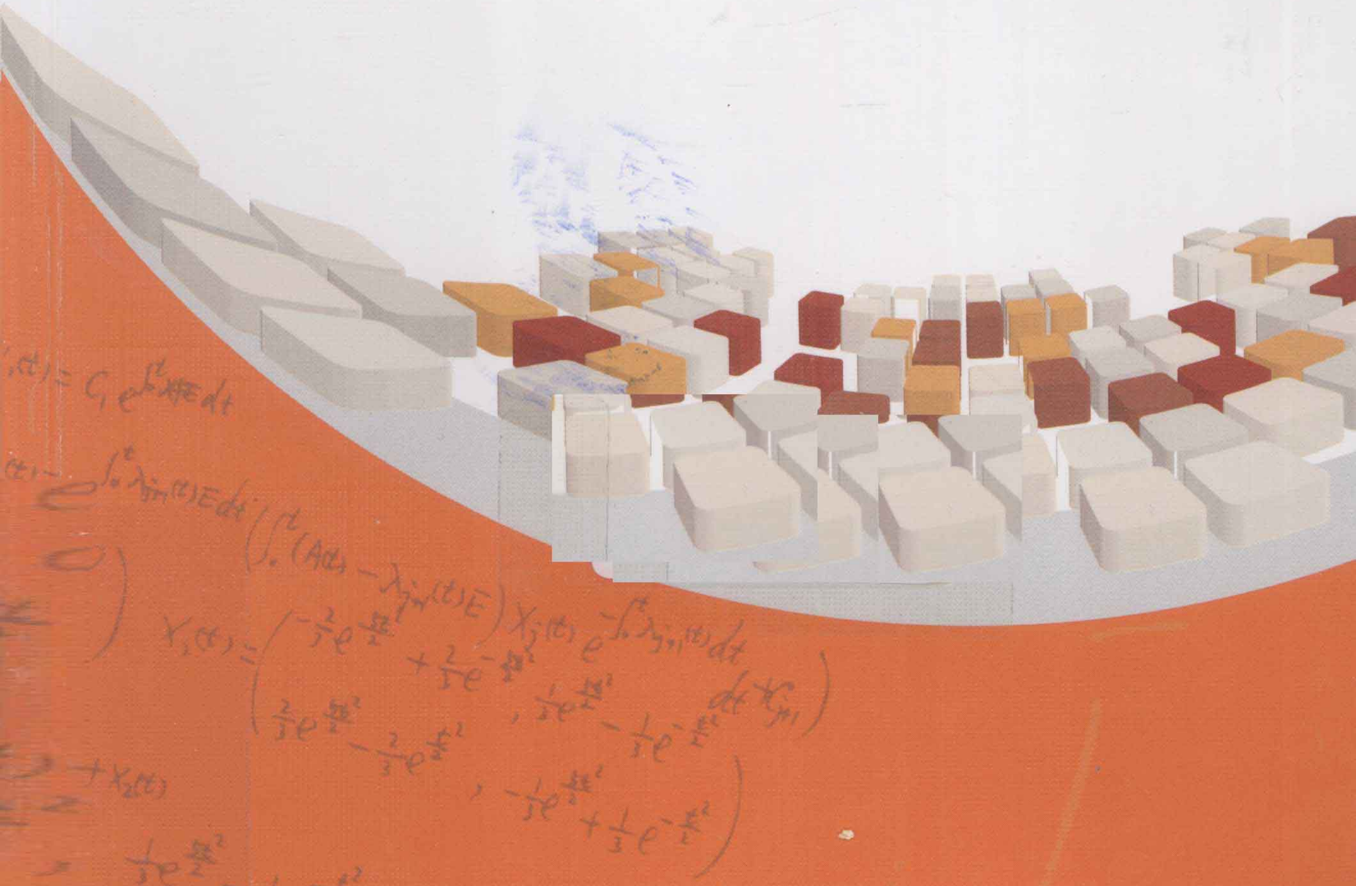
二十一世纪普通高等院校规划教材

Weifen fangcheng xuexi sheji yu jianmo yingyong daoyin

微分方程学习、设计与建模应用导引

化存才　黄　炯　丁海华　编著



西南交通大學出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

教育部国家一类特色专业“数学与应用数学”建设点项目资助

21 世纪普通高等院校规划教材

微分方程学习、设计与建模应用导引

化存才　黄炯　丁海华　编著

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

微分方程学习、设计与建模应用导引 / 化存才，黄炯，丁海华编著. —成都：西南交通大学出版社，2011.3

21世纪普通高等院校规划教材

ISBN 978-7-5643-1081-3

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①化…②黄…③丁… Ⅲ. ①微分方程－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 016953 号

21 世纪普通高等院校规划教材

微分方程学习、设计与建模应用导引

化存才　黄炯　丁海华　编著

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //press.swjtu.edu.cn
印　　刷	成都蜀通印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　　张	13.375
字　　数	334 千字
版　　次	2011 年 3 月第 1 版
印　　次	2011 年 3 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-1081-3
定　　价	26.00 元

图书如有印装质量问题　本社负责退换

前　言

在我国高校多年扩招以及推行综合素质教育的大背景下，大学里课程的学时在不断减少，大学生独立学习与思考的时间也变得相当有限，这使得他们常常处于被动学习的地位，进而不同程度地影响到课程学习的质量，并由此波及高等教育质量的提升．这种状况令人十分担忧．为了使大学生拥有自主学习的一片天地，且有机会欣赏所学课程的部分“教学研园地”之花，我们编写了这本与教材和课程教育教学活动相适应的且有特色的学习与设计指导书．

“常微分方程”是师范类院校数学专业的主干基础课程之一．多年来，在师范类院校从事该课程教学的一线教师的教学实践中我们发现，学生们普遍反映这门课程的基础知识内容较多，学习后仍然似懂非懂，而在将理论知识运用于解题时常常感到很吃力，甚至无从下手．的确，在目前出版的各种常微分方程教材及其学习指导书中，一定程度上存在不能很好地面对和解决师范类院校的学生所面临的相关实际问题．其实理工科院校的大学生也会遇到类似的情况．

“偏微分方程”是师范类院校数学与物理专业的必修或者选修课程之一，“数学物理方程”还是理工科院校相关专业的必修或者选修课程之一．在这类课程中，虽然有与物理和力学学科实际问题相联系的一面，但是由于它的数学理论性与综合性都较强，涉及数学分析、常微分方程等课程的相关理论基础，因此普遍被认为它是一门难教和难学的课程．在学期末的综合测试中，成绩及格率较低，低分或者零分现象时有发生．

近年来，高校大学生的实践应用、设计与创新能力的培养作为研究型学习的标志已明确地提到了教育部教学质量工程的显著位置，成为引导教学质量提升的主流方向之一．另外，数学建模思想的融入将有效地提高学生的实践应用与创新能力，并在教学中有所体现．

本书就是为了解决以上实际问题而撰写的．我们将以课程学习、实践应用、设计与创新能力的培养并重为原则，把“常微分方程”和“偏微分方程”两门课程的内容要点集成，将“学习”“设计”与“建模应用”的三重指导功能融为一体，突出对课程基础要求、解题应用示范、实践设计、建模应用与论文写作的指导作用．

本书以集成的方式，简明而综合地介绍了常微分方程和偏微分方程的学习、设计与建模应用指导的内容．全书共分为三篇，第一篇是“常微分方程”学习指导，内容包含常微分方程的基本概念、一阶微分方程的初等积分法、一阶方程解的存在唯一性定理、高阶微分方程、线性微分方程组、非线性微分方程的基础．第二篇是“常微分方程”设计与建模应用指导，内容包含常微分方程的 MATLAB 程序设计与

建模实验、常微分方程建模应用科技论文写作与范例. 第三篇是“偏微分方程”学习指导，内容包含波动方程、热传导方程、调和方程、二阶线性偏微分方程的分类与总结. 在附录中还介绍了编著者多年来在教学一线工作中所形成的部分教学与课件设计案例、综合测试与指导学生完成的论文.

本书的撰写得到了云南师范大学“微分方程”精品课程教学团队项目和教学团队成员的支持. 全书内容的编写分工如下：第 1～3，6，7 章和附录 A、B 由黄炯讲师编写，第 4，5 章由丁海华讲师编写，前言、第 8～12 章和附录 C 均由化存才教授编写；全书的统稿工作由黄炯和化存才共同完成. 书中大部分内容在云南师范大学微分方程课程教学中已使用多年.

本书可作为师范及理工科院校的数学、物理、计算机等相关专业的本科生、研究生及教师的基础性学习课程，还可作为这些学生研究性学习的参考书.

本书的出版得到了云南师范大学数学学院院长郭震教授的大力支持，得到了教育部国家一类特色专业“数学与应用数学”建设点项目的资助，在此表示感谢. 对于书中的不足之处，恳请读者提出宝贵的意见.

作　者

2010 年 7 月

目　　录

第1篇 “常微分方程” 学习导引

导 言

常微分方程是现代数学的一个重要分支. 在历史上，微积分学的产生和发展与人们求解微分方程的关系非常密切，也就是说，实际问题一旦转化为微分方程模型就可归结为对微分方程的研究. 微分方程在包括自然科学和社会科学在内的几乎所有科学领域都有非常广泛的应用. 在数学学科内部的许多分支中，微分方程也是常用且重要的工具之一. 本篇的目的在于帮助学生掌握好常微分方程的基本概念、理论和基本方法. 第 1 章介绍常微分方程的基本概念，第 2 章介绍常微分方程的初等积分法，第 3 章介绍一阶方程解的存在及唯一性定理，第 4 章介绍高阶微分方程，第 5 章介绍线性微分方程组，第 6 章介绍非线性常微分方程的定性和稳定性理论基础知识.

常微分方程的基本内容可概括为：

一个基本概念：微分方程的“解”，即中心.

三类微分方程：一阶可积型、高阶可降阶型、高阶线性方程和方程组.

几个方面的简单应用：主要是在自然科学和社会科学等方面的几个应用.

微分方程的中心问题是“解方程”. 解方程的基本方法是：用变量置换将微分方程化成可积类型. 用观察待定（常数或函数）的方法是将问题化成代数方程或其他较简单的微分方程. 与求不定积分方法比较，解微分方程的做法是先判别方程类型，再选择其具体的解法. 突出类型的识别是“解微分方程”的特点.

通过微分方程的学习，要培养学生以下三个方面的能力：

（1）建立微分方程模型：旨在培养学生从几何、物理、力学或工程技术中较简单的实际问题出发提出初步微分方程模型的能力.

（2）解微分方程：这也是学习微分方程的主要任务，旨在培养学生的解题能力.

（3）对解进行研究：通过对解的研究可以培养学生对实际问题进行分析和运用的能力.

总的来说，建立微分方程模型是始，它能树立学生对一些微分方程中基本概念的理解；解微分方程是中心，它能训练学生解微分方程的基本方法；研究微分方程解的性质是末，它能培养学生分析问题及解决问题的能力，进而引出一些基本的理论. 在本篇的学习导引中将重点放在中间一步，兼顾始末.

第 1 章　常微分方程的基本概念

本章主要讲解常微分方程中最基本的一些概念，例如，什么是常微分方程，什么是它的解，以及存在多少个解，什么是线性微分方程等，进而为求解微分方程及进行理论分析做好准备.

1.1　内容要点

名　称	定　义	说　明
常微分方程	含有自变量 x，未知函数 y 及其各阶导数的方程．如：$y''+2y'-5\sin x=0$	若方程中不含导数，则方程变成隐函数方程
微分方程的阶	微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数．如一阶方程： $y'=f(x,y)$　（1.1）	最高阶导数已解出的形式是标准型微分方程．如：$y^{(3)}=f(x,y,y',y'')$
n 阶微分方程	$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$　（1.2）	x，y，y'，$y^{(n-1)}$ 可以不出现在方程之中
n 阶线性微分方程	$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$　（1.3）	左端为 y，y'，$y^{(n-1)},y^{(n)}$ 的一次有理整式
微分方程的解	设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数，如果在区间 I 上，有 $F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]\equiv 0$，则称 $y=\varphi(x)$ 是方程（1.2）在区间 I 上的解	$y=\varphi(x)$ 为显式解；若 $y=\varphi(x)$ 由 $\Phi(x,y)=0$ 决定，则 $\Phi(x,y)=0$ 为隐式解
通　解	n 阶方程的含有 n 个独立的任意常数的解　$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$	通解不一定包含所有的特解
特　解	微分方程的不包含任意常数的解	当通解中的 n 个常数取定 $C_1^*,\cdots,C_n^*$ 时成为特解
全部解	通解及不能包含在通解中的特解	
初值问题的解	满足微分方程和初值条件的特解	
积分曲线	解 $y=\varphi(x)$ 的图形	通解是一族积分曲线，特解（初值解）是过初值点的那条积分曲线
向量场	用方程（1.1）右端函数 $f(x,y)$ 在 Oxy 平面某区域 D 上定义过各点的小线段（线素）的斜率方向，这样的区域 D 称为向量场（线素场、方向场）	通过向量场可以判断微分方程解的走向

1.2 学习要求及重点、难点剖析

(1) 微分方程的概念一般是从属性的，是由微分、积分和代数方程组合而成的，它不像微积分中导数、定积分、无穷级数那样具有以前没有遇到的崭新概念，因此在学习概念时学生一般不会有太大的问题. 尽管如此，对微分方程中最基本的概念仍需要正确理解，如微分方程的解、通解、特解（初值解）等定义，要注意其区别和联系. 另外，微分方程的方向场及其解的几何意义也需要正确理解.

(2) 本章的关键在于理解"常微分方程的解"这个概念. 因为求微分方程时常涉及积分运算，而在通解中常包括一组常数，这说明方程有无穷多个解. 一般情况下，在附加一组初始条件后，微分方程可唯一确定一个特解，即初值问题的解. 建立微分方程及解方程时，仍然要重复基本概念，明确一个基本事实：一个微分方程的阶数，它的初始条件的个数，它的一般解（通解）中独立的任意常数的个数，这三个数应相等.

(3) 注意方程的阶数和次数的区别：方程中待定函数的最高阶导数的次数为方程的次数.

例如：$y=k\sqrt{1+(y')^2}$ 为一阶二次方程，而 $y''=k\sqrt{1+(y')^2}$ 为二阶一次方程. 虽然在这里，y' 项的次数比 y'' 项的次数高，但在微分方程中，阶数只按导数最高阶项决定，而与待定函数的较低阶导数项的次数无关. 另外，在数学中，有些方程的次数是无法定义的，如 $y''+(y')^2=\ln y''$. 但在力学中，这种方程是绝无仅有的，甚至是没有的.

(4) 注意"线性与非线性"的区别：如果微分方程中所含未知函数及其各阶导数都独立地以一次有理整式的形式出现，则这种方程称为线性方程；否则称为非线性方程. 一般 n 阶线性方程的形式为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \tag{1.4}$$

其中 $a_1(x),\cdots,a_n(x), f(x)$ 为 x 的已知函数.

例如：$y''+xy'=0$ 为二阶线性方程，而 $y''+yy'=0$ 为二阶非线性方程.

线性方程与非线性方程是微分方程的基本类型，两者有很大差别. 线性方程是主要研究对象，从它的解的结构到解法均有很强的规律性，尤其是线性方程的通解，就是其所有解.

(5) 在解方程时，即使找到了某一微分方程的满足某一定解条件的解，它仍然可能还有另外不同的函数，即满足微分方程也满足定解条件. 这里主要包括两方面：有些方程除了从它的通解的积分常量取特殊值时得到的所有特解以外，还有一些不是通解所能代表的解. 换句话说，通解好像并不够"通". 如：方程 $y=xy'+(y')^2$ 的通解为 $y=Cx+C^2$（C 为任意常数，下同），但 $y^*=-\dfrac{1}{4}x^2$ 也是方程的一个解. 很显然，无论怎样选择 C，也无法使上面的通解化为 $-\dfrac{1}{4}x^2$，所以 y^* 是不包括在通解内的一个特解. 又如：$y'=y^{\frac{2}{3}}$ 的通解为 $y=\dfrac{1}{27}(x-C)^3$. 但 $y=0$ 也是它的解，这个解同样也不包括在通解中. 把这些不包括在通解内的解称为**奇解**. 在学习中要注意找出方程的所有这些解.

1.3　典型例题分析

1.3.1　验证某函数满足微分方程

通过对某函数进行求导运算，求出相应的各阶导数，然后代入方程证明适合方程，并检验相应的初始条件是否满足.

例 1.1　验证由 $e^{2y}=xy$ 决定的函数 $y=y(x)$ 满足微分方程：

$$x(2y-1)y''=2y'(1-y-xy'). \tag{1.5}$$

证明　按题意，有

$$2y=\ln x+\ln y,$$

两边求导得

$$2y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}y' \quad 或者 \quad 2xyy'=y+xy'.$$

两边再求导得

$$2(yy'+xy'^2+xyy'')=y'+y'+xy''.$$

移项得

$$2xyy''-xy''=2y'-2yy'-2xy'^2.$$

于是

$$x(2y-1)y''=2y'(1-y-xy'),$$

即

$$e^{2y}=xy$$

是原方程的解.

例 1.2　验证：函数组 $\begin{cases}x=te^t\\ y=e^{-t}\end{cases}$ 是微分方程：

$$(1+xy)y'+y^2=0 \tag{1.6}$$

的解.

证明　由 $\begin{cases}x=te^t\\ y=e^{-t}\end{cases}$ 可知

$$\frac{dx}{dt}=(t+1)e^t, \quad \frac{dy}{dt}=-e^{-t},$$

则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{-2t}}{t+1},$$

得

$$(1+xy)y'+y^2=(1+te^t\cdot e^{-t})\cdot\left(\frac{-e^{-2t}}{t+1}\right)+e^{-2t}=0.$$

故原命题成立.

例 1.3 判别函数:

$$y_1(x)=C_1e^{-x^2}+1,\quad y_2(x)=C_2,\quad y_3(x)=y_1(x)+y_2(x)$$

(其中 C_1, C_2 为任意常数)是否是方程:

$$y'=2x(1-y) \tag{1.7}$$

和

$$xy''-(1-2x^2)y'=0 \tag{1.8}$$

的解?若是解的话,指出其是特解还是通解?

解 (1)将 $y_1(x)$ 代入方程(1.7)得左边≡右边,可见 $y_1(x)$ 是其解. 又 $y_1(x)$ 中含有一个任意常数,因而是通解. 再者这是一阶线性方程,所以 $y_1(x)$ 也是其所有解.

将 $y_2(x)$ 代入方程(1.7),欲让 $0\equiv 2x(1-C_2)$,只有 $C_2=1$ 才行. 可见在 $y_2(x)=C_2$ 中,除 $C_2=1$ 之外,均不是方程(1.7)之解. 其实,从其通解可以知道,当 $C_1=0$ 时, $y_1(x)=1$. 由此可知,也只有 $C_2=1$, $y_2(x)$ 才是解,这是因为 $y_1(x)=C_1e^{-x^2}+1$ 是方程(1.7)的所有解.

(2)将 $y_1(x)=C_1e^{-x^2}+1$ 和 $y_2(x)=C_2$ 代入方程(1.8),都能使其成为恒等式,可见它们都是该方程之解. 但由于均只有一个任意常数,因而不是通解. 然而 $y_3(x)$ 不仅是方程(1.8)之解,而且还是该方程的通解,因为它含有两个独立的任意常数.

(3)解 $y_1(x)$ 是含单参数 C_1 的函数族,如果用求导方法消去参数 C_1,则得到以此为通解的一阶微分方程,即由

$$\begin{cases} y=C_1e^{-x^2}+1, \\ y'=-2C_1xe^{-x^2} \end{cases}$$

消去 C_1,即得方程(1.7).

同样,利用 $y_3(x)$,用求导方法消去两个参数 C_1 和 C_2,即由

$$y=C_1e^{-x^2}+1+C_2,$$

则

$$y'=-2xC_1e^{-x^2},\quad y''=-2C_1e^{-x^2}+4x^2C_1e^{-x^2},$$

得

$$\frac{y''}{y'}=\frac{-1+2x^2}{-x},$$

即

$$xy''=(1-2x^2)y'.$$

此即方程(1.8).

1.3.2 建立已知函数族（曲线族）满足的微分方程

通过对已知曲线族求导，并设法消去曲线族中的任意常数，注意到曲线族中如果有 s 个任意常数，则所建立的微分方程的阶数正好为 s.

例 1.4 求平面上全体圆族：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1.9}$$

所满足的微分方程.

解 将方程（1.9）的两边对 x 求导

$$2(x-a)+2(y-b)y'=0,$$

再求导得

$$2+2y'^2+2(y-b)y''=0,$$

变形为

$$y-b=-\frac{1}{y''}(1+y'^2),$$

两边再求导得

$$y'=\frac{-1}{y''^2}[2y'y''^2-(1+y'^2)y'''],$$

整理得

$$(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0.$$

这正是全体圆族满足的微分方程.

例 1.5 求下列曲线族所满足的微分方程：

（1） $y=\sin(x+C)$；　　（2） $y^2=C_1x+C_2$.

解 （1）由已知得

$$y'=\cos(x+C),$$

因为 $\sin^2(x+C)+\cos^2(x+C)=1$，所以所求的微分方程为

$$y^2+(y')^2=1.$$

（2）同上法得

$$2yy''+(2y')^2=0.$$

1.3.3 化积分方程为微分方程的初值问题

利用变上（下）限积分的求导公式逐次消去积分符号，并逐步根据积分相应的值定出微分方程的初始条件.

例 1.6 将积分方程：

$$\int_0^x x(f(t)-3)\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)}\cos t\mathrm{d}t=f(x) \tag{1.10}$$

（已知 $f'(0)=1$）化为微分方程的初值问题.

解 由积分方程（1.10）得

$$x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-3x^2+\int_0^{f(x)}\cos t\mathrm{d}t=f(x). \tag{1.11}$$

当 $x=0$ 时，有

$$\sin f(0)=f(0),$$

即 $f(0)=0$.

将方程（1.11）两边求导，得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-6x+\cos(f(x))f'(x)=f'(x).$$

再求导得

$$f(x)+xf'(x)+f(x)-6+\cos(f(x))f''(x)-\sin(f(x))f'^2(x)=f''(x).$$

记 $y=f(x)$，即得

$$(1-\cos y)y''=\sin y\cdot y'^2+2y+xy'-6.$$

初始条件为

$$y\big|_{x=0}=0,\qquad y'\big|_{x=0}=1.$$

例 1.7 求不定积分 $\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$ 的值.

解 问题等价于解方程：

$$y'=x\mathrm{e}^x\sin x,$$

那么，什么函数的导数会是 $x\mathrm{e}^x\sin x$ 呢？显然只可能是形如

$$y=(ax+b)\mathrm{e}^x\sin x+(cx+d)\mathrm{e}^x\cos x$$

的函数（其中 a,b,c,d 为待定常数），将上式代入方程，要使下式

$$\begin{aligned}y'=&(ax+b)\mathrm{e}^x\sin x+(ax+b)\mathrm{e}^x\cos x+a\mathrm{e}^x\sin x-\\&(cx+d)\mathrm{e}^x\sin x+(cx+d)\mathrm{e}^x\cos x+c\mathrm{e}^x\cos x\\\equiv&\, x\mathrm{e}^x\sin x\end{aligned}$$

成立，比较两边的系数，得到关于系数 a,b,c 和 d 的方程

$$\begin{cases} a-c=1, \\ b-d+a=0, \\ a+c=0, \\ b+d+c=0, \end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{1}{2}$, $c=-\dfrac{1}{2}$, $b=0$, $d=\dfrac{1}{2}$. 由此得

$$y(x)=\frac{x}{2}\mathrm{e}^x\sin x-\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x\cos x+C .$$

注：这种“观察待定系数”的方法是微分方程求解的一种重要途径，这里所设的带有待定常数的函数，通常称为“形式解”，言下之意，可能具有这种形式的解. 至于是否真的有解，就要看代入方程后，所得到的代数方程是否有解：若待定系数确能求出，则这种形式的解也就找到了，否则就没有这种形式解.

第 2 章　一阶微分方程的初等积分法

本章主要讲解一阶常微分方程中几种主要可积类型的解法，例如，变量可分离方程、线性方程、全微分方程等. 其解法比较典型，是一阶可积方程求解中最主要的方法.

2.1　内容要点

<table>
<tr><th>名　称</th><th>表达式</th><th>解　法</th></tr>
<tr><td>可分离变量方程</td><td>$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x)\psi(y)$</td><td>$\int\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\int\varphi(x)\mathrm{d}x$
及一些可能的特解</td></tr>
<tr><td rowspan="4">可化为变量可分离方程的一些方程类型</td><td>$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)$</td><td>若 $b=0$ 为可分离变量方程；若 $b\neq0$，令 $u=ax+by+c$，则原方程化为可分离变量方程
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=bf(u)+a$</td></tr>
<tr><td>$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$
（齐次方程）</td><td>令 $u=\frac{y}{x}$，将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 代入，得
$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u$
再按可分离变量方程求解，最后依变量 $u=\frac{y}{x}$ 还原即可</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$</td><td>当 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq0$ 时，可作变换
$u=x-x_0$，$v=y-y_0$，其中 x_0，y_0 满足
$a_ix+b_iy+c_i=0\ (i=1,2)$</td></tr>
<tr><td>当 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$，即 $a_1b_2-a_2b_1=0$，也即 $a_2x+b_2y=\lambda(a_1x+b_1y)$，可作变换 $u=a_1x+b_1y$，将其化为可分离变量方程</td></tr>
<tr><td rowspan="2">一阶线性方程</td><td rowspan="2">$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$</td><td>齐次线性方程 $(Q(x)=0)$ 的通解为
$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$</td></tr>
<tr><td>非齐次线性方程 $(Q(x)\neq0)$ 的通解为
$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$</td></tr>
</table>

续　表

名　称	表达式	解　法
可化为一阶线性方程的一些方程类型	伯努利方程（Bernoulli） $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^k \ (k\neq 0,1)$	两边除以 y^k，作变换 $z=y^{1-k}$，则原方程变为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$ 按一阶线性方程求解，最后把未知函数 $z=y^{1-k}$ 还原即可
	视 x 为未知函数的线性方程 $(P(y)x+Q(y))\mathrm{d}y+\mathrm{d}x=0$	变为方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+P(y)x+Q(y)=0$ 求解
全微分方程（恰当方程）	$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 若它的左边恰好是某一个函数 $u=U(x,y)$ 的全微分，即 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$	$u(x,\ y)=\int_{x_0}^{x}P(\xi,y)\mathrm{d}\xi+\int_{y_0}^{y}Q(x,\eta)\mathrm{d}\eta=C$ 其中 (x_0,y_0) 为适当选定的一点
		当条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 不满足时，若有一个适当的函数 $\mu=\mu(x,y)$ 使 $\mu P\mathrm{d}x+\mu Q\mathrm{d}y=0$ 成为全微分方程，则函数 $\mu(x,y)$ 称为原方程的积分因子

2.2　学习要求及重点、难点剖析

（1）掌握初等积分法的实质. 用数学方法经过有限次的代数运算和有限次的不定积分，将微分方程的解用初等函数或初等函数的积分形式来表达，这种方法习惯上称为初等积分法或求积法. 能用初等积分法求解的方程称为可积方程. 初等积分法的实质，就是尽可能设法把所遇到的积分方程的求解问题转化为积分（求原函数）问题. *需要注意的是，只有少数特殊类型的微分方程，才能用初等积分法求解，在多数情况下，初等积分法是不适用的. 如 Riccati 方程*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+g(x)y+r(x) \tag{2.1}$$

一般没有初等解法（这里 $p(x),g(x),r(x)$ 为已知连续函数）. 因此，对于微分方程中的几个常见类型，在什么情况下能用初等积分法求解是一个很重要而又有实际意义的问题.

（2）重点熟悉各种类型方程的解法，正确、敏捷地判断一个给定的方程属于何种类型，从而按照所介绍的方法进行求解，这是最基本的要求. 但是我们所遇到的方程未必恰好就是书中介绍的方程类型，因此还要求注意学习解题技巧、总结经验、培养思维的灵活性，并且要善于根据方程的特点，引进适当的变换将方程化为能求解的新类型. 一阶一次方程是常微分方程中最基本的类型，主要形式为