国家出版基金资助项目
国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

FAREY　SERIES

Farey 级数

佩捷 编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

FAREY　SERIES

Farey级数

佩捷　编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书从1978年陕西省中学生数学竞赛中的一道试题引出法雷数列.书中主要介绍了利用法雷数列证明孙子定理、法雷序列的符号动力学、连分数和法雷表示、提升为非单调的圆映射、利用法雷数列证明一个积分不等式等问题.全书共七章,读者可全面地了解法雷级数在数学中以及在生产生活中的应用.

本书适合数学专业的本科生和研究生以及数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

Farey级数/佩捷编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.6
(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)
ISBN 978-7-5603-6530-5

Ⅰ.①F… Ⅱ.①佩… Ⅲ.①级数 Ⅳ.①O173

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第058590号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 钱辰琛
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 牡丹江邮电印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张9.75 字数101千字
版　　次 2017年6月第1版 2017年6月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-6530-5
定　　价 68.00元

⊙代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,"终身不复鼓琴".那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量. 书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉. 失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理. 浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭. 吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会. 大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工. 一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了. 屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看. 封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》. 管它呢，且往下看. 第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价，保主跨海去征东.

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）. 那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字. 这是我有生以来独立看的第一本书. 尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,我便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、元曲,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物．涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此．曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人．他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关．

王梓坤

目录

第 0 章 引言

数学竞赛试题背景的介绍往往是数学科普的源头. 下面以一个最近的美国大学生数学竞赛试题为例. 美国大学生数学竞赛又名普特南竞赛,全称是威廉·洛厄尔·普特南数学竞赛,是美国及整个北美地区大学低年级学生参加的一项高水平赛事.

以其命名的威廉·洛厄尔·普特南(William Lowell Putnam)曾任哈佛大学校长. 下面的问题是 2014 年第 75 届最后一题:

问题 令 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 是一个函数,对于它存在一个常数 $K>0$,使得对所有的 $x,y\in[0,1]$ 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|$. 并假设对每个有理数 $r\in[0,1]$,存在整数 a 和 b,使得 $f(r)=a+br$. 证明:存在有限多个区间 $I_1,\cdots,I_n$,使得在每个 I_i 上 f 是一

个线性函数,并且$[0,1]=\bigcup_{i=1}^{n} I_i$.

原命题委员会给出的解答(陆柱家译)为:我们首先回忆一下初等数论中法雷(Farey)序列的几个基本性质,并为它们预备一些记号.在讨论中,所有有理数都被写成既约形式.

如下在$[0,1]$中定义有理数的有限序列F_1,$F_2,\cdots$:从$F_1=(0,1)=(\frac{0}{1},\frac{1}{1})$开始.对于$n>1$,当$b+d=n$,$\frac{a}{b}$,$\frac{c}{d}$是$F_{n-1}$的相邻两项时,在$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$之间插入$\frac{a+c}{b+d}$,用这样的方式从$F_{n-1}$形成$F_n$.

由归纳法,F_n的相邻两项$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$总是满足$bc-ad=1$.如果有一个有理数$\frac{r}{s}$介于相邻两项之间,譬如说$\frac{a}{b}<\frac{r}{s}<\frac{c}{d}$,则有

$$s=s(bc-ad)=b(cs-dr)+d(br-as)\geqslant b+d$$

由归纳法即得,F_n由所有分母$s\leqslant n$的有理数$\frac{r}{s}\in[0,1]$组成;此外,F_n的任意两个相邻元素$\frac{a}{b}$,$\frac{c}{d}$满足$b+d\geqslant n+1$(否则,在某一步$\frac{a+c}{b+d}$会被插于$\frac{a}{b}$,$\frac{c}{d}$之间).序列F_n通常被称为第n个法雷序列.

现在我们回到题中的问题.由假设,对于每个$\frac{r}{s}\in[0,1]\cap\mathbf{Q}$,我们有$f(\frac{r}{s})\in\frac{1}{s}\mathbf{Z}$.选取$n\geqslant 4K$,并令$\frac{a}{b}$,

$\frac{c}{d}$是 F_n 的相邻元素，则 $f(\frac{c}{d})-f(\frac{a}{b})\in\frac{1}{bd}\mathbf{Z}$. 由于 $|f(\frac{c}{d})-f(\frac{a}{b})|\leqslant K|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}|=K|\frac{1}{bd}|=\frac{K}{bd}$，对于某个满足 $|m|\leqslant K$ 的整数 m，我们即有 $f(\frac{c}{d})-f(\frac{a}{b})=\frac{m}{bd}$.

对于下一个法雷序列中的相邻元素$\frac{a}{b},\frac{a+c}{b+d},\frac{c}{d}$应用相同的论证，我们就对满足 $|m|,|m_1|,|m_2|\leqslant K$ 的某3个 $m,m_1,m_2\in\mathbf{Z}$ 得到3个方程

$$f\left(\frac{c}{d}\right)-f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{m}{bd}$$

$$f\left(\frac{a+c}{b+d}\right)-f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{m_1}{b(b+d)}$$

$$f\left(\frac{c}{d}\right)-f\left(\frac{a+c}{b+d}\right)=\frac{m_2}{d(b+d)}$$

由此即得

$$\frac{m_1}{b(b+d)}+\frac{m_2}{d(b+d)}=\frac{m}{bd}$$

因而

$$m_1d+m_2b=m(b+d)$$

如果 $m_2\neq m$，那么我们可以把最后的方程写为

$$\frac{m_1-m}{m-m_2}=\frac{b}{d}$$

由于 $bc-ad=1$，我们就知道$\frac{b}{d}$是既约分数，因而 m_1-m 是 b 的倍数，并且 $m-m_2$ 是 d 的倍数. 然而，因为 $n\geqslant 4K$ 和 $b+d\geqslant n+1$，我们必定有 $\max\{b,d\}>2K$，

因而或者 $|m_1-m|>2K$，或者 $|m-m_2|>2K$，这与 $|m|,|m_1|,|m_2|\leqslant K$ 矛盾，除非 $m_1=m_2=m$. 这意味着我们现在有

$$f\left(\frac{c}{d}\right)-f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{m}{bd}=m\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)$$

和

$$f\left(\frac{a+c}{b+d}\right)-f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{m}{b(b+d)}=m\left(\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}\right)$$

因为通过重复地把新的项插入法雷序列，我们将得到 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 之间的所有有理数，那么对于所有的 $x\in\left[\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right]\cap\mathbf{Q}$，我们就有

$$f(x)-f\left(\frac{a}{b}\right)=m\left(x-\frac{a}{b}\right)$$

即

$$f(x)=f\left(\frac{a}{b}\right)+m\left(x-\frac{a}{b}\right)$$

因为 f 是连续的，所以对所有的 $x\in\left[\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right]$，最后一个等式也成立，因此在区间 $\left[\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right]$ 上 f 是一个线性函数. 这就证明了论断.

解答中出现了一个法雷序列，也可称为法雷级数. 为了更加深入浅出，我们从级别更低的竞赛试题入手.

在 1978 年陕西省中学生数学竞赛中有如下试题：

$\frac{p_1}{q_1}$ 和 $\frac{p_2}{q_2}$ 为两个正分数，$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_2}{q_2}$，试证

$$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}<\frac{p_2}{q_2}$$

由于那次竞赛是经国务院批准，教育部和全国科协联合举办的，全国共有八个省、市参加，而且是“文化大革命”后第一届中学生数学竞赛，所以数学界特别重视．在赛后出版的《1978 年部分省市中学生数学竞赛题解》一书中，华罗庚先生亲自撰写了序言，使广大中学师生了解了试题的背景，本题即是其中一例．看似平凡的分数问题，其后的背景实则为法雷贯即法雷数列．华罗庚指出：陕西试题告诉我们，如果$\frac{p_1}{q_1}$，$\frac{p_2}{q_2}$为两个正分数，则$\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$总是介于这两个分数之间．在所谓法雷贯的问题中就用到了这一原则．现要把分子、分母互素，且分母小于或等于 n 的所有分数按从小到大的次序排出来．方法是这样的：在 $0\left(=\frac{0}{1}\right)$和 $1\left(=\frac{1}{1}\right)$之间插入中项$\frac{1}{2}$，再在 $0\left(=\frac{0}{1}\right)$与$\frac{1}{2}$之间插入中项$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$与 1 之间插入中项$\frac{2}{3}$，这样不断地在相邻两数之间插入中项，直到所有相邻的数的分母之和都大于 n 时为止，这样就得到了 n 阶法雷贯．

下面介绍一道“希望杯”竞赛试题的新解法．

第九届“希望杯”竞赛初二试卷中的第 21 题，我们利用法雷数列也可给出不同于标准答案的新解法．

例 1　已知 n,k 均为自然数，且满足不等式$\frac{7}{13}<$

$\frac{n}{n+k}<\frac{6}{11}$. 若对于某一给定的自然数 n，只有唯一的自然数 k 使不等式成立，求所有符合要求的自然数 n 中的最大数和最小数.

解　(1) 由

$$\frac{7}{13}<\frac{n}{n+k}<\frac{6}{11}\Rightarrow\frac{13}{7}>\frac{n+k}{n}>\frac{11}{6}\Rightarrow\frac{6}{7}>\frac{k}{n}>\frac{5}{6}\quad(1)$$

我们考察一般情形

$$\frac{a}{a+1}>\frac{k}{n}>\frac{a-1}{a},a\in\mathbf{N}$$

$$\frac{a}{a+1}=\frac{a(2a+1)}{(a+1)(2a+1)}=\frac{2a^2+a}{(a+1)(2a+1)}$$

$$>\frac{2a^2+a-1}{(a+1)(2a+1)}=\frac{2a-1}{2a+1}$$

$$\frac{a-1}{a}=\frac{(a-1)(2a+1)}{a(2a+1)}=\frac{2a^2-a-1}{a(2a+1)}$$

$$<\frac{2a^2-a}{a(2a+1)}=\frac{2a-1}{2a+1}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{a+1}>\frac{2a-1}{2a+1}>\frac{a-1}{a}\Rightarrow\frac{k}{n}=\frac{2a-1}{2a+1}$$

将 $a=6$ 代入得 $n=13,k=11$.

因为　　$(2a-1,2a+1)=1$

所以　　$k=\frac{(2a-1)n}{2a+1}\in\mathbf{N}$

当且仅当 $(2a+1)\mid n$，即 $n=13m(m\in\mathbf{N})$ 时，$k\in\mathbf{N}$，故 $\min n=13$.

(2) 由式(1)可知 $35n<42k<36n$.

故由已知，在 $(35n,36n)$ 中仅存在一个 $k\in\mathbf{N}$，