高等数学

解题指引与同步练习

⑤ 定积分及其应用

曾令武　吴　满　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指引与同步练习/曾令武,吴满编著.—广州：华南理工大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-5623-2708-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①曾…②吴…　Ⅲ.高等数学—高等学校—解题　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 200962 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com.cn
责任编辑：欧建岸　乔　丽
印 刷 者：广州市穗彩彩印厂
开　　本：787mm×960mm　1/16　**印张**：32　**字数**：645 千
版　　次：2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～5000 册
定价（1～10 册）：48.50 元

前　言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分,它不同于普通高等教育,有着自身的特点.因此,编写、使用适合成人教育特点的教材及辅导用书,是提高教学质量的有力保证.作者从事各类不同层次数学学科的教学近50年,在长期的教学实践中,深知要使学生掌握数学的"三基"(基本概念、基本理论、基本方法),必须要通过一定数量的习题练习才能实现.为了达到这个目标,作者作了一种新的尝试,把辅导与练习合编成一册,即对每章的"三基"内容给予小结,并举例作解题指引,接着安排一些基本练习题给读者反复练习,以便及时巩固"三基".然后配置适量的拓展题给读者一个充分训练的平台.章末附有习题答案.

本书可作为成人高等教育院校各类专业的辅导用书.对专科学生,书中的拓展题部分及有"*"号标记的内容不作要求.

本书的编写和出版,自始至终得到了华南理工大学继续教育学院有关领导的大力支持,在此向他们表示感谢.

由于水平所限,书中不完善之处,恳请同仁和读者批评指正.

编　者

2007年10月于广州

出版说明

由吴满、曾令武编著的这套教学辅导与练习册，在华南理工大学继续教育学院使用已 10 年，一直得到任课教师和学生的好评，这次出版的是第三次修订本.

学好数学就一定要做习题.我国伟大的数学家华罗庚说过，“学数学不做习题，等于你进了一个宝藏后出来时却是两手空空的”.两位作者从事成人教育多年，十分了解成人教育的特点，即学员都是在做好本职工作的前提下，业余学习，甚至部分学生还需兼顾家庭.因此，如何利用更少的时间完成学习任务是学生面对的实际问题.作者根据多年的教学经验，把辅导与练习合编成一册，对每章的“三基”内容给予小结，并精选一些例题，指引学生掌握解题的要领.然后安排一些基本题型，分类编排，使学生由浅入深地掌握数学的基本知识.最后配置适量的拓展题给学生一个充分训练的平台，使部分学生的学习能力提高一个层次，为以后深造打下坚实的基础.

练习题目都留出空白给学生解题之用，免去再抄题目而省时，任课教师批改作业也很方便.因此，这是一套很实用的教辅工具.

华南理工大学继续教育学院

教学主管院长　金军

定积分及其应用

定积分是一元函数微分法逆运算的另一个侧面，即所谓“微分求和”问题．学习要求是：理解定积分的概念及其几何意义，知道它的存在条件和性质；重点是掌握变上(下)限积分求导和牛顿-莱布尼兹公式，结合定积分的换元法和分部积分法计算定积分；会运用“微元法”解决简单的几何、物理方面的应用问题．

一、定积分概念

(1)定积分是积分和式的极限，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$．如果存在，则此极限值是个确定的数，它只与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么字母(例如把 x 换成 t)表示无关，即有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$．

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，亦称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积．可以证明，闭区间上的连续函数或仅有有限个第一类间断点的函数都是可积的．

今后，如无特别指明，我们总假定 $f(x)$ 是可积的．

(2)几何意义：

① 在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值等于由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积 A(图 5-1)．

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$$

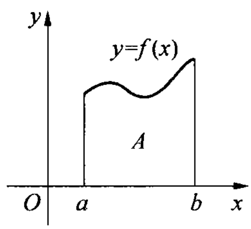

图 5-1

② 在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant 0$，此时曲边梯形位于 x 轴下方(图 5-2)，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$$

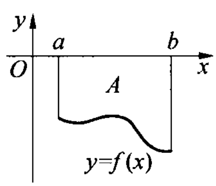

图 5-2

③ 在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 的值有正也有负时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值应等于由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=$

$a, x=b$ 及 x 轴所围成的图形各个部分面积的代数和(即在 x 轴上方的部分其面积冠以正号,下方部分的面积冠以负号).如图 5-3 所示,有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3$$

若要求平面图形的(真正)面积,用定积分则应该表示成

$$A = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

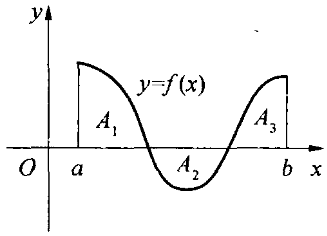

图 5-3

例 1 利用定积分的几何意义确定定积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-2}^{1}x\mathrm{d}x$ 的值.

解 由 $y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 可知,定积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示如图 5-4 所示的上半圆的面积.即

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

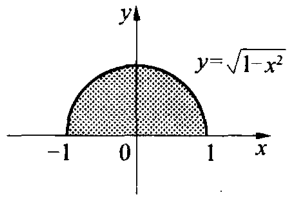

图 5-4

而由 $y=x\ (-2\leqslant x\leqslant 1)$ 可知,定积分 $\int_{-2}^{1}x\mathrm{d}x$ 表示如图 5-5 所示的两个三角形面积的代数和.即

$$\int_{-2}^{1}x\mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = -\frac{3}{2}$$

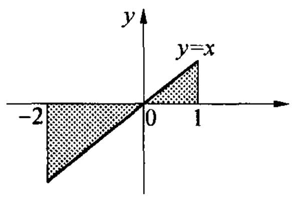

图 5-5

习题 5-1

基本练习题

1. 选择一个正确的答案填在括号中:

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ ( )

A. $b-a$ B. $f(b)-f(a)$ C. $f(x)$ D. 0

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 的值 ( )

A. 小于 0 B. 大于 0 C. 等于 0 D. 不确定

2. 设质点以速度 $v=4+t^2$ 做直线运动,试用定积分表示质点在时间间隔

$[0,3]$内所走过的路程 S.

解

3. 利用定积分的几何意义确定下列定积分的值:

(1) $\int_0^{2\pi}\cos x\,\mathrm{d}x =$

(2) $\int_0^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x =$

(3) $\int_a^{b}x\,\mathrm{d}x\,(a<b) =$

4. 利用定积分的几何意义说明下列公式成立:

(1) $\int_a^{b}\mathrm{d}x = b-a$;

(2) 当 $f(x)$为连续奇函数时, $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x = 0$;

(3) 当 $f(x)$为连续偶函数时, $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

解 (提示:画图说明)

拓展题

5. 设有一质量非均匀分布的细棒,长为 l,在距离左端点 x 处的线密度 $\rho =$

$2+3x$.试用定积分表示该细棒的质量 m.

解

二、定积分的性质

性质 1 (交换积分上、下限,则积分值变号)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{特别} \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

性质 2 (线性性质)

$$\int_a^b [Af(x) + Bg(x)]\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + B\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad (A,B \text{ 为常数})$$

性质 3 (定积分对区间的可加性)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (c \text{ 为任意指定的实数})$$

性质 4 (定积分的比较性质)如果在区间$[a,b]$上有 $f(x)\leqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

性质 5 (定积分的估值定理)设 M,m 分别为连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值,则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

性质 6 (定积分中值定理)如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上至少存在一点 ξ,使得下式成立:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b)$$

通常称 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为积分均值,它是连续函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值.

例 2 比较下列各对积分值的大小:

(1) $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 与$\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 与$\int_0^\pi \frac{1}{2}\mathrm{d}x$;

*(3) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$.

解 (1) 在区间$[1,2]$上,$x^2\leqslant x^3$. 由定积分的比较性质可知

$$\int_1^2 x^2\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 x^3\mathrm{d}x$$

(2) 在区间$[0,\pi]$上，$\dfrac{1}{1+\sin^2 x} \geqslant \dfrac{1}{2}$. 由比较性质得

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$$

*(3) 在区间$[0,1]$上不容易直接看出 x 与 $\ln(1+x)$的大小，我们采用下面方法：

令 $f(x)=x-\ln(1+x)$，在区间$(0,1)$内有 $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0$

即函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续且单调增加，所以

$$f(x) = x - \ln(1+x) \geqslant f(0) = 0 \qquad x \geqslant \ln(1+x)$$

由比较性质得

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$$

例 3 证明不等式 $\dfrac{3}{\mathrm{e}^4} \leqslant \displaystyle\int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant 3$.

证 先求被积函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$在积分区间$[-1,2]$上的最大值和最小值. 由

$$f'(x) = (\mathrm{e}^{-x^2})' = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \xlongequal{令} 0$$

解得驻点 $x=0$(它属于区间$(-1,2)$内)；无不可导点. 所以，只需比较驻点及区间端点处的函数值：

$$f(-1) = \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad f(0) = 1 \qquad f(2) = \frac{1}{\mathrm{e}^4}$$

得最小值 $m=\dfrac{1}{\mathrm{e}^4}$，最大值 $M=1$. 于是，根据估值公式得

$$\frac{1}{\mathrm{e}^4}[2-(-1)] \leqslant \int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant 1 \cdot [2-(-1)]$$

即

$$\frac{3}{\mathrm{e}^4} \leqslant \int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant 3$$

例 4 求函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$在区间$[-a,a]$上的平均值.

解

$$\bar{y} = \frac{1}{a-(-a)}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$$

根据定积分的几何意义知 $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi a^2$，所以

$$\bar{y} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{\pi a}{4}$$

习题 5－2

基本练习题

6. 选择一个正确的答案填在括号中：

(1) $\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx+\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx=$ （　　）

A. $-\pi$　　B. 0　　C. π　　D. 2π

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $\int_2^3 f(x)dx+\int_3^2 f(t)dt+\int_1^2 dx=$ （　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(3) 下列各式成立的是 （　　）

A. $\int_0^1\sqrt{x}\,dx<\int_0^1 x^2dx$　　B. $\int_0^1 x^3dx<\int_0^1 x^2dx$

C. $\int_0^1\sqrt{x}\,dx<\int_0^1 x^3dx$　　D. $\int_0^1 x^2dx<\int_0^1 x^3dx$

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上连续且平均值为 6，则 $\int_{-1}^2 f(x)dx=$ （　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 6　　C. 12　　D. 18

7. 利用定积分性质或几何意义比较下列各对积分值的大小：

(1) $\int_3^4(\ln x)^2dx$ 与 $\int_3^4(\ln x)^3dx$；　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$；

(3) $\int_{-\pi}^0\sin x\,dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$.

解

拓展题

8. 验证下列各不等式成立:

(1) $84 < \int_{-6}^{8} \sqrt{100 - x^2}\,\mathrm{d}x < 140$;

证

(2) $2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} < \int_{0}^{2} \mathrm{e}^{x^2 - x}\,\mathrm{d}x < 2\mathrm{e}^2$.

证

9. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(x)>0$,证明$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.(提示:利用定积分中值定理)

证

三、微积分基本定理

1. 变上限积分的求导公式

定理 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则变上限积分

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

在$[a,b]$上可导,且它的导数为

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

定理告诉我们,变上限积分 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数,这就肯定了连续函数的原函数必定存在.

例 5 (1) 设 $F(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2+t}\mathrm{d}t$ $(x>0)$,求 $F'(x)$,$F'(0)$;

(2) 设 $F(x)=\int_x^2 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$,求 $F'(x)$.

解 (1) $F'(x)=\left(\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2+t}\mathrm{d}t\right)'=\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2+x}$

$$F'(0)=\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2+x}\bigg|_{x=0}=\frac{1}{2}$$

(2) 所给函数 $F(x)=\int_x^2 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$ 是变下限积分,有

$$F'(x)=\left(\int_x^2 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t\right)'=\left(-\int_2^x \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t\right)'=-\sqrt{1+x^2}$$

例 6 设 a,b 是常数,求

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$; (2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{x^2} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$; (3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

解 (1) 因为定积分 $\int_a^b t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 是个常数,所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=0$.

(2) 因为复合函数 $\int_a^{x^2} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 是由 $\int_a^u t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, $u=x^2$ 复合而成,由变上限积分

的求导公式和复合函数导数法则，得

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} te^{-t}dt = x^2e^{-x^2}\cdot(x^2)' = 2x^3e^{-x^2}$$

(3) 因 $\int_x^{x^2} te^{-t}dt = \int_x^a te^{-t}dt + \int_a^{x^2} te^{-t}dt$，所以

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} te^{-t}dt = \left(\int_x^a te^{-t}dt\right)' + \left(\int_a^{x^2} te^{-t}dt\right)' = -xe^{-x} + 2x^3e^{-x^2}$$

*附注：有时为了简化解题过程，也可以把下述等式作为公式使用.

① $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x)$；

② $\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi_2(x)} f(t)dt = f(\varphi_2(x))\cdot\varphi_2'(x)$；

③ $\frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^b f(t)dt = -f(\varphi_1(x))\cdot\varphi_1'(x)$；

④ $\frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt = f(\varphi_2(x))\cdot\varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x))\cdot\varphi_1'(x)$.

例如，例 6 之(3) 应用公式④，有

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} te^{-t}dt = x^2e^{-x^2}\cdot(x^2)' - xe^{-x} = 2x^3e^{-x^2} - xe^{-x}$$

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,dt}{x^4}$.

解 本例属 $\frac{0}{0}$ 型待定式，应用洛必塔法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^{x^2}\sin t\,dt\right)'}{(x^4)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2\cdot 2x}{4x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2. 牛顿-莱布尼兹公式

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的任一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

按照这个公式，计算定积分时，只需求出被积函数的任一原函数，再把积分的上限与下限分别代入，算出原函数在上、下限处的函数值，其差便是所求定积分的值.这样一来，定积分的计算就转化为求被积函数的任一原函数在积分区间的增

量.

例 8 计算下列定积分：

(1) $\int_{0}^{1} x^{2} \mathrm{d} x$; (2) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^{2}} \mathrm{d} x$.

解 (1) 因为$\frac{x^3}{3}$是被积函数 x^2 的一个原函数，根据牛顿-莱布尼兹公式有

$$\int_{0}^{1} x^{2} \mathrm{d} x=\left.\frac{x^{3}}{3}\right|_{0}^{1}=\frac{1^{3}}{3}-\frac{0^{3}}{3}=\frac{1}{3}$$

(2) 因为 $\arctan x$ 是被积函数$\frac{1}{1+x^2}$的一个原函数，根据牛顿-莱布尼兹公式有

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^{2}} \mathrm{d} x=\left.\arctan x\right|_{-1}^{1}=\arctan 1-\arctan (-1)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

例 9 计算下列定积分：

(1) $\int_{0}^{2} \frac{1}{2 x-5} \mathrm{d} x$; (2) $\int_{1}^{5} \frac{1}{\sqrt{1+3 x}} \mathrm{d} x$.

解 (1) 因为 $\int \frac{1}{2 x-5} \mathrm{d} x=\frac{1}{2} \int \frac{1}{2 x-5} \mathrm{d}(2 x-5)=\frac{1}{2} \ln |2 x-5|+C$

所以

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{2 x-5} \mathrm{d} x=\left.\frac{1}{2} \ln |2 x-5|\right|_{0}^{2}=\frac{1}{2}(\ln |-1|-\ln |-5|)=-\frac{1}{2} \ln 5$$

当熟悉应用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分的含义之后，不必将求不定积分的步骤单独分离出来，而可以如下表述：

$$\begin{aligned} \int_{0}^{2} \frac{1}{2 x-5} \mathrm{d} x &=\frac{1}{2} \int_{0}^{2} \frac{1}{2 x-5} \mathrm{d}(2 x-5) \\ &=\left.\frac{1}{2} \ln |2 x-5|\right|_{0}^{2}=\frac{1}{2}(\ln |-1|-\ln |-5|)=-\frac{1}{2} \ln 5 \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} \int_{1}^{5} \frac{1}{\sqrt{1+3 x}} \mathrm{d} x &=\frac{1}{3} \int_{1}^{5}(1+3 x)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}(1+3 x)=\left.\frac{2}{3} \sqrt{1+3 x}\right|_{1}^{5} \\ &=\frac{2}{3}(4-2)=\frac{4}{3} \end{aligned}$$

例 10 计算下列定积分：

(1) $\int_{0}^{1} x \sqrt{1+x^{2}} \mathrm{d} x$; (2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin ^{2} x \cos x \mathrm{d} x$.

解 (1) $\int_{0}^{1} x \sqrt{1+x^{2}} \mathrm{d} x=\frac{1}{2} \int_{0}^{1}\left(1+x^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\left(1+x^{2}\right)=\left.\frac{1}{3}\left(1+x^{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right|_{0}^{1}=$ $\frac{1}{3}(2 \sqrt{2}-1)$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}\sin x = \frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left(\sin^3\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{3}$

例 11 设 $f(x)$ 为连续函数，且满足关系式 $f(x) = 4x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解 $f(x)$连续，定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 存在，它是一个确定的数值，记 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$. 于是

$$f(x) = 4x - A$$

将上式两边从 0 到 1 作定积分，有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (4x - A)\mathrm{d}x = \left[2x^2 - Ax\right]_0^1 = 2 - A$$

即 $A = 2 - A$. 所以

$$A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$$

例 12 求 $\int_{-1}^3 |2 - x|\mathrm{d}x$.

解 被积函数为分段函数

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x & (-1 \leqslant x \leqslant 2) \\ x - 2 & (2 < x \leqslant 3) \end{cases}$$

但它在区间$[-1,3]$上是连续的，所以积分 $\int_{-1}^3 |2 - x|\mathrm{d}x$ 存在. 利用定积分对区间的可加性，得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 |2 - x|\mathrm{d}x &= \int_{-1}^2 (2 - x)\mathrm{d}x + \int_2^3 (x - 2)\mathrm{d}x \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5 \end{aligned}$$

***例 13** 计算 $\int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x}\mathrm{d}x$.

解 因为被积函数$\sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x}$在积分区间$[0,\pi]$上可表示为

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x} &= \sqrt{\sin^2 x(1 - \sin^2 x)} \\ &= \sqrt{\sin^2 x} \cdot \sqrt{\cos^2 x} \\ &= \sin x\,|\cos x| \end{aligned}$$

其中

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\right) \end{cases}$$

故 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\,|\cos x|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x(-\cos x)\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

例 14 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & (0\leqslant x<1)\\ 2x-1 & (1\leqslant x\leqslant 2)\end{cases}$,求 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 被积函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上仅有一个跳跃间断点 $x=1$,所以是可积的.利用定积分对区间的可加性,有

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-1)\,\mathrm{d}x=e^x\Big|_0^1+\left[x^2-x\right]_1^2=e+1$$

习题 5－3

基本练习题

10. 填空题:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-1}^{x}\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t=$ ________________;

(2) 设 $\Phi(x)=\int_x^0\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$,则 $\Phi'(x)=$ ________________;

(3) 设 $y=\int_0^{x^2}e^t\,\mathrm{d}t$,则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________________.

11. 单项选择题:

(1) 设 $f(x)=\int_0^x\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$,则 $f'\left(\dfrac{\pi^2}{4}\right)=$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 设 $F(x)=\int_x^0 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$,则 $F'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$ ( )

A. $\dfrac{\pi}{8}$　　B. $-\dfrac{\pi}{8}$　　C. $\dfrac{8}{\pi}$　　D. $-\dfrac{8}{\pi}$

(3) 设 $f(x)$ 连续,且满足关系式 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=a^{2x}\ (a>0)$,则 $f(x)=$ ( )

A. $2a^{2x}$　　B. $a^{2x}\ln a$　　C. $2xa^{2x-1}$　　D. $2a^{2x}\ln a$

(4) 设 $f(x)$ 连续,且满足关系式 $\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=x^2$,则 $f(3)=$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

12. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\cos t^3\mathrm{d}t}{\sin x^2} =$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (\mathrm{e}^t - 1)\mathrm{d}t}{\int_x^0 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t} =$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{x^2}^0 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t}{1-\cos x} =$

13. 求函数 $F(x) = \int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 的极值.

解

14. 计算下列定积分：

(1) $\int_1^3 (3x^2 - x + 1)\mathrm{d}x =$