内的依据，公理 2 是判定两平面是否相交的依据(同时需理解，① 两个平面的交线在两个平面内，是两个平面的公共直线；② 两个平面的交线上的点是公共点，不是交线上的点不是公共点；③ 两个平面的公共点全在交线上，不是公共点不在交线上. 在证明“点共线”、“线共点”、“点在面内”等具体问题时，常直接运用这些

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

结论.),公理3及三个推论是确定平面的依据."有且只有"的含义是"存在"且"唯一",因此证明这类问题时要从"存在性"和"唯一性"两个方面来证,这方面的要求不高.

本节要特别注意.避免:"三点确定一个平面"和"一条直线和一点确定一个平面"等一些表述上不完整的错误现象.

二、空间两条直线

1. 知识要点

(1) 定义

不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

(2) 两条直线的位置关系有三种:

相交直线 —— 有且只有一个公共点 } 共面
平行直线 —— 没有公共点 }
异面直线 —— 没有公共点,不共面

(3) **公理4** 平行于同一条直线的两条直线平行.

(4) **等角定理** 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等.

(5) 异面直线所成的角 a,b 为异面直线,过空间任意一点 O,作 $a' \parallel a, b' \parallel b$,那么相交直线 a', b' 所成的锐角(或直角)叫异面直线 a、b 所成的角,若异面直线所成的角为 θ,则 θ 的取值范围为 $0° < \theta \leqslant 90°$.

(6) 两条异面直线垂直 若两条异面直线所成的角是直角,就说这两条直线互相垂直.

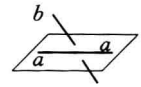
(7) 异面直线的公垂线 和两条异面直线都垂直且相交的直线叫两条异面直线的公垂线(公垂线是有且只有一条,其证明中学课本不作要求).

(8) 两条异面直线的距离 两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度,叫做两条异面直线的距离.

2. 重点难点分析

两条直线位置关系的知识结构如下:

两条直线
- 共面直线
  - 平行
  - 相交



- 异面直线
  - 定义
  - 图形(如上图)
  - 性质(不同在任何一个平面内，无公共点)
  - 判定(教科书第 10 页例题)
  - 成角
  - 距离

重点是两条直线位置关系的判定，两条异面直线所成角及两条异面直线的距离；难点是求两条异面直线的所成的角及其距离的求解.

求异面直线所成的角，一般分为两个步骤：1. 先找到角(用便于计算的平面角来表示)；2. 然后再计算.

求两条异直线的距离，一般有两种方法：1. 构造函数，在两线上各找一点，求其距离最小；2. 按定义来找，要证明某线段和两条异面直线同时垂直，相交.

三、空间直线和平面

1. 知识要点

(1) 空间直线和平面的位置关系：

直线在平面内 —— 有无数个公共点

直线不在平面内
- 平行 —— 没有公共点
- 相交 —— 只有一个公共点

(2) 直线和平面平行的判定定理：如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

(3) 直线和平面平行的性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

(4) 直线和平面垂直的定义　一条直线和一个平面内的任何

一条直线都垂直，叫做这条直线和这个平面垂直.

(5) 直线和平面垂直的判定定理 1　如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线就垂直于这个平面.

(6) 直线和平面垂直的判定定理 2　如果两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

(7) 直线和平面垂直的性质定理　如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线平行.

(8) 点到平面的距离　从平面外一点引平面的垂线，这点和垂足间的距离，叫做这点到这个平面的距离.

(9) 直线和平面的距离　一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到这个平面的距离叫直线和平面的距离.

(10) 直线和平面所成的角　一条直线和一个平面斜交，这条直线和它在这个平面上的射影所成的锐角，叫这条直线和这个平面所成的角；一条直线垂走于平面，直线和平面成直角；一条直线和平面平行或在平面内，它们成 0°.

(11) 射影定理　从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中，射影相等的两条斜线段相等，射影较长的斜线段也较长；反之，相等的斜线段的射影相等，较长的斜线段的射影也较长；垂线段比任何一条斜线段都短.

(12) 三垂线定理　平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它和这条斜线垂直.

(13) 三垂线定理的逆定理　平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它就和斜线在这个平面内的射影垂直.

2. 重点难点分析

线、面的平行、垂直是本节的重点. 线面所成的角及其距离可以看成平行、垂直的应用. 对于每一个定义、判定定理、性质定理的条件和结论要分析清楚，否则就不能正确应用，特别是判定定理与性质定理不能误用，比如：线面平行的判定定理，条件：平面外的一条直线和平面内的一条直线平行

结论：则这条直线和这个平面平行

4.24

线面平行的性质定理条件：一直线和一个平面平行过该直线的平面与已知平面相交.

结论：直线和交线平行.

难点：作辅助平面、辅助线及间接证明方法中的反证法是空间想象力差的同学不易掌握和应用.

本节的结构网络如下：

- 直线与平面的位置关系
  - 直线在平面内
  - 平行
    - 定义
    - 判定
    - 性质
  - 相交
    - 垂直
      - 定义
      - 判定
      - 性质
    - 斜交 — 斜线与平面所成的角
    - 斜垂
      - 斜线长定理
      - 三垂线定理及
      - 三垂线定理的逆定理

四、空间两个平面

1. 知识要点

(1) 空间两个平面的位置关系

- 平行 —— 没有公共点
- 相交 —— 有一条公共直线

(2) 两平面平行的判定定理 1　如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一平面，那么这两个平面平行.

(3) 两平面平行的判定定理 2　垂直于同一条直线的两平面平行.

(4) 两平面平行的性质定理 1　如果两平行平面分别与第三个平面相交，那么它们的交线平行.

(5) 两平面平行的性质定理 2　如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，那么这条直线也垂直于另一平面.

(6) 两平面平行的性质定理 3　两平面平行，其中一个平面内的任何一条直线必平行于另一个平面.

(7) 两平行平面间的距离　从一个平面上的任意一点到另一平面的距离叫做两平行平面间的距离.

(8) 二面角的定义　从一条直线出发引出的两个半平面所组成的图形叫做二面角.

(9) 二面角的平面角　以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角.

(10) 两平面垂直的定义　两平面相交，如果所成的二面角的平面角是直角，就说这两个平面互相垂直.

(11) 两平面垂直的判定定理　如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

(12) 两平面垂直的性质定理 1　如果两个平面互相垂直，那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线，在第一个平面内..

(13) 两平面垂直的性质定理 2　如果两平面互相垂直，那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线，在第一个平面.

(14) 异面直线上两点的距离公式

$EF = \sqrt{d^2 + m^2 + n^2 \pm 2mn\cos\theta}$

2. 重点、难点分析

本节知识结构、网络

两平面的位置关系
- 平行
  - 定义
  - 判定
  - 性质
- 相交
  - 二面角 —— 二面角的平面角
  - 垂直
    - 定义
    - 判定
    - 性质

重点是两平面的平行与垂直的判定与性质定理的运用.

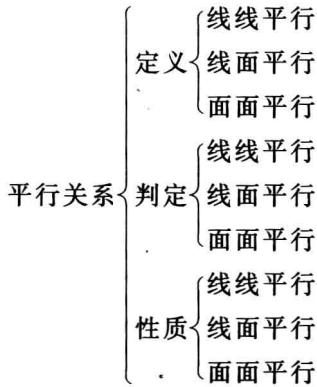
难点是辅助线、辅助面的作法.

五、概括总结

本章在平面几何的基础上,以四个公理为逻辑推理的依据,对空间的线线、线面、面面的位置关系进行了定性和定量两方面的研究.角和距离是从数量方面研究位置关系的两个重要概念.

有关线线、线面、面面的平行与垂直关系的判定定理与性质定理是本章的中心问题.应用这些定理时要弄清题设和结论.学完本章后判定垂直与平行关系的途径就更加广泛,特别注意平行与垂直的转化,例如"垂直于同一平面的两条直线互相平行"去判定两线平行,"若两平面垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面"去判定一条直线与一个平面垂直.对本章的知识系统整理如下,便于大家记忆和检索.

1. 有关平行问题的网络



要注意有关的平行关系的转化:

2. 有关垂直问题的网络

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com