普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数与几何学习指导和训练

XIANXING DAISHU YU JIHE XUEXI ZHIDAO HE XUNLIAN

张保才 张素娟 徐 明 郭志芳 郭秀英 编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等教育"十三五"规划教材

线性代数与几何学习指导和训练

张保才　张素娟　徐　明　郭志芳　郭秀英　编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

《线性代数与几何学习指导和训练》根据本科教学大纲及最新研究生考试基本内容与要求，由教学经验丰富的教师结合教学体会编写完成。全书共分6章，主要讲解了行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、相似矩阵与二次型和空间解析几何。

本书旨在帮助学生强化基本概念、扩大课程信息量，延伸运算与证明问题的处理技巧，增强数学科学能力的培养，为深入学习并参加考研的同学提供一本系统精练的复习指导资料。每章内容包括基本要求、知识要点、典型例题和自测题。附录包括5套模拟试卷。

本书适合作为普通高等学校工科各专业的课程结业指导书，同时也可作为本科学生考研复习的指导书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何学习指导和训练/张保才等编.—北京：中国铁道出版社，2017.9

普通高等教育"十三五"规划教材

ISBN 978-7-113-23787-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教学参考资料②几何-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2②O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第221923号

书　　名：线性代数与几何学习指导和训练
作　　者：张保才　张素娟　徐　明　郭志芳　郭秀英　编

策　　划：李小军　　**读者热线：**(010)63550836
责任编辑：张文静　徐盼欣
封面设计：付　巍
封面制作：刘　颖
责任校对：张玉华
责任印制：郭向伟

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街8号)
网　　址：http://www.tdpress.com/51eds/
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
版　　次：2017年9月第1版　2017年9月第1次印刷
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16　**印张：**9.5　**字数：**211千
书　　号：ISBN 978-7-113-23787-5
定　　价：19.80元

前　言

《线性代数与几何学习指导和训练》是针对“线性代数与几何”课程编写的，书中内容按普通高等学校本科教学大纲以及研究生考试基本内容与要求，由教学经验丰富的教师结合教学体会编写完成。其宗旨是使在校理工科大学生能用有效的时间较快、较好地掌握“线性代数与几何”这门课程的内容并通过考试。另外，通过使用本书能够强化基本概念，扩大课程信息量，延伸运算与证明问题的处理技巧，增强数学思维能力，为深入学习并参加考研的同学提供一本系统精练的复习指导资料。

本书的内容主要分为四大部分：第一部分是基本要求，给出本科及考研内容的最新要求；第二部分是知识要点，它是对课程的重点、难点、要点的小结和补充，起着画龙点睛的作用；第三部分是典型例题，这部分是根据不同的知识点选出有较强概念、较典型运算或证明的例题，通过对这些例题的学习能够使学生较快地掌握知识点，完成课程学习；第四部分是自测题，旨在考察读者对知识的掌握情况。

另外，附录部分给出了近几年“线性代数与几何”模拟试卷，这部分内容是对本科学生所应掌握的知识的综合考察，只有达到了题目中所体现的知识点及运算、证明要求，才算基本完成该课程的学习任务。

本书给出了自测题和模拟试卷的参考答案，建议平时对题目多进行思考、演算，但不要急于核对答案。要等到课程结束后再核对，这样才能对题目充分利用。

考虑到这是一本为本科和考研两用的指导书，因此在内容上比本科教科书有所加深和拓展，书中带“*”号的内容对本科不作要求，但对准备考研的同学来说是简捷、必要的参考材料。

本书由张保才、张素娟、徐明、郭志芳、郭秀英编写。

由于受作者经验和水平所限，书中难免存在疏漏及不足，恳请读者批评指正。

编　者

2017 年 7 月

目　录

第1章 行 列 式

1.1 基本要求

(1)了解行列式的概念、掌握行列式的性质.

(2)会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

(3)会应用克莱姆(Cramer)法则.

1.2 知识要点

1.2.1 排列及逆序数

(1)(全)排列:n 个不同的元素依次排成一列,称为这 n 个元素的(全)排列.

(2)标准排列:按标准次序构成的排列(如自然数按由小到大为标准次序).

(3)逆序数:排列中某两个元素的先后次序与标准次序不同时,称有 1 个逆序;排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数的算法:$t(p_1p_2\cdots p_n)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}$($p_i$ 后面比其小的数的个数).

(4)排列的奇偶性:一个排列的逆序数为奇(偶)数时,称其为奇(偶)排列.

(5)对换:将排列中某两个数对调,称为对换.

(6)结论:①排列经过 1 次对换,其奇偶性改变.

②将奇(偶)排列对换为标准排列时,对换次数为奇(偶)数.

1.2.2 n 阶行列式的定义及性质

1. n 阶行列式的定义

定义 设 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 n^2 个数,称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式，它表示表达式 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其中，$p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列，表达式是对所有全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对应的项 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 求和.

注 (1)由 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列可知，行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

有两个特点：① 每一项都是取自其不同行与不同列的元素之积；

② 共有 $n!$ 项，且系数符号正负各占一半.

(2)与行列式定义等价的另一定义形式为(各项的下标中列标为标准排列，行标变化)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{t(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

另外，行列式定义还有一种行标与列标均不为标准排列的等价形式.

2. n 阶行列式的性质

性质 1 $D^{\mathrm{T}}=D$.

由行列式与其转置行列式相等知，凡对行成立的结果，对列也成立，下面着重讨论行.

性质 2 设 $i\neq j$，$D=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$，则 $D_1=-D$.

推论 若行列式 D 中某两行(列)元素对应相等，则 $D=0$.

性质 3 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD$，$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD$.

推论1 若行列式 D 中某行(列)元素全为0,则 $D=0$.

推论2 若行列式 D 中某两行(列)元素对应成比例,则 $D=0$.

性质4
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意 使用性质4时,只能按某一行(列)的两项分解出两个行列式,而其余行(列)不变. 例如,如下写法是错误的:
$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

性质5
$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+kr_i} \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

性质6 (行列式按行或列的展开)
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$
或
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

推论
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \end{cases} \quad (i\neq j).$$

1.2.3 克莱姆(Cramer)法则

考虑 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}. \tag{1}$$

定理(克莱姆法则) 对于线性方程组(1),记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_j=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ (j) \end{array} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

若 $D\neq 0$,则方程组(1)存在唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

推论 若齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$,则方程组只有零解.

1.2.4 计算 n 阶行列式的主要方法

(1)**用行列式定义**:对于一些具有特殊规律的行列式,用定义直接给出结果是非常简便的.例如,对角形、上(下)三角形行列式的计算等.

(2)**化为三角形行列式**:一般来说,元素为数的行列式总可以用性质等将其化为三角形行列式完成计算.

(3)**归边法**:一些含字母的特殊行列式(如行列式的每一行(列)的和相等)常可利用"归边"等手段将行列式化为三角形完成计算.

(4)**降阶法**:主要是利用行列式按行(列)展开,将高阶行列式转化为低阶行列式.

(5)**递推法**:对于 n 阶行列式 D_n,若能找出 D_n 与 D_{n-1} 或 D_{n-2} 等的关系,可利用这一关系来计算 D_n.

(6)**升阶法**:是在原有行列式的基础之上增加一行一列,且保持原行列式的值不变的情况下计算行列式的一种方法. 特别地,当所加行列在边上时称为"加边法".

另外,还有析因子法、倒着做、利用范德蒙德行列式的结果等算法.

数学归纳法多用于行列式的证明题,但有时也用于行列式的计算,这时需要对同结构的低阶行列式进行计算,从递推规律出发得出一般性的结论,然后用归纳法证明其正确性.

1.3 典型例题

例 1.1 试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{65}a_{56}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是 6 阶行列式 D_6 中的项.

解 由 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{65}a_{56}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 知,右端的 6 个因子的第一下标构成标准排列,第二下标构成 $1,2,\cdots,6$ 的一个全排列,其逆序数 $\tau(431265)=3+2+0+0+1=4$,所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{65}a_{56}=(-1)^{\tau(431265)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$,即 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{65}a_{56}$ 是 D_6 中的项;但 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}=-a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}\neq(-1)^{\tau(452316)}a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}=a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$,故 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是 D_6 中的项.

例 1.2 计算 $D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 1 & 9-x^2\end{vmatrix}$.

解 由当 $x=\pm1$ 时 $D_4=0$ 可知,D_4 中有因子 $(x-1)(x+1)$;由当 $x=\pm2$ 时 $D_4=0$ 可知,D_4 中有因子 $(x-2)(x+2)$.

又根据行列式的定义知,D_4 是关于 x 的 4 次多项式,所以

$$D_4=a(x-2)(x+2)(x-1)(x+1).$$

现只要求出 x^4 的系数即可. 为此,令 $x=0$,可得 $D_4=4a$,计算得 $D_4=-12$,于是 $a=-3$,故

$$D_4=-3(x-2)(x+2)(x-1)(x+1).$$

评注 本题方法称为**析因子法**. 即运用行列式找出 D_4 中全部因子,最后再确定最高次项系数.

例 1.3 计算 $D_3=\begin{vmatrix}a & b+1 & c+2\\ b & c+1 & a+2\\ c & a+1 & b+2\end{vmatrix}$.

解 (归边法)

$$D_3=\begin{vmatrix}a+b+c+3 & b+1 & c+2\\ a+b+c+3 & c+1 & a+2\\ a+b+c+3 & a+1 & b+2\end{vmatrix}=(a+b+c+3)\begin{vmatrix}1 & b+1 & c+2\\ 1 & c+1 & a+2\\ 1 & a+1 & b+2\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+3)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 1 & c & a\\ 1 & a & b\end{vmatrix}=(a+b+c+3)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 0 & c-b & a-c\\ 0 & a-b & b-c\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+3)[-(b-c)^2-(a-b)(a-c)].$$

评注 该题属单侧归边题,只能向左归边.

例 1.4 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

解 依次将第 j 列的负 j 倍加到第 1 列的计算方法较为方便.

$$D_n \xlongequal[(j=2,\cdots,n)]{c_1-j\cdot c_j} \begin{vmatrix} 1-2^2-\cdots-n^2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1-(2^2+\cdots+n^2) = 1-\sum_{k=2}^{n} k^2.$$

评注 这是典型的"箭形"行列式,其他形式的箭形行列式均可采用类似算法.

***例 1.5** 证明二阶行列式的导数公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{vmatrix}.$$

并给出 n 阶行列式的导数公式.

证 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[a_{11}(t)a_{22}(t)-a_{12}(t)a_{21}(t)]$$
$$=[a'_{11}(t)a_{22}(t)+a_{11}(t)a'_{22}(t)]-[a'_{12}(t)a_{21}(t)+a_{12}(t)a'_{21}(t)]$$
$$=[a'_{11}(t)a_{22}(t)-a_{12}(t)a'_{21}(t)]+[a_{11}(t)a'_{22}(t)-a'_{12}(t)a_{21}(t)]$$
$$=\begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{vmatrix}.$$

类似推导二阶行列式的导数公式按行求导形式.

可以推得 n 阶行列式的导数公式按列求导形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

类似可以给出 n 阶行列式的导数公式的按行求导形式.

*例 1.6 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & & n-1 & n-1 \\ 1 & & & & & n \quad n \end{vmatrix}$.

解 利用递推法求解(总按后一行展开进行递推),得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 2 & & & \\ 1 & 0 & 3 & 3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{n+1}(n-1)!\ +nD_{n-1}\quad\text{(即为递推公式)}$$

$$=(-1)^{n+1}(n-1)!\ +n[(-1)^{(n-1)+1}(n-1-1)!\ +(n-1)D_{n-2}]$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{n!}{n}+(-1)^n\frac{n!}{n-1}+n(n-1)D_{n-2}$$

$$=\cdots$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{n!}{n}+(-1)^n\frac{n!}{n-1}+\cdots+(-1)^4\frac{n!}{3}+n(n-1)\cdots\cdot 3\cdot D_2.$$

将 $D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=(-1)^3\cdot 1+(-1)^2\cdot 2$ 代入上式,得到

$$D_n=(-1)^{n+1}\frac{n!}{n}+(-1)^n\frac{n!}{n-1}+\cdots+(-1)^4\frac{n!}{3}+(-1)^3\frac{n!}{2}+(-1)^2\frac{n!}{1}$$

$$=n!\ \cdot\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{(-1)^n}{n-1}+\cdots+\frac{(-1)^4}{3}+\frac{(-1)^3}{2}+\frac{(-1)^2}{1}\right]$$

$$=n!\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}.$$

*例 1.7 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$ $(b_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$.

解 采用加边法.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}\quad\text{(箭形行列式)}$$

$$
=\left|\begin{array}{c:cccc}
1+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
\hdashline
0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & b_n
\end{array}\right|
$$

$$
=b_1b_2\cdots b_n\left(1+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right).
$$

评注 由本题计算过程可以看出,加边的元素一般是 1 和 0,但仍要根据具体情况适当地选择与已知行列式有关的某些元素.另外,本题还可以采用下面方法计算:利用行列式的性质 4 将其写成两个行列式的和,然后递推法便可.

例 1.8 已知$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$只有非零解,求 λ.

解 $D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$,由克莱姆法则的推论可知,若系数行列式 $D\neq 0$,则齐次线性方程组只有零解,所以 $\lambda\neq -2,1$.

1.4 自 测 题

自 测 题 1

1. 排列 24315 的逆序数为(　　　),排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的逆序数为(　　　).

2. 如果排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 有 s 个逆序,则排列 $a_na_{n-1}\cdots a_1$ 的逆序数为(　　　).

3. $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$中 x^4 的系数为(　　　),x^3 的系数为(　　　).

4. $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5\\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0\\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0\\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=$(　　　).

5. 下列 n 阶行列式中,取值必为-1 的是(　　　).

A. $\begin{vmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix}1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 1 & & & 1\end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

6. 四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{24}$ 的项是(　　　　).

自 测 题 2

一、计算下列行列式

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$;　　2. $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 1 & -0.3 & 0.3 & -1 \\ 0.5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1.1 & 0.3 & 0 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \end{vmatrix}$;　　4. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

二、计算下列行列式

1. $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$;　2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;　3. $\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ y^2 & (y+1)^2 & (y+2)^2 & (y+3)^2 \\ z^2 & (z+1)^2 & (z+2)^2 & (z+3)^2 \\ w^2 & (w+1)^2 & (w+2)^2 & (w+3)^2 \end{vmatrix}$;

4. $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$;　　5. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$.

三、证明下列等式

1. $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$;

2. $\begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$；

4. $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(n)} = (a^2-1)a^{n-2}$.

自测题 3

1. 用克莱姆法则解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$.

2. 问 λ 取何值时，下列齐次线性方程组有非零解？

(1) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$.

自测题 4

一、完成下列各题

1. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$，则 $A_{12} - A_{22} + A_{32} = ($　　　$)$，$A_{11} - A_{21} + A_{31} = ($　　　$)$.

2. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = ($　　　$)$；$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = ($　　　$)$.

3. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} a_1+x & a_2+x & a_3+x & a_4+x \\ b_1+x & b_2+x & b_3+x & b_4+x \\ c_1+x & c_2+x & c_3+x & c_4+x \\ d_1+x & d_2+x & d_3+x & d_4+x \end{vmatrix}$ 的次数是(　　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 对于非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases},$$

下列说法不正确的是(　　　　).

A. 若方程组无解，则系数行列式 $D=0$

B. 若方程组有解，则系数行列式 $D\neq 0$

C. 若方程组有解，则或者有唯一解，或者有无穷多解

D. 系数行列式 $D\neq 0$ 是方程组有唯一解的充分必要条件

二、计算下列各行列式

1. $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$;

2. $D_n=\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$;

3. $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

4. $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & & & \\ a_2 & x & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ a_n & & & & x \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.