

维特根斯坦

数学哲学思想研究



A Study on
Wittgenstein's Philosophy of Mathematics

樊岳红 著



科学出版社

本书由教育部人文社会科学青年基金项目“后期维特根斯坦数学哲学之比较研究”
(15YJC720006)资助

维特根斯坦 数学哲学思想研究

樊岳红 著



A Study on
Wittgenstein's Philosophy of Mathematics

科学出版社

北京

图书在版编目 (CIP) 数据

维特根斯坦数学哲学思想研究 / 樊岳红著. —北京: 科学出版社,
2017.10

ISBN 978-7-03-054370-7

I. ①维… II. ①樊… III. ①维特根斯坦 (Wittgenstein, Ludwig
1889—1951) —数学哲学—哲学思想—研究 IV. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 215853 号

责任编辑: 邹 聪 孙 婷 / 责任校对: 何艳萍

责任印制: 张欣秀 / 封面设计: 有道文化

编辑部电话: 010-64035853

E-mail: houjunlin@mail.sciencep.com

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年10月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2017年10月第一次印刷 印张: 15

字数: 230 000

定价: 78.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

路德维希·维特根斯坦 (Ludwig Wittgenstein) 是 20 世纪公认的最伟大的哲学家之一。他生前出版的唯一著作是仅有两万字左右的《逻辑哲学论》。在他逝世之后，他的学生陆续将他的手稿、课堂笔记整理出版。这些文献成为 20 世纪以来最重要的哲学文献，其中就包括维特根斯坦的数学哲学著作《关于数学基础的评论》(*Remarks on the Foundations of Mathematics*)，也有学者译为《论数学的基础》或《数学基础研究》。令人困惑的是，如果我们关注当代数学哲学的研究，就会发现维特根斯坦的数学哲学思想处于学术研究的边缘，主流数学家和数学哲学家并没有真正重视维特根斯坦的批判性工作，似乎他们还消受不了这位可能过于另类的哲学家的思想。

维特根斯坦花了大半生的心血从事哲学研究工作，但他做的事情却是在消解哲学问题，甚至是要终结哲学。他本意是想消解哲学上的混乱，却提出了两种截然不同的理论体系，而且这两种哲学体系对当代哲学的发展都产生了深远的影响。他想终结哲学上的混沌与迷茫，结果却使众人陷入了更加困惑的哲学问题与争论之中。因此，解读维特根斯坦的思想，既存在着巨大的诱惑，又存在着巨大的困难。维特根斯坦的前后期思想都有一本标志性的著作，早期的代表著作是《逻辑哲学论》，而后期的代表著作是《哲学研究》。

追根溯源，维特根斯坦是在学习数学的过程中对哲学研究产生了兴趣，并且一发而不可收，他持之以恒地关注和研究数学哲学问题，尤其是

数学哲学的基础问题。然而，维特根斯坦的数学哲学思想，似乎与当时主流数学哲学的风格格格不入。在当时数学哲学鼎盛发展时期，人们更多的是在建构，而维特根斯坦的工作却是在解构传统的数学哲学思想。但他的这种解构并非没有意义，通过深入揭示和阐明维特根斯坦的数学思想，或许可以为研究维特根斯坦哲学提供一个新的视角，或者重新唤起人们对维特根斯坦数学哲学思想的关注。

西方学者对维特根斯坦数学哲学的态度通常分为两极，一些学者认为他的数学哲学没有什么价值，如格奥尔格·克赖泽尔（Georg Kreisel）在评论维特根斯坦的《关于数学基础的评论》一书时就说：“在我看来，这是思想火花中毫无意义的产品。”但也有一些学者持相反的意见，如迈克尔·瑞格利（Michael Wrigley）等认为，在当今关于维特根斯坦的前后期研究中，人们误解了他的数学哲学思想。实际上，维特根斯坦后期的数学哲学观对当今数学哲学界的实在论与反实在论之争有着推动作用。

不可否认的是，维特根斯坦的数学哲学在他所有的哲学作品中是影响力最低也最不被看重的。然而，在1929~1944年，维特根斯坦超过半数的著作都是在专门论述数学哲学思想，他本人曾强调其主要贡献是在数学哲学上。

马里恩（M. Marion）在《维特根斯坦、有穷论和数学基础》^①一书中强调，维特根斯坦的数学哲学思想一直以来就没有受到应有的重视。数学基础问题一直是维特根斯坦关注的核心问题之一，无论是早期的笔记和《逻辑哲学论》，还是后期的《关于数学基础的评论》和《哲学研究》，他都着力探讨了许多重要的数学基础问题，提出了一系列重要的观点。维特根斯坦几乎批判了所有有影响力的传统数学哲学思想，其中包括大名鼎鼎的柏拉图主义、经验主义、直觉主义、形式主义、约定主义及逻辑主义。这些评论从某种意义上来说有其合理之处。不过，应该看到维特根斯坦不是一位专业的数学家，在数学造诣方面不能与弗雷格（F. Frege）、布劳威尔（E. J. Brouwer）、希尔伯特（D. Hilbert）等著名数学家相提并论，他主要是一位对数学哲学怀有浓厚兴趣并对此提出卓越见解的哲学家，他对数

^① Marion M. Wittgenstein, *Finitism, and the Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1999.

学的逻辑主义、直觉主义和形式主义三大基础学派都提出了许多评论，但他并不是从数学的角度，而是从数学哲学的角度进行了相当有见识的评论。

事实上，数学的本性问题，特别是数学与逻辑的关系、数学与世界的关系问题，是维特根斯坦一生所关心的核心问题之一。在维特根斯坦所留下的两万多页手稿中，有至少 1/3 的内容均与此问题有关。在《战时笔记》和《逻辑哲学论》等前期著述中，他深入地反思和批评了弗雷格和伯特兰·罗素 (Bertrand Russell) 的思想，并提出了自己的理解。到了 1932 年，他写下了大量的评论，其中一些收录在《大打字稿》中，在 1937~1938 年，他又集中精力写出了大量有关数学本质的评论，收录在《哲学研究》第二部分中。

本书的基本框架是在对维特根斯坦的数学哲学与逻辑主义、直觉主义、形式主义、数学柏拉图主义等学派的观点进行比较分析的基础上，进一步阐述维特根斯坦的早、中、后期的数学哲学思想。具体的章节安排为：第一章“绪论”，分五个小节进行基础性知识的介绍；第二章“维特根斯坦的批判与继承”，把维特根斯坦的数学哲学思想与逻辑主义、直觉主义、形式主义、柏拉图主义、建构主义及哥德尔定理等理论观点进行了比较研究；第三章“早期维特根斯坦的数学哲学思想”，在早期，他赞同逻辑原子主义，主张数学命题的意义在于证实；第四章“中期维特根斯坦的数学哲学思想”，中期兼具他早期和后期的部分观点，这一时期他提倡数学哲学的有限论原则；第五章“后期维特根斯坦的数学哲学思想”，在后期，他主张数学是基于人们生活形式的一种实践活动；第六章主要阐述了维特根斯坦数学哲学的影响及意义。

樊岳红

2017年8月5日

目 录

前言	i
第一章 绪论	001
第一节 数与数学哲学	003
第二节 20 世纪的数学实在论与反实在论观	008
第三节 数学知识的先验性	011
第四节 数学的性质、对象和任务	014
第五节 维特根斯坦的数学哲学及其来源	017
第二章 维特根斯坦的批判与继承	020
第一节 集合论悖论所引发的数学基础危机	021
第二节 维特根斯坦对数学逻辑主义的批判与继承	024
第三节 维特根斯坦对数学直觉主义的批判与继承	033
第四节 维特根斯坦对数学形式主义的批判与继承	043
第五节 维特根斯坦对数学柏拉图主义的批判与继承	050
第六节 维特根斯坦对数学建构论的影响	054
第七节 维特根斯坦对哥德尔不完备性定理的评论	060
第八节 结语	063

第三章 早期维特根斯坦的数学哲学思想	065
第一节 《逻辑哲学论》：命题的意义在于证实	066
第二节 《逻辑哲学论》：数学等式	069
第三节 《逻辑哲学论》：逻辑运算	075
第四节 《逻辑哲学论》：矛盾式与重言式	086
第五节 《逻辑哲学论》：数学的基础问题	096
第六节 结语	103
第四章 中期维特根斯坦的数学哲学思想	105
第一节 中期维特根斯坦的强形式主义	108
第二节 中期维特根斯坦论算法的可判定性	111
第三节 中期维特根斯坦论数学归纳	114
第四节 中期维特根斯坦论无理数及集合论	118
第五节 中期维特根斯坦论数学基础主义	124
第五章 后期维特根斯坦的数学哲学思想	154
第一节 后期维特根斯坦论数学的基本性质	157
第二节 后期维特根斯坦论哥德尔定理	166
第三节 后期维特根斯坦论数学证明与数学真理的客观性	202
第六章 维特根斯坦数学哲学的影响及意义	219

第一章 绪 论

在人类全部的科学活动中，数学拥有一种独特的地位，被公认为是最具逻辑严密性的科学。事实上，在大多数领域的科学研究中，数学都发挥着重要的作用。德国伟大的数学家高斯（C. F. Gauss）认为，数学是科学的皇后。然而，数学研究的主题与其他科学分支并不相同，数学似乎只是研究数学实体，如数字、集合、函数及它们之间的结构关系。如果有数学实体这样的事物的话，那么数学实体是非常独特的。它们是抽象的，并不处在时空之中，也没有因果能力。同时，数学科学的研究方法显然不同于其他学科，它似乎是通过演绎证明这种先验方法，而不是使用实验和归纳等后验方法。从表面上看，数学是不可以修改的，一旦数学定理被证明，它将永远为真。“数学是科学之王。而数学哲学是哲学的分支，被用来阐释和理解这个科学之王。用哲学来揭示数学是什么。”^①在具体阐明维特根斯坦数学哲学思想之前，有必要简要回顾一下数学哲学和数学之间的关系。

数学哲学是哲学研究的一个领域，它研究数学的哲学问题，特别是数学基础问题、数学悖论、数学证明问题、数学本体论问题，以及数学真理论

^① Colyvan M. An Introduction to the Philosophy of Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2012: 1-2.

问题，等等。早在古希腊时期，柏拉图（Plato）、亚里士多德（Aristotle）等哲学家就已经开始研究数学哲学，柏拉图认为数学哲学研究的对象是一个永恒不变的概念王国。但直到19世纪中叶，数学哲学才作为一门独立的学科被建立起来。其后非欧几何学的建立、各种数学悖论的相继提出、数学逻辑的创立，使得数学科学在形式化和抽象化方面不断开疆辟土，得到了迅速发展。对数学基础问题研究的日益深入，也有力地推动了数学哲学的发展，使之成为哲学研究的一个重要领域。

20世纪上半叶是数学哲学发展的黄金时代，这一黄金时代发端于罗素。罗素证明了数学基本理论中的集合论是不自洽的，导致了数学基础的危机。随后，为了解决这一危机引发了数学哲学界一系列的激烈争论，后续争论中主要有哲学家拉姆齐（Frank P. Ramsey）、维特根斯坦、弗雷格、胡塞尔（Edmund Husserl）、皮尔斯（Charles Sanders Peirce）、罗素及怀特海（Alfred North Whitehead）等。一些主要的数学家也参与了其中的讨论，包括波尔查诺（Bernard Bolzano）、外尔（Hermann Weyl）、庞加莱（Henri Poincaré）、哥德尔（Kurt Gödel）、希尔伯特、布劳威尔和塔斯基（Alfred Tarski）等。毫无疑问，这是数学哲学发展历史上真正的重要时期。

数学哲学在经历了19世纪末到20世纪初大约半个世纪的黄金时代之后，随着三大流派主要目标和主要思想的旁落，数学哲学的基本理论、立场和观点呈现出多样化、多视角、散射性和差异性等特点。美国哲学家罗蒂（R. Rorty）把海德格尔（M. Heidegger）、杜威（J. Dewey）和后期维特根斯坦看作后现代主义哲学的起源。目前，对数学真理的重新认识与定位，将成为新的数学哲学理论体系的认识论基础。以现代性为基调的各种数学真理观都有一个共同特点，那就是对存在绝对的、唯一的、永恒的、不变的、自洽的和封闭的数学真理及其判定的信仰发生了改变。传统观点认为数学是绝对的、永恒的和不变的真理。而今对数学真理的信念是数学中不存在绝对真理，数学有多元化的理论建构，数学真理和证明是开放性的，数学具有实践性^①。

① 黄秦安. 数学哲学新论：超越现代性的发展. 北京：商务印书馆，2013：5.

第一节 数与数学哲学

数学作为一种文化系统能陶冶人的美感，提高理性的审美能力，正是这种能力成为人们探索宇宙奥妙和揭示其规律的重要手段。数学基础是一个非常古老的问题，自古希腊以来，数学家们就一直在为数学寻找一个坚实的基础。数学是人类思维的重要表达形式，它以高度的抽象化和严密的逻辑推理著称，标志着人类认识世界的水平。数学是科学的皇后，离开了数学，自然科学就是不结果实的花，信度和效度都将遭遇严重质疑。然而一直以来，作为数学中基础问题的实在论与反实在论之间的争论不绝于耳，历久弥新，直接关系到数学是否具有客观性、确定性和真理性。

传统认为，数学完全是一个纯粹理性的事业。但如果数学只是一个心智的发明物，为什么数学在实践上会有效？如果它被化归为纯粹的逻辑关系，那么从某种意义上来说，数学不过是建立在同义反复的无足轻重的事情之上。近代英国哲学家、经济学家和逻辑学家密尔（John Stuart Mill）指出：“所有的科学，包括逻辑和数学在内，都是有关时代的函数——所有科学连同它的理想和成就统统都是如此。很难给数学下一个一劳永逸的定义，因为人们所处的数学发展的历史阶段不同，有着不同的文化背景、知识范式和视角，对于数学的理解也就不尽相同。”^①

什么是数？罗素认为，“在进行数的定义时，首先须将我们研究的第一步辨析明白。许多哲学尝试作出数的定义，实际上却去定义为许多事物所形成的复合，这是件完成不相干的事”^②。譬如，一组3个人是3的实例，3绝不同于张三、李四和王五组成的3个人的组合。“我们可以继续定义一般的数为：由于相似关系而集合在一起的任一类；第二种是彼此相似而集合在一起的任一类。或者更为简单的：所谓的数就是某一个类

① 林世芳. 20世纪数学三大学派之争与数学思想的进步. 北京：社会科学文献出版社，2015：1.

② 罗素. 数学哲学导论. 晏成书译. 北京：商务印书馆，1982：16.

的数。”^①

数学是研究事物的量及其具体关系的规则；而数学哲学是研究数学发生、发展的一般规律；哲学则是研究自然、社会和思维的普遍规律。数学哲学作为数学与哲学的交叉学科，它处于数学与哲学的中间位置。数学哲学研究数学的对象、性质和方法的本体论、认识论和方法论问题，从总体上把握数学发生、发展的一般规律。所以，“哲学、数学哲学和数学三者之间的关系是普遍、一般和特殊的关系。因此，数学就是数学哲学研究的基础和根据。从这个意义上来说，没有数学就没有数学哲学，或者说，没有数学的数学哲学是空洞的说教”^②。

数学哲学作为一门独立的学科，直到 19 世纪中叶才真正建立起来。不少数学哲学的著作花费大量篇幅给数下定义，希望回答“什么是数”这个问题。由于数学始终在发展，再加上各种流派、研究方向的不同，各个时期的数学家所给出的答案都不一样。谈及数学哲学，言必及古希腊数学哲学观。古希腊数学哲学观可以粗略地分为毕达哥拉斯-柏拉图数学哲学观及亚里士多德数学哲学观。在古希腊数学范式的形成过程中，毕达哥拉斯（Pythagoras）学派起着极其重要的作用，因为他们最早提出了数学哲学思想。毕达哥拉斯学派首先把数作为抽象的对象加以研究，毕达哥拉斯本人在寻找万物的本质时提出了数本原说：数不是某种物质形态，数是永远感觉不到的。如果有人伸出 5 个手指头说：这不是 5 吗？拿出 6 支笔说：这不是 6 吗？那么这些数字只是我们抽象出来的符号，是表征 5 的符号，它并不是 5 本身。万事万物都有数量关系，但是要从万事万物的关系中抽象出 1、2、3、4、5…这些数字是需要很长时间的。当人们能从众多的事物中抽象出不同的数的时候，这就是思想的飞跃了。数量是通过抽象思维把握的，各种自然物质都具有数量关系，这个数量关系只能在思维中才能把握。因此，“万物皆数”实际上是一种数学实在论观。毕达哥拉斯学派这种“万物皆数”的观点对后世的数学哲学思想产生了深远的影响。

古希腊的数学哲学观被毕达哥拉斯以一种抽象的语言表达为数学的理

① 罗素. 数学哲学导论. 晏成书译. 北京: 商务印书馆, 1982: 23.

② 林夏水. 数学哲学. 北京: 商务印书馆, 2003: 15.

念。继毕达哥拉斯之后，在古希腊数学哲学观的形成过程中，发挥重要作用的人物是柏拉图。柏拉图进一步把数的抽象性加以深化，把数学作为一种完美的、理想的、绝对的、先验的知识和真理。柏拉图认为，数学研究的对象是抽象的，但却是客观存在的，而且它们不依赖于时间、空间和人的思维而永恒存在。数学家提出的概念不是创造，而是对这种客观存在的描述。

亚里士多德虽然是柏拉图的学生，也从柏拉图那里继承了许多观点，但他对现实世界与数学之间关系的探究却有着不同的看法。亚里士多德认为，真正的知识是从感性的经验中通过直观和抽象而获得的，这种抽象是不能独立于人的思维而存在的。他认为数并非属于理念世界，而是来自现实世界，他在对学科进行分类时，认为数学是理论科学。

唯名论哲学思想产生于中世纪，唯名论中比较极端的观点是认为数只不过是符号，是一种名称，甚至是一种空气的波动。这一观点的主要代表人物是洛色林（Roscelinus）。唯名论者认为客观存在的事物只有具体个别的事物，即这匹马、那棵树、张三、李四等，而抽象出来的共相概念只不过是一个记号或标记而已。

在中世纪，英国实验科学的先驱罗杰·培根（Roger Bacon）对数学的理解是矛盾的。一方面，他认为对数学真理的理解是天赋的；另一方面，他认为数学对象是由感觉的复合产生的，数学的证明总得有与它相对应的经验。

到了近代，伴随着科学革命的步伐，数学的价值得到重新确认。美国数学史家克莱因（M. Kline）指出，在当时“数学是唯一被大家公认的真理体系。数学知识是确定无疑的，它给人们在沼泽地上提供了一个稳当的立足点；人们又把寻求真理的努力引向了数学”^①。这促使数学研究获得了重大发展，也促使人们开始重新进行数的本性的思考。法国哲学家、数学家笛卡儿（Rene Descartes）认为数学是一门理性演绎科学，是研究顺序和度量的学科；德国哲学家、数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz）认为数学知识是先验的和必然的知识^②。

① M. 克莱因. 古今数学思想（第一册）. 张理京，等译. 上海：上海科学技术出版社，1979：251.

② 林世芳. 20世纪数学三大学派之争与数学思想的进步. 北京：社会科学文献出版社，2015：2.

之后，康德（Immanuel Kant）的数学哲学思想认为，人如何才能掌握数学知识呢？从最根本来说，数学知识都是先天综合判断。首先数是独立于感觉经验的，因此数是先天的；其次数不能由概念分析得来，因此它又是综合的，要认知数学命题，就必须运用感性的两种先天直观形式，即时间和空间。因为数是一个接一个出现的，有先后顺序。而空间概念是关于事物形状的基本经验。因此，康德认为，数是人为经验总结创造出来的，人也要靠自己的先天直观形式才能把握数学知识。

到了19世纪末20世纪初，集合论悖论的出现引发了数学基础的第三次危机，人们又开始了对数的本性的重新思考。1890~1940年的这50年，可以被看成数学哲学发展的黄金时期。在这一时期，弗雷格、罗素、布劳威尔和希尔伯特等围绕数学基础问题进行了系统和深入的研究，并产生了逻辑主义、直觉主义和形式主义等具有广泛和深远影响的数学学派，从而为数学哲学的研究开拓了一个崭新的时代，其影响远远地超出了数学范围。特别是，基础主义的数学哲学曾对维也纳学派的科学哲学研究产生了十分重要的影响，而后者曾在科学哲学的领域长期占据着主导地位^①。

罗素认为数学是逻辑的延展，因此他把数学定义为我们不知道它说的是什么，也不知道其为真还是为假。直觉主义者认为数学独立于物质世界，它是纯粹心灵直觉的产物。“形式主义者则把数学归结为某种形式符号，一种抽去具体内容的符号系统，数学的真理性就在于符号系统中的无矛盾性。”^②这三大数学派都不同程度地影响了维特根斯坦的数学哲学观。

一般而言，数学哲学研究可分为本体论（ontology）问题和认识论（epistemology）问题。数学的研究对象是什么，一般是指本体论问题。数学对象与科学对象之间的关系或者说我们如何能研究和认识数学，这些是认识论问题。而在弗雷格之后兴起的英美分析哲学产生了所谓的语言哲学转向，把之前的本体论和认识论问题也归之于语言问题来解释，认

① 郑毓信. 科学哲学对于数学哲学现代发展的重要影响——兼论数学哲学中的革命. 南京大学学报（哲学·人文·社会科学），1999，（1）：83-89.

② 林世芳. 20世纪数学三大学派之争与数学思想的进步. 北京：社会科学文献出版社，2015：3.

为以前把语言当成一种工具，而现代哲学问题最终都是用语言或概念来表达的，哲学的混乱也是由语言的不明确所造成的。数学哲学研究数学的本体论、认识论与意义问题，同时也包括一些其他的相关问题，如数学证明的客观性问题、数学知识的真理性问题、数学公理或证明的先天性等问题等。

数学哲学主要是指基础主义的数学哲学。所谓数学的经验性，就其原始的意义而言，即是对数学与其他自然科学相似性（similarity）的确认。这一认识事实上构成了新方向上所有工作的共同出发点。关于数学经验性的断言显然正是对传统观念的直接否定，即数学知识不应被看成无可怀疑的绝对真理，数学的发展也并非数学真理在数量上的简单积累。事实上，人们曾从各种不同的角度对数学与自然科学的相似性进行了论证。如果说数学与其他自然科学一样，最终都应被看成人类的一种创造性活动，并构成了整个人类文化的一个有机组成部分，那么，数学的发展无疑就是一个包含有猜想与反驳、错误与尝试的复杂过程，而且数学的内涵与改变最终是由我们的实际利益与其他科学的认识论目标所决定的^①。

在《维特根斯坦与维也纳学派》中，维特根斯坦也讨论了“什么是数”。他认为，定义是路标，它们指明了通向证实的途径。定义解释了符号在命题中的使用，也解释了命题的意义。定义是一种转换规则，它说明怎样从一个命题转换为其他命题。说明一个数就是去说明多少，而不是说明等量。我们所具有的是一条关于建构一系列记号的法则，而且正是这个法则，使得我们能从对一个数的符号的说明中得出所有其前面数的符号，使我们能重建整个系列。“数是一种形式，数的表达是一幅图画，它出现在命题中。数学的东西在哪里都是相同的，描绘数的方法就是描画法，数在记号中显示自身。去定义一个数可能意味着两种不同的东西。如果认为，去定义5，粗略地说来就是去说明一个关于多个类的类，那么回答肯定是：在这种意义上，5是不可定义的。但是，如果根据一个定义，算术的定义， $5 = 3 + 2$ 。同时， $3 = 2 + 1$ ， $2 = 1 + 1$ ，那么5当然也是可以

^① 郑毓信. 科学哲学对于数学哲学现代发展的重要影响——兼论数学哲学中的革命. 南京大学学报（哲学·人文·社会科学），1999，（1）：83-89.

义的。数词是一种与概念完全不同的记号表示法。”^①

德国著名的数学家柯朗（R. Courant）指出，“数学哲学是作为人类智慧的一种结晶，反映了人们的意念与思考”^②。拉卡托斯（I. Lakatos）认为，“数学哲学是来自经验的，对数学本性的理解离不开对经验和实践的理解”^③。

第二节 20 世纪的数学实在论与反实在论观

一般而言，数学的本体论问题是研究数学对象是否独立于我们的抽象思维而实际存在，如果它是独立存在的，那么它是否独立于我们的思维和语言而存在呢？对大多数人来说，数学理论或数学定理似乎描述了一个独立于我们思想而存在的客观的数学世界。这个客观的数学世界就如同我们所描述的“力”“磁场”“电子”“原子”等概念一样，是独立于我们思想而存在着的，这种观点被称为“朴素数学实在论”。一般而言，赞同“朴素数学实在论”的人，相信数学理论描述了一个独立于我们物质世界和我们思想领域的数学世界^④。

那果真存在这么一个独立于物质世界的抽象数学世界吗？如何相信有这样一个数学世界存在呢？如果它真的存在的话，那么人类有限的大脑如何来认识那个抽象的、非物质的数呢？如果这个抽象的数学世界并非真的存在，而只是我们思想的抽象物或只是我们思想的建构物的话，那么所谓的数学公理或定理还是客观的吗？

一般而言，人们普遍认为数学真理是可靠的、客观的，如果这些知识不是客观的话，那么数学又是什么呢？这是传统的数学哲学问题。换言之，数学世界是否独立实存着？我们的数学知识何以可能？这是自毕达哥

① 维特根斯坦. 维特根斯坦与维也纳学派. 徐为民, 孙善春译. 北京: 商务印书馆, 2014: 2.

② 柯朗, 罗宾斯. 数学是什么. 汪浩, 朱煜民译. 长沙: 湖南教育出版社, 1985: 1.

③ 拉卡托斯. 数学、科学和认识论. 林夏水译. 北京: 商务印书馆, 2010.

④ 叶峰. 二十世纪数学哲学: 一个自然主义者的评述. 北京: 北京大学出版社, 2010: 3.

拉斯、柏拉图、康德以来，过去数学哲学家们孜孜以求而试图回答的问题。

对数的本质的研究和对数学对象本质的研究，促进了数学基础和数学哲学的大发展。但对“什么是数”这个问题、对“数学的真理意味着什么”这个问题，依然没有一致的回答。进入 20 世纪中叶以来，逻辑主义、直觉主义、形式主义之间的争论渐渐平息。数学家们发现，无论哪一派的主张，都不可能令人满意地、一劳永逸地解决数学基础的问题。不同观点的数学家沿着自己选定的道路前进，发现大家不约而同地到达了同一个地方：数学研究的对象是一些关系与形式，这些关系与形式可以用有限符号来表达，又能包含着无限丰富的内容。因为“丰富的数学内容无法简单地成为逻辑，也不能仅将其视为人的直觉的创造物，它的正确性更不可能用符号的扮演来最终证明”^①。

在各种数学哲学流派试图回答的数学哲学问题之中，本体论问题是最为重要的。围绕着这一问题，我们可以对 20 世纪种种不同的数学哲学观点进行分类。断言抽象数学对象存在而且独立于我们的思想理论属于数学实在论 (mathematical realism)，又称为数学柏拉图主义 (mathematical platonism)。其典型代表包括以弗雷格为代表的逻辑主义实在论者、以哥德尔为代表的柏拉图主义或概念实在论者、以奎因 (W. Quine) 为代表的实用主义实在论者等。而认为数学对象并非是独立于我们的思想而存在的理论，被称为数学的反实在论 (mathematical anti-realism)，又称作数学唯名论 (mathematical nominalism)。其典型代表包括以希尔伯特为代表的形式主义者等。也有哲学家承认数学对象的存在不能独立于人们的思想而独立存在，这种观点与柏拉图主义和唯名论又有所区别。这种观点的典型代表有布劳威尔的直觉主义。有学者认为数学对象是依我们的语言约定而存在的，如卡尔纳普 (P. Carnap) 的逻辑实证主义。这种观点既承认数学对象存在，但又回避承认数学对象独立于我们思想 (及语言) 的客观实在性。总之，“实在论承认数学对象独立于我们的思想而存在，反实在论则认为数学对象不存在或不独立于我们的思想存在，唯名论则断言数学对象

^① 张景中，彭翕成. 数学哲学. 北京：北京师范大学出版社，2014：91.