



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

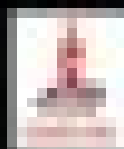
ABEL-RUFFINI THEOREM

Abel-Ruffini 定理

王鸿飞 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



TSINGHUA UNIVERSITY

THE LIBRARY OF TSINGHUA UNIVERSITY
100084 BEIJING, P. R. CHINA

ALGEBRA

Abel–Ruffini 定理

1824–1828



ALGEBRA



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

ABEL-RUFFINI THEORM

Abel-Ruffini 定理

王鸿飞 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是一位大学分析学教授在学习伽罗瓦理论时的心得体会,以还原历史的视角,从一元方程的求根公式讲起,配以大量的简单例子帮助初学者通过自学掌握伽罗瓦理论这一抽象代数中的经典内容.

本书适合于高等学校数学及相关专业师生使用,也适合于数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

Abel-Ruffini 定理/王鸿飞编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018. 1

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6541-1

I. ①A… II. ①王… III. ①伽罗瓦理论
IV. ①O153. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 073157 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 刘家琳

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 牡丹江邮电印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 24 字数 247 千字

版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6541-1

定 价 88.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

代数方程式根式求解的发展者



阿尔·花刺子模(约 783—850)



冯塔纳(1499—1557)



卡丹(1501—1576)



韦达(1540—1603)



拉格朗日(1736—1813)



鲁菲尼(1765—1822)



高斯(1777—1855)



阿贝尔(1802—1829)



伽罗瓦(1811—1832)

这群学者曾为代数方程式根式求解的发展奉献出
无比的智慧和学识,谨于此致敬最高礼赞!

◎
代
序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题 and 我的回答.

真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；老年人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有何事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫未俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

五次及五次以上方程式的根式解问题是很多人所感兴趣的,在数学史上,这个问题的解决差不多经历了三个世纪.直到 19 世纪上半叶,经过几代数学家的努力,这个问题才最终因伽罗瓦创设的新理论(所谓伽罗瓦理论)而得到圆满解决.然而遗憾的是,这个理论在大学数学的教育当中却鲜少得到一个充分的阐释,一学期的抽象代数学课程往往是群、环、域等概念介绍完毕也就完事了,代数方程根式解理论以及与之相关的三大尺规作图问题等根本就来不及介绍.

另一方面,在现有的中文文献中,关于伽罗瓦理论的讲述有着两种较为极端的情况.一种是(少数)以方程式为背景的,但往往是蜻蜓点水式的

叙述,读者不能得到问题的充分答案;另一种虽然是较为完备的叙述,但完全采用毫无方程式求根背景的抽象代数式的论证,令很多初学者望而却步.

在整个方程式根式解问题的探索过程中,其他一些数学家的工作也是值得注意的:拉格朗日关于代数方程根式解的工作;阿贝尔(Abel)关于一般五次方程根式不可解的证明以及特殊根式可解方程式的研究;高斯关于分圆方程理论的研究;等等.对于这部分内容,在中文文献中都没有做充分的剖析,要么是仅仅提供一些历史性的叙述材料,要么是语焉不详,论证模糊.这对期望了解细节的读者不能不说是一个缺憾.事实上,只有了解这些工作,才能真正排除这样的疑惑:方程式根式解问题的彻底解决,为什么是通过一种初看起来有些奇怪的方式——利用根的置换(群)理论.

所有这些都促成了本书的编辑.本书是由五部分组成的,内容分为12章.

第一部分(第1章与第2章)主要是根式解问题的提出与其发展的简单历史,二项方程式借助三角函数的解法以及二至四次一般方程式的根式解法.

第二部分(第3章与第4章)是为后面的部分做准备的,讨论域上多项式的性质、对称多项式的基本定理以及数域的扩张.

第三部分(第7章)是全书比较独立的一部分,主要讨论阿贝尔和克罗内克关于根式解四次以上方程式不可能性的证明(照顾到逻辑性,本书并未严格地按照

历史发展的先后来叙述). 克罗内克的定理的重要意义在于以较少的篇幅, 并且不是特别抽象的方式提供一个(根式解五次及以上代数方程)不可能性的证明, 同时还给出了这种方程的具体例子.

第四部分包括第 5 章、第 6 章、第 8 章、第 9 章、第 10 章和第 11 章. 前 4 章主要讨论由拉格朗日创始然后由伽罗瓦发展的关于“利用根的置换理论来解方程式”的理论. 这里读者将看到群、不变子群、商群、同态等概念的自然引入过程. 同时得出了方程式解为根式的必要条件. 第 10 章主要讲解高斯关于分圆方程式的研究. 在这一章, 我们没有利用伽罗瓦理论而证明了分圆方程式借助根式的可解性 (§ 3). § 4 则呈现了分圆方程式的高斯的具体解法. 第 11 章则是两种特殊类型方程式的根式求解, 历史上这是阿贝尔所研究过的, 并在此基础上得出了方程式解为根式的充分条件.

最后, 第五部分(第 12 章)是关于方程式的伽罗瓦理论的叙述. 虽然书的前面部分可以说完全解决了方程式的根式解问题, 但编者认为, 以抽象的、简捷的方式再来叙述一下是比较合适的.

在编写过程中参阅和引用了较多现有文献. 特别是黄缘芳翻译的迪克森的《代数方程式论》, 李世雄的《代数方程与置换群》, 周畅的博士论文《Bezout 的代数方程理论之研究》(西北大学, 2010 年), 王宵瑜的硕士论文《代数方程论的研究》(西北大学, 2011 年), 赵增逊的硕士论文《Lagrange 的代数方程求解理论之研

究》(西北大学,2011年)等.

本书得以出版,得到了哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室的大力支持和帮助,在此向他们表示衷心的感谢.

编 者

2016年11月19日

于浙江衢州

第 1 章 方程式解成根式的问题 ·**二项方程式 //1**

§ 1 方程式解成根式的问题 ·

历史的回顾 //1

§ 2 二项方程式 //9

第 2 章 代数方程式的古典解法 //16

§ 1 一次、二次方程式 //16

§ 2 三次方程式 //19

§ 3 四次方程式 //38

§ 4 三次方程式的其他解法 //50

§ 5 契恩豪斯的变量替换法 //53

§ 6 五次方程式的布灵—杰拉德
正规式 //58

第3章 数域上的多项式 //68

- §1 数域·数域上的多项式 //68
- §2 一元多项式的可除性及其性质 //73
- §3 多项式的最大公因式 //81
- §4 贝祖定理·韦达公式 //90
- §5 数域的代数扩张 //94
- §6 数域的有限扩张 //102

第4章 对称多项式 //114

- §1 含多个未知量的多项式的基本概念 //114
- §2 两个预备定理 //117
- §3 问题的提出·未知量的置换 //121
- §4 对称多项式·基本定理 //125

第5章 用根的置换解代数方程 //133

- §1 拉格朗日的方法·利用根的置换解三次方程式 //133
- §2 利用根的置换解四次方程式 //138
- §3 求解代数方程式的拉格朗日程序 //141

第6章 置换·群 //147

- §1 置换 //147
- §2 对称性的描述·置换群的基本概念 //156
- §3 一般群的基本概念 //160
- §4 子群·群的基本性质 //162