普通高等教育

教育“十三五”规划教材

# 概率论与数理统计

Probability and Statistics

徐军京◎编著

中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

五”规划教材

# 概率论与数理统计

徐军京 编著



電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

## 内 容 简 介

本书是作者结合多年来为理工类、经济类、管理类本科学生讲授“概率论与数理统计”课程所积累的教学经验编写而成。全书共 9 章，内容包括随机事件及概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本与抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析等。

本书内容详细，通俗易懂，图形直观，富有启发性，可作为高等院校相关专业教材。



**图书在版编目（CIP）数据**

概率论与数理统计 / 徐军京编著．—北京：电子工业出版社，2017.6
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-121-32624-0

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①徐…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 214591 号

责任编辑：杨秋奎
印　　刷：三河市良远印务有限公司
装　　订：三河市良远印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：17　字数：383 千字
版　　次：2017 年 6 月第 1 版
印　　次：2017 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：45.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254694。

# 前 言

“概率论与数理统计”是研究随机现象统计规律的一门数学课程，其理论及方法成为许多自然科学学科、社会与经济科学学科、管理学科重要的理论工具。由于其具有很强的应用性，特别是随着统计应用软件的普及和完善，因此其应用面几乎涵盖了自然科学和社会科学的所有领域。

为适合我国高等教育发展的新形势，培养应用型人才，作者本着学用结合的原则，克服“大而全”的现象，汲取当前教材改革中的一些成功举措，结合长年讲授该课程的教学实践经验编写了本教材。

本书针对普通高等院校学生的学习能力、理解程度，按照教学大纲的要求编写而成，以教学基本要求为准，又适当增加了部分内容的深度和广度。这门课程对于初学者有一定的困难，所以教材的编写内容叙述较详细，通俗易懂，使认知层次分布合理，便于读者掌握基础知识。配合图形直观，富有启发性，使读者理解内容更加形象。例题和习题力求题型齐全、覆盖面广，更好地培养读者分析问题、解决问题的能力。例题特别注重从教学内容的正、反两个方面选取，以便培养读者辩证的逻辑思维能力。每章都配置了足够数量的习题，供读者练习，习题的参考答案可以登录华信教育资源网下载。本书尽可能用引例引入概念，使读者易于接受内容的过渡，注重对读者基础知识的训练和数学思想、综合能力的培养。

本书对课程学习过程中可能遇到的疑难点进行了细致深入的分析，解决易混淆和易忽略的问题，相信本书一定能使读者茅塞顿开、举一反三。

本书的出版得到了北京市教委专项（项目号：PXM2017-014224-000028）资助，在此表示衷心地感谢。

由于作者水平所限，书中不妥之处，恳请广大读者批评指正！

作者　徐军京

2017 年 4 月

# 目　录

# 第1章 随机事件及概率

自然现象与社会现象千差万别，但从概率论的观点考查可以分为两大类。一类有明确的因果关系，即在一定的条件下必然发生或不发生的现象，称为确定现象。例如，太阳从东边升起，从西边落下；水从高处流向低处；同性的电荷必然相互排斥……另一类称为随机现象，它的因果关系不明显，或根本没有什么因果关系，即在一定的条件下可能发生，也可能不发生的现象。例如，在相同条件下掷一枚均匀的硬币，观察其正反两面出现的情况，结果有可能出现正面也可能出现反面；远距离射击一个目标，可能击中，也可能不中；抛掷一枚骰子，观察出现的点数……

随机现象有两个特点：（1）在一次观察中，现象可能发生，也可能不发生，即结果呈现不确定性；（2）在大量重复观察中，其结果具有统计规律性。例如，多次重复投掷一枚硬币，就会发现出现正面与反面的次数几乎各占一半。概率论与数理统计是以随机现象为研究对象，研究和探索客观世界随机现象规律的数学学科，它的应用几乎遍及所有的科学领域，在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、医学、地质学、气象与自然灾害预报等各领域都起到非常重要的作用。近些年来，随着计算机科学的迅速发展，大批功能强大的统计软件和数学软件涌现出来，经典理论和现代信息技术的结合为这门学科注入了新的活力，使其在自然科学和社会科学的各个领域得到了更加广泛的应用。

## 1.1 随机事件

### 一、随机试验

研究随机现象，是通过随机试验来研究的。随机试验简称为试验，是一个广泛的术语。它包括各种各样的科学实验，也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”或“测量”等。

下面举一些试验的例子：

例 1.1 $E_1$：抛掷一枚硬币，观察正面H，反面T出现的情况。

$E_2$：抛掷一枚骰子，观察出现的点数。

$E_3$：从一批产品中，任选三件，记录出现正品与次品的情况。

$E_4$：记录 110 报警台一天收到的报警次数。

$E_5$：在一批灯泡中任意抽取一个，测试它的寿命。

$E_6$：在区间[0，1]上任取一点，记录它的坐标。

上面举出试验的六个例子，它们有着共同的特点：

（1）可以在相同的条件下重复进行；

（2）每次试验可能的结果不止一个，并且能事先明确试验所有可能的结果；

（3）进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

如果一个试验满足上述三个条件，则称这一试验为随机试验，随机试验通常用 $E$ 来表示。

## 二、样本空间

要研究一个随机试验，首先要搞清楚这个试验所有可能的结果。每一个可能出现的结果称为样本点，记作 $\omega$。全体样本点组成的集合称为样本空间，记作 $\Omega$。换句话说，样本空间是试验的所有可能结果所组成的集合，这个集合中的元素就是样本点。

例 1.2　写出例 1.1 中各随机试验的样本空间：

$E_1$：$\Omega=\{H,T\}$；

$E_2$：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$E_3$：记 $N\to$ 正品，$D\to$ 次品

$\Omega=\{NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DDN, DND, DDD\}$；

$E_4$：$\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

$E_5$：$\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

$E_6$：$\Omega=\{t\mid t\in[0,1]\}$。

样本空间的元素可以是数，也可以不是数，样本空间所含的样本点可以是有限个也可以是无限多个。另外，样本点应是随机试验最基本并且不可再分的结果。

## 三、随机事件

我们通过随机试验来研究随机现象时，不仅关心某一个样本点在试验后是否出现，而且关心满足某些条件的样本点在试验后是否出现。例如，在 $E_2$ 中抛掷一枚骰子，观察出现的点数。“点数不大于 4”或“点数为偶数”等都为满足一定条件的样本点组成了样本空间的一个子集。我们称一个随机试验的样本空间的子集为随机事件，简称事件。随机事件通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。在试验后，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生；否则，就称事件不发生。在 $E_2$ 中，设 $A$ 表示“点数为偶数”。如果试验的结果 2 点出现，我们便认为事件 $A$ 发生。

仅含一个样本点的随机事件称为基本事件。例如，试验 $E_1$ 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$；试验 $E_2$ 有六个基本事件 $\{1\},\{2\},\{3\},\cdots\{6\}$；在 $E_4$ 与 $E_5$ 中有无穷多个基本事件。

样本空间 $\Omega$ 是其自身的一个子集，因而也是一个事件。由于样本空间 $\Omega$ 包含所有的样本点，因此每次试验后必定有 $\Omega$ 中的一个样本点出现，即 $\Omega$ 必然发生。我们称 $\Omega$ 为必然事件。空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，$\varnothing$ 称为不可能事件。

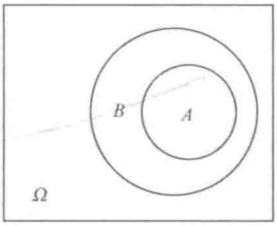
## 四、事件间的关系与事件的运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系与运算来处理。下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的含义，给出它们的概率意义。

设试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega$，而 $A$，$B$，$A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 $\Omega$ 的子集。

### 1. 事件的包含与相等

设 $A$，$B$ 为两个事件，若事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $B$ 包含事件 $A$，或称事件 $A$ 包含于事件 $B$ 中，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$，如图 1-1 所示。




$A\subset B$

图 1-1

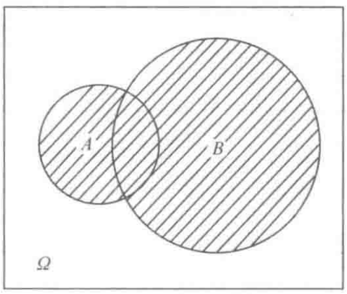
若 $B\supset A$ 且 $A\supset B$，即 $A=B$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等。

例如，在试验 $E_2$ 中，$A$ 表示“出现 2 点”，$B$ 表示“出现偶数点”，则 $A\subset B$。

### 2. 事件 $A$ 与 $B$ 的并(和事件)

事件 $A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\}$ 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的和事件。

当且仅当 $A$，$B$ 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生，如图 1-2 所示。




$A\cup B$

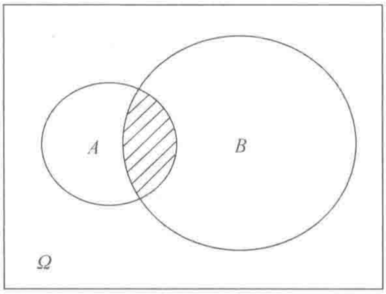
图 1-2

推广：称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件；称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件。

### 3. 事件 $A$ 与 $B$ 的交（积事件）

事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$ 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的积事件。

当且仅当 $A$，$B$ 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生。$A \cap B$ 也记作 $AB$，如图 1-3 所示。



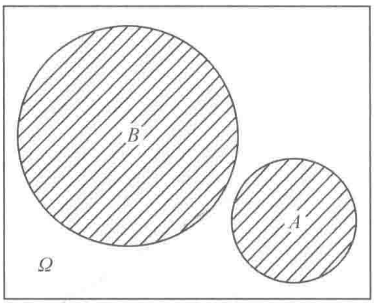

$A \cap B$

图 1-3

推广：称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件；称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件。

### 4. 事件 $A$ 与 $B$ 互不相容（互斥）

若事件 $A$ 的发生必然导致事件 $B$ 不发生，$B$ 发生也必然导致 $A$ 不发生，则称事件 $A$ 与 $B$ 互不相容，或称 $A$ 与 $B$ 互斥。$A \cap B = AB = \varnothing$，如图 1-4 所示。



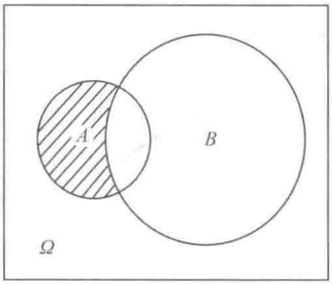

$A \cap B = \varnothing$

图 1-4

例如，在试验 $E_2$ 中，$A$ 表示“点数为 3”，$B$ 表示“出现偶数点”，则事件 $A$ 与 $B$ 互斥。

### 5. 事件 $A$ 与 $B$ 的差

由事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生所组成的事件称为事件 $A$ 与 $B$ 的差，记作 $A-B$，如图 1-5 所示。




$A-B$

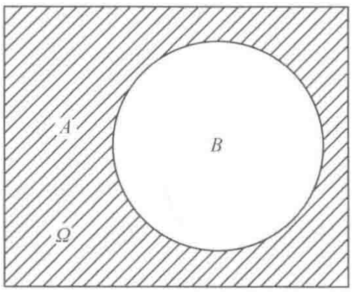
图 1-5

### 6. 事件 $A$ 的对立事件

设 $A$ 表示“事件 $A$ 发生”，则“事件 $A$ 不发生”称为事件 $A$ 的对立事件或逆事件，记作 $\overline{A}$。

若 $A$ 与 $B$ 互逆，则有 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，如图 1-6 所示。

例如，在试验 $E_2$ 中，$A$ 表示“出现奇数点”，$B$ 表示“出现偶数点”，则事件 $A$ 与 $B$ 为对立事件。




$A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$

图 1-6

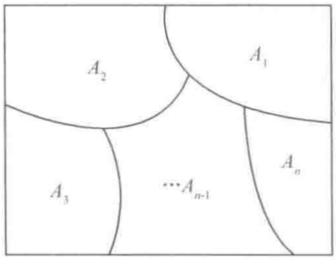
### 7. 互不相容的完备事件组

设有 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其满足：

（1）$A_iA_j=\varnothing\left(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n\right)$。

（2）$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$。

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成互不相容的完备事件组（见图 1-7）。




$$A_iA_j=\varnothing\left(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n\right)\text{ 且 }\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$$

图 1-7

设 $A,B,C$ 为事件，在进行事件运算时，用到下述运算规律：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(AB)C=A(BC)$

（3）分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=AC\cup BC$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cup C)(B\cup C)$

（4）德·摩根定律（对偶律）：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

例 1.3　设 $A$，$B$，$C$ 表示三个随机事件，试将下列事件，用 $A$，$B$，$C$ 表示出来。

（1）仅 $A$ 出现；

（2）三个事件都出现；

（3）三个事件都不出现；

（4）三个事件不都出现；

（5）三个事件至少有一个出现；

（6）不多于一个事件出现；

（7）$A$，$B$，$C$ 中恰好有两个出现。

解　（1）$A\overline{B}\,\overline{C}$；

（2）$ABC$；

（3）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

（4）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$，或 $\overline{ABC}$；

（5）$A\cup B\cup C$；

（6）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

（7）$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$ 。

例 1.4　设一个工人生产了四个零件，$A_i$ 表示他生产的第 $i$ 个零件是正品 $(i=1,2,3,4)$，用 $A_i$ 表示下列各事件，试说明下列事件所表示的试验结果：

（1）$A_1 A_2 A_3 A_4$;

（2）$\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}$;

（3）$\overline{A_1} A_2 A_3 A_4 \cup A_1 \overline{A_2} A_3 A_4 \cup A_1 A_2 \overline{A_3} A_4 \cup A_1 A_2 A_3 \overline{A_4}$;

（4）$\overline{A_1} A_2 A_3 A_4 \cup A_1 \overline{A_2} A_3 A_4 \cup A_1 A_2 \overline{A_3} A_4 \cup A_1 A_2 A_3 \overline{A_4} \cup A_1 A_2 A_3 A_4$;

（5）$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} A_4 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 \overline{A_4} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4} \cup A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}$ 。

解　（1）没有一个是次品；

（2）至少有一个是次品；

（3）只有一个是次品；

（4）至少有三个不是次品；

（5）恰好有三个是次品。

# 1.2　概　　率

## 一、频率的定义与性质

### 1. 定义

定义 1.1　在相同的条件下，进行了 $n$ 次试验，在这 $n$ 次试验中，事件 $A$ 发生的次数 $n_A$ 称为事件 $A$ 发生的频数。比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 $A$ 发生的频率，并记成 $f_n(A)$ 。

### 2. 性质

（1）非负性：$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$ ;

（2）规范性：$f(\Omega) = 1$ ;

（3）可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

历史上有很多人做过抛硬币的试验，其结果见下表。

| 试验者 | $n$ | $n_A$ | $f_n(A)$ |
| --- | --- | --- | --- |
| 德・摩根 | 2048 | 1061 | 0.5181 |
| 蒲丰 | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| K• 皮尔逊 | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| K• 皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |

从表中的数据可看出：出现正面的频率逐渐稳定在 0.5 ，这一稳定值可以作为事件 $A$ “出现正面”的概率。

通过频率稳定值去描述事件的概率有它的缺点，因为在现实世界中，人们无法把一个试验无限次重复下去，所以要精确获得频率的稳定值是困难的。但频率的稳定性却提供了概率的一个可供猜想的具体值，并且在试验重复次数 $n$ 很大时，可用频率给出概率的一个近似值。

从上述数据可得结论：当 $n$ 逐渐增大时，频率趋于稳定值，这个稳定值从本质上反映了事件在试验中出现的可能性大小，它就是事件的概率。

## 二、概率的定义与性质

事件的频率在一定程度上能反映事件出现的概率：一方面，频率的稳定性说明事件出现的可能性是可以用数值度量的，并且在试验次数充分大的情形下，提供了用频率估计概率的可靠依据；另一方面，由频率的基本性质，提出了对概率这种度量的基本要求。但是所有这一切只是经验。概率作为事件在试验中出现可能性大小的数值度量，有必要把经验归纳出来，概率必须满足的一些基本性质，以公理的形式提出。1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出了概率论的公理化结构，给出了概率的严格定义，使概率论有了迅速地发展。

### 1. 概率的定义

定义 1.2　设 $E$ 是随机试验，$\Omega$ 是它的样本空间，对于 $E$ 的每一事件 $A$ 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 $A$ 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

（1）非负性：对于每一个事件 $A$，有 $P(A)\geqslant 0$；

（2）规范性：对于必然事件 $\Omega$, 有 $P(\Omega)=1$；

（3）可加性：设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j, A_iA_j=\varnothing, i, j=1,2,\cdots$，则有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$。

### 2. 性质

（1）$P(\varnothing)=0$。

证明　$A_n=\varnothing\ (n=1,2,\cdots)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$, 且 $A_iA_j=\varnothing,\quad i\neq j$。

由概率定义的可加性得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing)\text{ 且 }P(\varnothing)\geqslant 0$$

所以 $P(\varnothing)=0$。

（2）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有：

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\quad\text{（有限可加性）}\qquad(1.2.1)$$

证明　令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，所以 $A_i A_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots$

由概率定义的可加性得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)。$$

（3）设 $A,B$ 为两个事件，有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB) \tag{1.2.2}$$

若 $B\subset A$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)\text{ 且 }P(A)\geqslant P(B) \tag{1.2.3}$$

证明　因为 $A=(A-B)\cup(AB)$ 且 $(A-B)\cap(AB)=\varnothing$

由式（1.2.1）得　　$P(A)=P(A-B)+P(AB)$

移项得　　$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

若 $B\subset A$，则 $AB=B$，上式可写成 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

又由 $P(A-B)\geqslant 0$　　故 $P(A)\geqslant P(B)$

（4）对于任一事件 $A$，$P(A)\leqslant 1$。

证明　因为 $A\subset\Omega$，由式（1.2.3）知 $P(A)\leqslant P(\Omega)=1$，故 $P(A)\leqslant 1$。

（5）设 $\overline{A}$ 是 $A$ 的对立事件，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$。　　（1.2.4）

因为　$A\cup\overline{A}=\Omega,\ A\cap\overline{A}=\varnothing,\ P(\Omega)=1$

所以　$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})$

$=P(A)+P(\overline{A})$

因此　$P(\overline{A})=1-P(A)$

（6）（加法公式）对于任意两事件 $A,B$ 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.2.5}$$

证明　因为 $A\cup B=(A-B)\cup B$ 且 $(A-B)\cap B=\varnothing$

由式（1.2.1）和式（1.2.2）　$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B)$

$=P(A)-P(AB)+P(B)$

因此得　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

推广：三个事件和的情况

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3) \tag{1.2.6}$$

$n$ 个事件和的情况

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{1.2.7}$$

例 1.5　设事件 $A,B$ 的概率分别为 1/3 和 1/2，求在下列三种情况下 $P(B\overline{A})$ 的值。
（1）$A$ 与 $B$ 互斥；（2）$A \subset B$；（3）$P(AB)=1/8$。

解　（1）参见图 1-4，$P(B\overline{A})=P(B)$。

故 $P(B\overline{A})=P(B)=\dfrac{1}{2}$

（2）参见图 1-1，由式（1.2.3）知

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

（3）参见图 1-2，$A\cup B=A\cup B\overline{A}$，且 $A\cap B\overline{A}=\varnothing$。

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A\cup B\overline{A})=P(A)+P(B\overline{A})$$

因而　$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$

$=1/2-1/8=3/8$

例 1.6　某学校开展数学，英语两个学科的竞赛，参加英语竞赛的人数占学生总人数的 70%，参加数学竞赛的人数占总人数的 50%，同时参加两科竞赛的人数占总人数的 30%，求下列事件的概率：

（1）只参加英语竞赛；

（2）至少参加一种竞赛；

（3）不参加任何竞赛；

（4）只参加一种竞赛。

解　设 $A$ 为事件“参加英语竞赛”，$B$ 为事件“参加数学竞赛”，根据题意设有

$$P(A)=0.70，P(B)=0.50，P(AB)=0.30$$

（1）$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4$

（2）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7+0.5-0.3=0.9$

（3）$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.1$

（4）因为 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互不相容，由式（1.2.1）、式（1.2.2）可得

$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$

$=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)$

$=0.7-0.3+0.5-0.3=0.6$

## 三、等可能概型（古典概型）

### 1. 定义

定义 1.3　（1）试验的样本空间只包含有限个元素；（2）试验中每个基本事件发生的可能性相同，具有以上两个特点的试验称为等可能概型。