国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

SPERNER LEMMA

Sperner引理

刘培杰数学工作室 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

SPERNER LEMMA

Sperner引理

刘培杰数学工作室　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起，详细介绍了斯潘纳尔引理的内容及证明，并介绍了与之相关的IMY不等式、Boolea矩阵、图论、Dilworth定理、极集理论、高斯数等问题。

本书适合高等数学研究人员及高等院校数学专业教师及学生参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

Sperner引理/刘培杰数学工作室编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.1

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978－7－5603－6806－1

Ⅰ.①S…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①组合数学－研究　Ⅳ.①O157

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第181021号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　刘春雷
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张13.5　字数139千字
版　　次　2018年1月第1版　2018年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6806－1
定　　价　98.00元

代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理.浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭.吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会.大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了.屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看.封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢，且往下看.第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价，保主跨海去征东.

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）.那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品,都是长期积累和短期突击相结合的产物.涓涓不息,将成江河;无此涓涓,何来江河?

爱好读书是许多伟人的共同特性,不仅学者专家如此,一些大政治家、大军事家也如此.曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷,嗜书如命的人.他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

⊙ 目录

第1章 斯潘纳尔引理及 IMY 不等式

在 1993 年全国高中数学联赛中，浙江省提供了一道颇有背景的试题(第二试第二题)：

试题 1.1 设 A 是一个包含 n 个元素的集合，它的 m 个子集 A_1，A_2，…，A_m 两两互不包含，试证：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\geqslant m^2$.

其中，$|A_i|$ 表示 A_i 所含元素的个数，$C_n^{|A_i|}$ 表示从 n 个不同元素中取 $|A_i|$ 个的组合数.

证明 (1) 证明的关键在于证明如下不等式

$$\sum_{i=1}^{m} |A_i|!\ (n-|A_i|)!\ \leqslant n! \qquad (1.1)$$

设 $|A_i|=m_i(i=1,2,\cdots,m)$. 一方面 A 中 n 个元素的全排列为 $n!$;另一方面,考虑这样一类 n 元排列

$$a_1,a_2,\cdots,a_{m_i},b_1,b_2,\cdots,b_{n-m_i} \qquad (1.2)$$

其中,$a_j\in A_i(1\leqslant j\leqslant m_i)$,$b_j\in A\backslash A_i$(即 $\overline{A}_i$)$(1\leqslant j\leqslant n-m_i)$.

我们先证明一个引理.

引理 1.1 若 $i\neq j$,则 A_i 与 A_j 由上述方法所产生的排列均不相同.

证明 用反证法,假设 A_j 所对应的一个排列

$$a'_1,a'_2,\cdots,a'_{m_j},b'_1,b'_2,\cdots,b'_{n-m_j}$$

与 A_i 所对应的一个排列

$$a_1,a_2,\cdots,a_{m_i},b_1,b_2,\cdots,b_{n-m_i}$$

相同,则有以下两种情况:

① 当 $|A_i|\leqslant|A_j|$ 时,有 $A_j\supsetneqq A_i$;

② 当 $|A_i|>|A_j|$ 时,有 $A_i\supsetneqq A_j$.

而这均与 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不包含相矛盾,故引理 1.1 成立.

由引理 1.1 可知式(1.1) 成立. 由式(1.1) 立即可得

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{|A_i|!\ (n-|A_i|)!}{n!}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$$

(2) 利用柯西(Cauchy) 不等式及式(1.1) 可得

$$m\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\Big)\leqslant 1$$

近几年来,背景法命题在数学奥林匹克中已形成潮流,一道优秀的竞赛试题应有较高深的背景已成为命题者的共识,试题 1.1 就是一例.

首先就研究对象来看，试题 1.1 实际上研究了一个子集族，即 A 是一个 n 阶集合，$S=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 且满足：

(1) $A_i \subsetneqq A(i=1,2,\cdots,m)$；

(2) 对任意的 $A_i,A_j\in S,i\neq j$ 时满足 $A_i\not\subseteq A_j$，$A_j\not\subseteq A_i$.

那么这样的子集族称为 S 族，S 族中的元素都是集合. 之所以称为 S 族，是因为数学家斯潘纳尔(Sperner)最先研究了这类问题. 1928 年斯潘纳尔证明了一个被许多组合学书中称为斯潘纳尔引理的结果，它是组合集合论中的经典结果之一.

斯潘纳尔引理　设集合

$$X=\{1,2,\cdots,n\}$$

$A_1,A_2,\cdots,A_p$ 为 X 的不同子集，$E=\{A_1,A_2,\cdots,A_p\}$ 是 X 的子集族. 若 E 为 S 族，则 E 族的势至多为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$（其中 $[x]$ 为高斯 (Gauss) 函数），即 $\max p=C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

证明　令 $q_k\triangleq|\{k\mid |A_i|=k,1\leqslant i\leqslant p\}|$，则由试题 1.1 证明中的式(1.1) 有

$$\sum_{k=1}^{n}q_k\,k!\,(m-k)!\leqslant n!$$

由于

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}C_n^k=C_n^{[\frac{n}{2}]}$$

所以

$$\begin{aligned}p=\sum_{k=1}^{m}q_k&\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=1}^{p}q_k\frac{k!\,(n-k)!}{n!}\\&\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=1}^{p}q_k\frac{1}{C_n^k}=C_n^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}\end{aligned}$$

斯潘纳尔引理在数学竞赛中有许多精彩的特例.

再举一个最近的例子.

试题 1.2 (2017 年中国国家集训队测试三) 设 X 是一个 100 元集合. 求具有下述性质的最小正整数 n: 对于任意由 X 的子集构成的长度为 n 的序列

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

存在 $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$, 满足

$$A_i \subseteq A_j \subseteq A_k \text{ 或 } A_i \supseteq A_j \supseteq A_k$$

(瞿振华供题)

解 答案是 $n = C_{102}^{51} + 1$.

考虑如下的子集序列: $A_1, A_2, \cdots, A_N$, 其中 $N = C_{100}^{50} + C_{100}^{49} + C_{100}^{51} + C_{100}^{50} = C_{102}^{51}$, 第一段 C_{100}^{50} 项是所有 50 元子集, 第二段 C_{100}^{49} 项是所有 49 元子集, 第三段 C_{100}^{51} 项是所有 51 元子集, 第四段 C_{100}^{50} 项是所有 50 元子集. 由于同一段中的集合互不包含, 因此只需考虑三个子集分别取自不同的段, 易知这三个集合 A_i, A_j, A_k 不满足题述条件. 故所求 $n \geqslant C_{102}^{51} + 1$.

下证若子集序列 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 不存在 $A_i, A_j, A_k (i < j < k)$ 满足 $A_i \subseteq A_j \subseteq A_k$, 或者 $A_i \supseteq A_j \supseteq A_k$, 则 $m \leqslant C_{102}^{51}$. 我们给出三个证明.

证法 1(付云皓) 对每个 $1 \leqslant j \leqslant m$, 定义集合 B_j 如下: 另取两个不属于 X 的元素 x, y. 考察是否存在 $i < j$, 满足 $A_i \supseteq A_j$, 以及是否存在 $k > j$, 满足 $A_k \supseteq A_j$. 若两个都是否定, 则令 $B_j = A_j$; 若前者肯定后者否定, 则令 $B_j = A_j \cup \{x\}$; 若前者否定后者肯定, 则令 $B_j = A_j \cup \{y\}$; 若两个都肯定, 则令 $B_j = A_j \cup \{x, y\}$.

下面验证 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 互不包含. 假设 $i < j$, 且 $B_i \subseteq B_j$, 则有 $A_i \subseteq A_j$. 由 B_i 的定义可知 $y \in B_i$, 故 $y \in B_j$, 这样, 存在 $k > j$, 使得 $A_j \subseteq A_k$, 这导致 $A_i \subseteq A_j \subseteq A_k$, 与假设矛盾. 类似可得 $B_i \supseteq B_j$ 也不可能. 这样 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 是102元素集合 $X \cup \{x, y\}$ 的互不包含的子集, 由斯潘纳尔引理得 $m \leqslant C_{102}^{51}$.

如果用到 Erdös-Szekeres 定理则有:

证法 2　考虑 $C = \{C_0, C_1, \cdots, C_{100}\}$, 其中 $C_0, C_1, \cdots, C_{100}$ 是 X 的子集, $|C_i| = i(0 \leqslant i \leqslant 100)$, 且 $C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_{100}$, 称这样的 C 为 X 的一条最大链. 对 X 的任意子集 A, 定义 $f(A) = C_{100}^{|A|}$. 用两种方式处理下面的和式

$$S = \sum_{C} \sum_{A_i \in C} f(A_i)$$

其中第一个求和遍历所有 X 的最大链 C, 第二个求和对属于 C 的 A_i 求和.

在每条最大链 C 中, 至多有 4 个 $A_i \in C$. 这是因为, 如果有 5 个 $A_i \in C$, 由于这 5 个集合互相有包含关系, 由 Erdös-Szekeres 定理, 存在三项子列依次包含或者依次被包含, 与假设不符. 并且在同一条最大链上的 A_i, 至多有两个相同. 因此对每条最大链 C, 有

$$\sum_{A_i \in C} f(A_i) \leqslant 2C_{100}^{50} + 2C_{100}^{49} = C_{102}^{51}$$

给定一条最大链等价于给出 X 中所有元素的一个排列, 故最大链条数等于 $100!$, 于是 $S \leqslant 100!\ C_{102}^{51}$.

另外, 通过交换求和符号, 有

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{C: A_i \in C} f(A_i) = \sum_{i=1}^{m} f(A_i) n(A_i)$$

其中 $n(A_i)$ 表示包含 A_i 的最大链的条数. 包含 A_i 的最

大链，其对应的 X 中排列，前 $|A_i|$ 个元素恰为 A_i，因此 $n(A_i)=|A_i|!\ (100-|A_i|)!$，故 $f(A_i)n(A_i)=100!$，从而 $S=100!\ m$. 再结合 $S\leqslant 100!\ \mathrm{C}_{102}^{51}$，即得 $m\leqslant \mathrm{C}_{102}^{51}$.

如果用上 Hull 定理和 Menger 定理则可得到：

证法3 我们将 X 的全体子集在包含关系下构成的偏序集 $P(X)$ 划分成 C_{100}^{50} 条互不相交的链，使得其中有 $\mathrm{C}_{100}^{50}-\mathrm{C}_{100}^{49}$ 条链仅由一个集合构成. 若可以做到上述划分，则由证法 2 中的讨论可知，每条链上至多有 4 个 A_i，但在仅有一个集合的链上至多有 2 个 A_i，从而 $m\leqslant 4\mathrm{C}_{100}^{49}+2(\mathrm{C}_{100}^{50}-\mathrm{C}_{100}^{49})=\mathrm{C}_{102}^{51}$. 设 $P_i(X)\subset P(X)$ 是 X 的所有 i 元集合构成的子集族. 构作简单图 G，其顶点集为 $P(X)$，对 $A\in P_i(X)$ 以及 $B\in P_{i+1}(X)$，A，B 之间用边相连当且仅当 $A\subset B$. G 限制在 $P_i(X)\cup P_{i+1}(X)$ 上是一个二部图，记为 G_i. 对于 $0\leqslant i<49$，我们说明 G_i 有一个覆盖 $P_i(X)$ 的匹配. 注意到对 $A\in P_i(X)$，$\deg_{G_i}(A)=100-i$，对 $B\in P_{i+1}(X)$，$\deg_{G_i}(B_i)=i+1<100-i$. 对任意 $V\subseteq P_i(X)$，V 在 G_i 中的邻点个数

$$|N_{G_i}(V)|\geqslant |V|\cdot\frac{100-i}{i+1}\geqslant |V|$$

由 Hall 定理，在 G_i 中存在覆盖 $P_i(X)$ 的匹配. 对每个 $i=0,1,\cdots,48$，取定 G_i 中覆盖 $P_i(X)$ 的匹配，将其余边删去. 类似地，对每个 $i=51,52,\cdots,99$，在 G_i 中存在覆盖 $P_{i+1}(X)$ 的匹配，取定这样一个匹配，而将其余边删去.

考虑 G 限制在 $P_{49}(X)\cup P_{50}(X)\cup P_{51}(X)$ 得到的三部图 H，我们证明 H 中存在 C_{100}^{49} 条互不相交长度