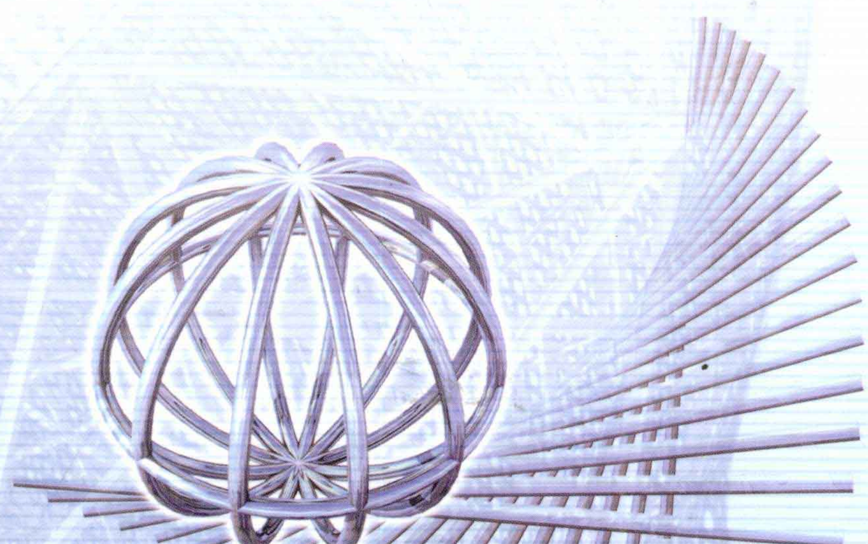
教育部职业教育与成人教育司推荐教材
五年制高等职业教育文化基础课程教学用书

技术数学

杜吉佩　李广全　主编

五年制高等职业教育



高等教育出版社

教育部职业教育与成人教育司推荐教材

五年制高等职业教育文化基础课程教学用书

技术数学

杜吉佩　李广全　主编

杨尚俊　夏国斌　主审

高等教育出版社

内容简介

本套教材是五年制高等职业教育教材，已被列为“教育部职业教育与成人教育司推荐教材”。全套教材分《初等数学》、《高等数学》和《技术数学》三册出版，本书为《技术数学》。

本书以“注重实际应用”为编写原则，在内容选取上以“必需、够用”为度，在语言表述上力求通俗易懂，着重培养学生的数学素养和综合能力。本书的主要内容有矩阵与线性方程组，拉普拉斯变换，复变函数初步，概率论与数理统计初步，数学建模初步。

本书可作为五年制高等职业教育教材，也可以作为高中起点的三年制高等职业教育教材，还可供其他社会读者选用。

图书在版编目(CIP)数据

技术数学/杜吉佩，李广全主编．—北京：高等教育出版社，2005.6

ISBN 7-04-017052-3

Ⅰ.技… Ⅱ.①杜…②李… Ⅲ.工程数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 049553 号

策划编辑 邵　勇　**责任编辑** 张冰峰　**封面设计** 李卫青　**责任绘图** 朱　静
版式设计 王艳红　**责任校对** 张　颖　**责任印制** 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2005年6月第1版
印　　张	16.25	印　　次	2005年6月第1次印刷
字　　数	390 000	定　　价	20.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　17052-00

前　言

技术数学的主要内容包括矩阵与线性方程组、拉普拉斯变换、复变函数初步、概率论与数理统计初步，以及数学建模初步。

本书内容供工科各专业选学。如电类专业可选学第十六章、第十七章、第十八章三章内容，约32学时；机械类专业可选学第十九章，约20学时；对数学建模感兴趣者或想参加大学生数学建模竞赛的读者可选学第二十章，约20学时。

本书内容的选取以“必需、够用”为度，以实用为原则，从宏观框架到微观处理都作了许多大胆的尝试。宏观上，从目录中可以一目了然；微观上，从正文的字里行间可以看出许多新的处理方法。

矩阵与线性方程组的应用较为广泛。对这部分内容的处理方法是：以矩阵为工具，来讨论线性方程组的消元法、解的个数及解的结构。以生产生活中的实例引入矩阵的概念，进而给出矩阵的运算方法及运算规律。定义矩阵的初等变换，并且用初等变换求逆矩阵，讨论方程组的解法等。因为行列式的计算比较繁杂，以它为工具解方程组所需条件太苛刻，所以将行列式列为选学内容。总之矩阵与线性方程组这部分内容是以矩阵的初等变换为主线展开讨论的，这样处理易教易学，便于应用。

拉普拉斯变换是一种积分变换，将微分运算与积分运算转化为代数运算。学习完这部分内容后，要求读者学会使用拉普拉斯变换表，能结合拉普拉斯变换的基本性质求出某些简单函数的拉普拉斯变换及逆变换，并学会用它来解微分方程。

复变函数在电类专业中有着广泛的应用。这一章我们以“够用”为原则介绍了复变函数的基本概念，解析函数的概念，以及辨别函数解析性的一般方法——柯西黎曼条件。

概率论与数理统计初步我们作了一些改革。首先给出基本统计量、平均数、众数、中位数及频率直方图等概念，为讨论事件的概率做准备。然后以大量的生产、生活中的实例，引入概率的统计定义和古典概率的定义，给出其性质并讨论加法公式和乘法公式。根据高等职业院校学生的特点和实际情况，对随机变量仅作简单的介绍，主要讨论应用最广泛的正态分布。在现代社会中，人们需要了解各种信息，这就需要对一些统计参数进行检验。我们选择正态总体，进行点估计和区间估计。对总体参数进行统计预测(线性回归)与决策(假设检验)，给出假设检验的步骤与方法，讲清其含义，并应用其解决实际问题。

学习数学的目的在于应用。本书的最后一章是数学建模初步，主要介绍数学模型与数学建模的基本知识，建立数学模型的基本技能与方法——函数关系法、几何模型法、量纲分析法、概率统计法等，这些方法比较典型，也是最基本的。读者掌握这些方法，对以后的学习和工作会大有益处。章末给出近三年来全国大学生数学建模竞赛大专组的试题，供读者练习与参考。

本书附有三个数学实验，旨在展示数学规律，讨论数学的基本方法。

参加本书编写工作的有渤海船舶职业学院杜吉佩、天津机电职业技术学院李广全、吉林教

育学院董强、山西省第二人民警察学校谢宽物、河北交通职业技术学院翟素娟。全书结构设计、统稿、定稿由杜吉佩和李广全完成。

安徽大学杨尚俊教授仔细审阅了本书的初稿，提出了许多有价值的修改建议，在此编者表示衷心的感谢！

本套教材在编写过程中，得到辽宁、天津、吉林、河北、河南、山西、陕西、宁夏等省、市、自治区的教育行政部门及编者所在院校领导的大力支持，得到了安徽机电职业技术学院夏国斌等有关专家和同行的帮助。高等教育出版社对本套教材的编写、出版给予了很大支持。高等教育出版社中职分社社长邹德林、首席策划张东英、高级策划邵勇、编辑薛春玲为本套教材的出版付出了大量的劳动。在此一并致谢！

限于编者的水平，不当之处，恳请读者提出宝贵意见。

杜吉佩

2005 年 1 月于渤海船舶职业学院

《初等数学》前言

本教材遵照教育部2000年2月颁布的五年制高等职业教育“应用数学基础”课程基本要求，根据高等职业技术特点和各专业实际需要精心编写而成。

全套教材分初等数学、高等数学、技术数学三个部分，并附有Mathematica软件操作简介。

第一册为初等数学，共分十章。主要内容包括集合、逻辑用语与不等式，函数，三角函数，数列，平面向量，复数，直线方程，二次曲线，立体几何，排列、组合与二项式定理。总授课时数约需160至180学时。

第二册为高等数学，共分五章。主要内容包括函数的极限与连续，微分学及其应用，积分学及其应用，级数，微分方程。总授课时数约需80至100学时。

第三册为技术数学，共分五章。主要内容包括矩阵与线性方程组，拉普拉斯变换，复变函数初步，概率论与数理统计初步，数学建模初步。供有关专业根据需要选学。

教材总的编写原则是注重实际应用。教材淡化数学理论推导，强化数学能力培养，突出数学模型的建立及数学工具的正确使用。

教材内容的选取以“必需、够用”为度，尽量做到有所创新。具体编排是按照由浅入深，由易到难，由具体到抽象，循序渐进的原则进行，并努力做到概念清楚，条理清晰，语言精练，便于理解和掌握。

教材在编写体例上，适应学生的年龄特征和心理特点；在知识处理上，符合学生各学段的认知规律，着重使用先进的教学手段传授近代数学思想，培养学生的数学素养和综合能力；在语言表述上，力求通俗易懂，增强趣味性和可读性。

本套教材的主要特色如下：

1. 适用对象的宽泛性 教材适用面比较宽，第一册符合中等职业学校的教学大纲的最低要求，可作为中等职业学校的教材；第二册和第三册可作为高中起点的高等职业学校的教材。

2. 数学知识的整合性 注意与初中学段的数学内容的衔接。结合五年制高等职业教育的特点，对教学内容作如下的整合：

(1) 以向量为工具处理几何、复数等内容，并将“立体几何”和大学阶段的“向量代数”与“空间解析几何”进行整合；

(2) 将高中学段的“统计初步”与技术数学中“概率论与数理统计初步”内容整合为一体，这样避免了高中(中职)学段这部分内容与大学阶段这一内容的重复；

(3) 将高中(中职)阶段的“数列极限”与高等数学中的“函数极限”进行整合；

(4) 将一元函数与多元函数、一元函数微分学与多元函数微分学、一元函数积分与二重积分整合为微分学、积分学，使得内容连贯，思路连续，一气呵成，且节省教学时数。

3. 教材内容的更新性 根据信息时代的要求，适度更新了教学内容。由于计算机等技术的高速发展，离散数学的重要作用越来越被人们所认识，因此，我们将离散数学的知识渗透在

教材中。例如，用映射的观点定义函数，理解函数的概念。

4. 知识运用的灵活性 用向量作工具处理几何内容，使代数与几何、数与图形更紧密地结合。处理具体问题时，则注意灵活运用。当使用综合法比较简单时，则用综合法，不用向量法；当用综合法较繁，而用向量法较简单时，则用向量法。这样处理，既培养了学生的空间想像能力和逻辑思维能力，又可以使学生学会用较简捷的方法解决问题。

5. 教材设计的参与性 教材的正文中灵活安排了想一想、做一做、议一议、小知识等相关内容，以利于学生主动参与教学的全过程，激发学习兴趣，培养举一反三的能力及创新精神。

6. 数学知识的应用性 教材中对欲讨论的问题大多以生产、生活中的实例引入，展示数学应用的广泛性，使读者初步了解建立数学模型的方法，并将数学建模单列一章加以讨论，以培养学生的综合数学素质和应用能力。

7. 习题设计的系统性和科学性 本教材对习题的设计，体现了系统性与科学性。

(1) 本套教材安排了十个数学实验。初等数学部分安排两个实验，主要以 CASIO*fx* - 82*MS* 计算器为主；高等数学和技术数学两部分共安排八个数学实验，以软件包 Mathematica4.0 为蓝本。通过系统的数学实验课的学习，使学生基本具备利用现代工具进行数学计算的能力。

(2) 本套教材每节后面都配有足够数量、为不同层次读者准备的习题。这些习题可以帮助读者检测本节的学习效果。有些题可以训练解题技巧，开拓思路；有些题则是正文内容的补充。读者演练这些习题定会有所收益。

(3) 教材每节后的第一题，均设计为简答题。通过简答题，给出读者在本节中必须掌握的内容。其目的是帮助读者理解基本概念，复习、巩固本节内容。

(4) 本套教材每章的最后一节是本章学习指导。它包括四个方面：一是以知识框图的形式，给出一章的知识要点、各节内容之间的相互联系；二是对重点和难点进行解析，疑难问题给予解惑；三是对典型例题进行详细解剖，其主要目的是帮助读者掌握本章的知识体系，掌握分析问题和解决问题的思想方法；四是安排一组检测题，这些检测题包含了本章 80% 以上的知识点，供读者检测学习效果。

参加本套教材编写工作的有西安理工大学高等技术学院王稳权、宁夏吴忠市职业技术学院叶宁、渤海船舶职业学院杜吉佩、天津机电职业技术学院李广全、河南农业大学农业职业学院李茂强、天津工业职业技术学院李敛霞、陕西省教育科学研究所职成研究室郭为、吉林教育学院董强、山西省第二人民警察学校谢宽物、河北交通职业技术学院翟素娟。全书结构设计、统稿、定稿由杜吉佩和李广全完成。

安徽大学杨尚俊教授仔细审阅了本套教材的初稿，提出许多有价值的修改建议，在此编者表示衷心的感谢！

本套教材的编写过程中，得到辽宁、天津、吉林、河北、河南、山西、陕西、宁夏等省、市、自治区的教育行政部门及编者所在院校领导的大力支持，得到了有关专家和同行的帮助。高等教育出版社对本套教材的编写、出版给予了很大支持。高等教育出版社中职分社社长邹德林、首席策划张东英、高级策划邵勇为本套教材的出版付出了大量的劳动。在此一并致谢！

限于编者的水平，不当之处，恳请读者提出宝贵意见。

杜吉佩

2004 年 3 月于渤海船舶职业学院

目　录

第十六章　矩阵与线性方程组

先来看一个实际问题：

已知某机器制造厂在某阶段的总成本 y 是其产量 x 的二次函数：

$$y = a + bx + cx^2.$$

根据统计资料，该厂产量 x 与总成本 y 之间有如表 16－1 所示的数据.

表 16－1

时期	第 1 期	第 2 期	第 3 期
产量 x /千台	6	10	20
总成本 y /万元	104	160	370

试求总成本函数中的系数 a，b，c.

欲较好地解决此问题，就需要本章所介绍的矩阵与线性方程组的知识. 矩阵与线性方程组的理论是线性代数的主要内容，也是许多数学分支不可缺少的基础知识，它在自然科学、工程技术和社会科学中都有着广泛的应用.

§16－1　矩阵的概念与运算

一、矩阵的概念

矩阵是从许多实际问题的计算中抽象出来的一个重要的数学概念，在给出矩阵定义之前，先看几个例子.

矩阵 matrix

例 1　某工厂生产 A，B 两种产品，一、二、三月份的产量(单位：件)统计表如表 16－2 所示.

为了研究方便，在数学中常把统计表的栏目去掉，将表中数据按原来位置和次序排成一个矩形的表，并且把两边用括号括起来，例如，由例 1 得

表 16 - 2

产品 / 产量 / 月份	A	B
一	400	360
二	430	390
三	420	390

$$\begin{pmatrix} 400 & 360 \\ 430 & 390 \\ 420 & 390 \end{pmatrix}.$$

这种矩形数表在实际问题中应用非常广泛，如商店中商品的价目表，工厂中产品原材料的消耗表，物资调运方案等.

例 2 假设要将某种物资从 A_1，A_2，A_3 三个产地调往 B_1，B_2，B_3，B_4 四个销售地，调运方案如表 16 - 3 所示.

表 16 - 3

销售地 / 调运量/t / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	4	3	0
A_2	0	3	2	8
A_3	6	0	4	5

这个调运方案也可以用一个矩形数表简明地表示出来：

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 6 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

线性方程组 linear equation

例 3 含有 n 个未知数，m 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

如果把它的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$和常数项 $b_i\ (i=1,2,\cdots,m)$按原来的位置和顺序写出，就可以得到一个矩形数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{2}$$

因为在一个方程组中未知数用什么符号来表示并不影响方程组的实质。换句话说，方程组(1)完全由它的系数和常数项所决定，具体来说，方程组(1)完全可以由矩形数表(2)惟一确定．因此，为讨论方便，常把矩形数表(2)作为方程组(1)的代表来进行研究．

上面三个不同领域的例子都归结到矩形数表的事实说明，有必要对这种矩形数表进行统一的研究．为此，先给出如下定义．

定义 1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的矩形表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

叫做 **m 行 n 列矩阵**，简称为 **$m\times n$ 矩阵**．

矩阵通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…或(a_{ij})，(b_{ij})，(c_{ij})，…表示．为了标明矩阵的行数 m 和列数 n，可记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$或$(a_{ij})_{m\times n}$．

例如，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

是一个 2×4 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}_{2\times 4}$．

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 $m\times n$ 个数 a_{ij}叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**．a_{i1}，a_{i2}，…，a_{in}叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**第 i 行**$(i=1,2,\cdots,m)$；a_{1j}，a_{2j}，…，a_{mj}叫做矩阵的**第 j 列**$(j=1,2,\cdots,n)$．位于第 i 行第 j 列交叉处的元素 a_{ij}叫做矩阵的**第 i 行第 j 列元素**．i 和 j 分别叫做元素 a_{ij}的**行下标**和**列下标**．

二、几种特殊矩阵

特殊形式矩阵在矩阵的理论和应用中起着重要的作用，研究矩阵问题常常从研究特殊矩阵开始。下面将介绍最重要的一些特殊矩阵．

1. 行矩阵

只有一行的矩阵，叫做**行矩阵**，此时 $m=1$：　　　　行矩阵　row matrix

$$\boldsymbol{A}_{1\times n}=(a_{11}\quad a_{12}\quad \cdots\quad a_{1n}).$$

2. 列矩阵

只有一列的矩阵，叫做**列矩阵**，此时 $n=1$：　　　　列矩阵　column matrix

$$A_{m\times 1}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}.$$

3. 零矩阵

零矩阵 zero matrix

所有元素均为零的矩阵，叫做**零矩阵**，记作 $\mathbf{0}_{m\times n}$或 $\mathbf{0}$. 例如，

$$\mathbf{0}_{2\times 4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

4. 方阵

行数和列数相等的矩阵，叫做**方阵**. n 行 n 列的方阵，叫做 **n 阶方阵**，数 n 叫做矩阵的**阶**.

n 阶方阵中从左上角到右下角的对角线叫做**主对角线**，另一条对角线叫做**次对角线**. 在 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\quad（记作\ A_n=(a_{ij})_n\ ）$$

中，主对角线上的元素 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn}称为 **A 的对角元**.

n 阶方阵还有以下几种特殊形式：

（1）对称矩阵

对称矩阵 symmetrical matrix

关于主对角线对称的元素对应相等（即 $a_{ij}=a_{ji},i,j=1,2,\cdots,n$）的方阵叫做**对称矩阵**. 例如，

$$A=\begin{pmatrix}3&-6&-9\\-6&2&5\\-9&5&1\end{pmatrix}$$

是一个 3 阶对称矩阵.

（2）对角矩阵

对角矩阵 diagonal matrix

除主对角线上的元素（对角元）外，其余元素均为零的方阵，叫做**对角矩阵**，记作 Λ. n 阶对角矩阵的形式为

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix},$$

!

0 阶方阵也是对角矩阵.

其中 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 不全为零.

（3）单位矩阵

单位矩阵 identity matrix

主对角线上的元素都为 1 的对角矩阵，叫做**单位矩阵**，记作 I 或 I_n（也可用 E 或 E_n 表示），即

$$I=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

(4) 三角矩阵

主对角线一侧所有元素都为零的方阵，叫做**三角矩阵**．分为**上三角矩阵**与**下三角矩阵**：

上三角矩阵 upper triangular matrix

下三角矩阵 lower triangular matrix

$$L_{上}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad L_{下}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

上(下)三角矩阵的主对角线下(上)方的元素一定是零，而其他元素可以是零也可以不是零．例如，

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&3&-5\\0&0&1\end{pmatrix}\quad 和\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\3&1&0&0\\0&5&0&0\\6&0&7&4\end{pmatrix}$$

分别是 3 阶上三角矩阵和 4 阶下三角矩阵．

三、矩阵的运算

矩阵之所以有用，不仅在于把一些数排成矩形表，更在于可以对矩阵施行一些具有实际应用背景的运算．学好矩阵的各种运算是学好本章的基础．

1. 矩阵的转置

定义 2　把矩阵 A 所有的行依次换成同序数的列后所得到的矩阵，叫做矩阵 A 的**转置矩阵**，记作 A' 或 A^{T}，即若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $A'=(a_{ji})_{n\times m}$．例如，矩阵

转置矩阵 transposed matrix

$$A=\begin{pmatrix}1&4\\-2&0\\3&7\end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A'=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&0&7\end{pmatrix}.$$

一个方阵为对称矩阵当且仅当它的转置矩阵等于它自己；任何矩阵 A 的转置矩阵 A' 的转置矩阵是矩阵 A 本身，即

$$(A')'=A.$$

对于对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，皆有

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{\Lambda}'=\boldsymbol{\Lambda},\ \boldsymbol{I}'=\boldsymbol{I}.$$

另外，列矩阵的转置矩阵为行矩阵，行矩阵的转置矩阵为列矩阵．例如，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}'=(1\quad 3\quad 2);$$

$$\boldsymbol{B}=(4\quad 0\quad 5\quad 6),\ \boldsymbol{B}'=\begin{pmatrix}4\\0\\5\\6\end{pmatrix}.$$

2．矩阵的相等

定义 3 如果两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 的行数和列数分别相同，且各对应位置上的元素相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},$$

即如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$．例如，若

$$\begin{pmatrix}6&a&b\\1&c&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&5&4\\1&3&2\end{pmatrix},$$

则 $$a=5,\ b=4,\ c=3.$$

3．矩阵的加法和减法

例 4 某工厂生产的甲、乙、丙三种产品，七、八两月在 A，B，C 三个地区的销售量如表 16－4 所示．

表 16－4

销量 \ 销售地 / 产品	七月			八月		
	A	B	C	A	B	C
甲	98	24	42	55	19	44
乙	39	15	22	43	53	38
丙	22	15	17	11	40	20

将销售量写成矩阵形式为

$$\begin{array}{cc}\text{七月份} & \text{八月份}\\ \begin{pmatrix}98&24&42\\39&15&22\\22&15&17\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}55&19&44\\43&53&38\\11&40&20\end{pmatrix}.\end{array}$$

七、八月份合计在各地区的销售量如表 16-5 所示.

表 16-5

销量 销售地 / 产品	A	B	C
甲	98+55	24+19	42+44
乙	39+43	15+53	22+38
丙	22+11	15+40	17+20

将销售量写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 98+55 & 24+19 & 42+44 \\ 39+43 & 15+53 & 22+38 \\ 22+11 & 15+40 & 17+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 153 & 43 & 86 \\ 82 & 68 & 60 \\ 33 & 55 & 37 \end{pmatrix}.$$

这说明，在实际问题中，有时需要把两个矩阵的所有对应元素相加.

类似地，如果我们要求计算七月份比八月份多销售的产品数，应为

$$\begin{pmatrix} 98-55 & 24-19 & 42-44 \\ 39-43 & 15-53 & 22-38 \\ 22-11 & 15-40 & 17-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 5 & -2 \\ -4 & -38 & -16 \\ 11 & -25 & -3 \end{pmatrix},$$

就是把两个矩阵的所有对应元素相减.

定义 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是两个 $m\times n$ 矩阵，规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和(差)为

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(a_{ij}\pm b_{ij}).$$

求两个矩阵和(差)的运算叫做**矩阵的加(减)法**.

由定义 4，容易验证矩阵的加法满足以下运算律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'$;

(4) 对于零矩阵$\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$.

其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{0}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，并且前三个可以是任意的.

例 5 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

求：(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'$; (2) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'$.

解 (1)

$$A+A'=\begin{pmatrix}0&2&4\\4&1&-2\\-3&2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&4&-3\\2&1&2\\4&-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6&1\\6&2&0\\1&0&-2\end{pmatrix};$$

(2) $$A-A'=\begin{pmatrix}0&2&4\\4&1&-2\\-3&2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&4&-3\\2&1&2\\4&-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&7\\2&0&-4\\-7&4&0\end{pmatrix}.$$

例 6　已知

$$A=\begin{pmatrix}3&7&4\\-3&4&4\\-2&0&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&x_1&x_2\\x_1&4&x_3\\x_2&x_3&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&y_1&y_2\\-y_1&0&y_3\\-y_2&-y_3&0\end{pmatrix},$$

且 $A=B+C$，试求矩阵 B 和 C.

解　由 $A=B+C$，得

$$\begin{pmatrix}3&7&4\\-3&4&4\\-2&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&x_1+y_1&x_2+y_2\\x_1-y_1&4&x_3+y_3\\x_2-y_2&x_3-y_3&3\end{pmatrix}.$$

根据矩阵相等的规定，得到下面三个方程组：

$$\begin{cases}x_1+y_1=7,\\x_1-y_1=-3;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2+y_2=4,\\x_2-y_2=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3+y_3=4,\\x_3-y_3=0.\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=1,\\y_2=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=2,\\y_3=2.\end{cases}$$

故所求矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&5&3\\-5&0&2\\-3&-2&0\end{pmatrix}.$$

4. 矩阵的数乘

在前面的例 4 中，若九月份各种产品的销售量都是八月份的两倍，则九月份的销售量矩阵为

$$\begin{pmatrix}2\times55&2\times19&2\times44\\2\times43&2\times53&2\times38\\2\times11&2\times40&2\times20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}110&38&88\\86&106&76\\22&80&40\end{pmatrix}.$$

定义 5　数 k 与矩阵 $A=(a_{ij})$ 的乘积定义为

$$kA=(ka_{ij})$$

或

$$k\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}&\cdots&ka_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{m1}&ka_{m2}&\cdots&ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

求数与矩阵乘积的运算叫做**矩阵的数乘**．不难看出，矩阵的数乘满足以下运算律：

（1）交换律　$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k$；

（2）分配律　$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$，$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

（3）结合律　$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

（4）$1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

（5）$(k\boldsymbol{A})'=k\boldsymbol{A}'$．

其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，k，l 为任意数．

例 7　已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&2\\3&2&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&2&-1\end{pmatrix},$$

求 $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$ 及 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$．

解

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}&=3\begin{pmatrix}3&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&2&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}9&3&6\\9&6&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2&4\\6&4&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}9&1&10\\15&10&1\end{pmatrix};\end{aligned}$$

$$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}9&3&6\\9&6&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-2&4\\6&4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&5&2\\3&2&5\end{pmatrix}.$$

5. 矩阵的乘法

例 8　某学校明、后两年计划建造教学楼与宿舍楼，有关建筑面积及单位面积材料平均耗用量如表 16－6 和表 16－7 所示．

表 16－6

	教学楼的建筑面积/100 m^2	宿舍楼的建筑面积/100 m^2
明年	20	10
后年	30	20

表 16－7

	钢材/(t/100 m^2)	水泥/(t/100 m^2)	木料/(m^3/100 m^2)
教学楼	2	18	4
宿舍楼	1.5	15	5

因此，明、后两年三种建筑材料的耗用量如表 16－8 所示．

表 16－8

	钢材/t	水泥/t	木料/m^3
明年	$20\times2+10\times1.5=55$	$20\times18+10\times15=510$	$20\times4+10\times5=130$
后年	$30\times2+20\times1.5=90$	$30\times18+20\times15=840$	$30\times4+20\times5=220$