格的子代数

张昆龙　宋丽霞　著

科学出版社

格的子代数

张昆龙　宋丽霞　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书系统地论述了格代数以及格的子代数性质、构造等理论，介绍了该领域的最新研究成果. 书中为所述内容提供了全面的论证、详细的运算，也为其在前沿领域中的应用做了准备. 全书结构严谨，自成体系. 书中第 8 章给出了作者在格代数领域的一部分成果.

本书可作为普通高等院校数学专业研究生的教材，也可作为相关专业师生及科研人员的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

格的子代数/张昆龙, 宋丽霞著. —北京: 科学出版社, 2017. 11
ISBN 978-7-03-053707-2

Ⅰ. ①格… Ⅱ. ①张… ②宋… Ⅲ. ①泛代数-研究 Ⅳ. ①O153.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 138756 号

责任编辑：任俊红 滕亚帆／责任校对：郭瑞芝
责任印制：吴兆东／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 11 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16
2017 年 11 月第一次印刷 印张: 12 1/2
字数: 260 000

定价:65.00 元

前　言

“格代数”是一类非常特殊的代数系统，它既有“序”的结构特点，又有抽象代数的运算特性，同时，其上面还具有特别的拓扑结构。因此，格代数理论在许多领域有着很好的应用。这里特别要提的是格代数是“模糊数学”、“多值逻辑”、“人工智能”等现在非常热门课题的数学原型。格的深入研究将会大力促进这些相关学科的快速发展。

“格代数”的研究历史已有二百多年，早在 19 世纪上半叶，George Boole 因研究命题逻辑形式化问题而得到了布尔代数 (Boolean algebras) 的概念。到 19 世纪末，Peirce 和 Schroder 在研究布尔代数的公理化问题时提出了格的概念。与之同时期的 Dedekind 通过研究代数的理想也获得了同样的发现。事实上，Dedekind 还提出了一类更重要的格 —— 模格。虽然，这些数学家 (包括 Huntington) 所做的工作相当出色非凡，但是在当时却没有引起数学界的兴趣。

等到 Garrett Birkhoff 开始深入地研究格论，历史已经进入到了 20 世纪 30 年代中期。他通过一系列高水平的文章，向数学界展示了格论的重要性，并指出该理论为许多看似毫不相干的数学学科的发展提供了统一的框架。另外，在同一时期，Valere Glivenko, Karl Menger, John von Neuniann, Oystein Ore 和 Tarski 等一大批数学家在抽象代数，射影几何，点集拓扑，泛函分析，数理逻辑和概率统计等方面所做的大量的杰出贡献也为格论在数学界的推广筑建了坚实的基础。

格代数理论作为一个数学分支，是在 19 世纪 30 年代奠定基础的。它的标志就是写于 1937~1939 年的 Garrett Birkhoff 的巨著《Lattice Theory》在 1940 年的出版问世。这个新的数学理论一经确立，它的发展是极为迅速的。仅八年之后，即 1948 年.《Lattice Theory》刊出了它的第二版。仅就其篇幅而言。差不多就比第一版增加了一倍，由此不难想像这个新理论有着何等旺盛的生命力了。

后来，在 Garrett Birkhoff 大师的引导下，他的学生 G. Gratzer、E.T.Schmidt 等加入到“格代数”的研究队伍中，做出了十分卓越的成绩。G. Gratzer 于 1978 年出版了《General Lattice Theory》专著就是一个代表。该书涵盖了格论中极其重要的结论及研究方法，因此可视之为继《Lattice Theory》之后的又一经典之作。

进入 21 世纪，随着现代科学技术的高速发展。传统的各种机械工具将广泛地受益于微电子、光电子和人工智能机械产业。这个产业提供的智能机器人、智能计算机、智能工具 (智能汽车、船舶、火车、飞机、航天器等)、智能生产线、智能化工厂等，不仅在体力上，同时也在脑力上部分替代人类的各种劳动，使人类的智能获得新的解放，从而人类可以开展更富创造性的工作。谈到“智能”，其根本必然归咎于“智能推理”、“模拟学习”上面来。它们的数学原型就是“格代数”。所以“格论”的研究又进入了一个新的快速发展时期。国内的格论研究规模、成果与日俱增。特别是后起之秀倍出，令人欣慰。

本书是作者在主持的国家自然科学基金项目“格代数的理想格”(19801016) 和“关于格

代数的子格格”(10261003) 研究成果的汇总以及为研究生和本科高年级生开设格论选课时编写讲义的基础上整理、修订、提炼而成的. 书中全面、系统地讲述了格代数的基本概念、基础理论和常见的研究方法, 特别对格代数的子代数做了详尽的论述. 我们希望通过本书有更多的、特别是年轻的学者能和格代数理论交上朋友. 我们也毫不迟疑地相信. 对于在数学其他领域从事工作的同仁也不会毫无收益, 如果他愿意花点时间来浏览一下本书内容的话. 由于作者水平所限. 本书中可能有考虑不周、甚至发生错误的地方. 希望海内学人, 不吝赐教.

在本书编写的过程中, 理学院同仁曾审阅手稿并提出过重要的修改建议. 张海峰详细演算了全书的例题. 马辉、梅钊等同学也提出过许多意见, 使本书疏漏之处得以大量减少. 同时，本书的出版得到了国家自然科学基金项目 (19801016, 10261003), 中央高校基本科研业务费资助项目 (3142016023, 3142014123), 科研项目 (2005A-13), 应用数学重点学科项目 (HKXJZD201402) 和教学研究项目 (0910KYZY50) 大力资助! 在此对于这些诚挚的帮助, 作者深为感激并一致表示感谢 . 还要特别感谢科学出版社各位编审对本书的最终出版所做的努力.

谨以本书敬献给我们最尊敬的导师陈杰教授和赵萃魁教授.

作　者

2017 年 5 月

目　　录

第 1 章　格代数的基础知识

本章介绍一些必要的预备知识, 包括偏序集、格、子格、凸子格、理想和漏斗等基本概念及其性质.

1.1　格的定义

本节介绍格的定义, 并且证明几种格定义的等价性.

1.1.1　偏序集

偏序关系是一类重要的二元关系, 带有偏序关系的集合叫做偏序集. 本小节首先介绍偏序关系、序同态、分次偏序集、Hasse 图、维数及上 (下) 界等基本概念和有关性质. 最后介绍极小条件及等价于选择公理的几个定理. 今后我们常用符号“$\leqslant$”表示一个二元关系. 根据上下文, 这个记号同数的小于或等于符号不会造成混淆.

定义 1.1.1　设 P 是一个非空集合, P 上的二元关系 $\leqslant$ 叫做一个**偏序关系**(或**半序关系**), 如果满足

(P1) **自反性**　$a \leqslant a\ (\forall a \in P)$;

(P2) **反对称性**　$a \leqslant b,\ b \leqslant a \Rightarrow a = b\ (\forall a, b \in P)$;

(P3) **传递性**　$a \leqslant b,\ b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c\ (\forall a, b, c \in P)$,

这时称 $(P, \leqslant)$(简称 P) 为一个**偏序集** (或**半序集**).

对任意 $a, b \in P$, 若 $a \leqslant b$, 则读作“a 含于 b”或“a 小于或等于 b”, 若 $a \leqslant b$ 而 $a \neq b$, 则记作“$a < b$”, 读作“a 真含于 b”或“a 小于 b”. 称 a 与 b 是可比的, 如果 $a \leqslant b$ 或者 $b \leqslant a$; 否则就说, a 与 b 是不可比的, 记作: $a \| b$. $a < b\ (a \leqslant b)$ 有时也记作 $b > a\ (b \geqslant a)$.

例 1.1.1　设 A 是任意一个集合, $P(A)$ 是 A 的幂集, $\subseteq$ 是集合的包含关系, 则 $(P(A), \subseteq)$ 成为一个偏序集.

例 1.1.2　设 $\mathbf{N}$ 是自然数集, “$|$”表示数的整除关系, $\leqslant$ 是通常数的“小于或等于”关系, 则 $(\mathbf{N}, |)$ 与 $(\mathbf{N}, \leqslant)$ 都是偏序集.

例 1.1.3　设 A 是任意集合, $\mathbb{E}$ 是恒等关系, 则 $(A, \mathbb{E})$ 是偏序集.

由例 1.1.2 可知, 同一个集合可以具有不同的偏序关系, 它们应被视为不同的偏序集.

定义 1.1.2　设 $(P, \leqslant)$ 是一个偏序集, 若 P 中任两个不同的元素都是可比的, 则称 $(P, \leqslant)$(简称 P) 是一个**线性序集**(或**链**或**全序集**), 偏序关系 $\leqslant$ 称为**线性序**(或**全序**), 反之, 若 P 中任意两个不同的元素都不可比, 则称 $(P, \leqslant)$(简称 P) 是一个**非序集**(或**反链**).

例 1.1.2 中的 $(\mathbf{N}, \leqslant)$ 是一个线性序集 (即链), 例 1.1.3 中的 $(A, \mathbb{E})$ 是一个非序集 (即反链).

定理 1.1.1　设 $\leqslant$ 是集合 P 上的一个偏序关系, Q 是 P 上的一个非空子集, 则

(1) $\leqslant$ 的逆关系 $\leqslant' = \{(x, y) | (y, x) \in \leqslant\}$ 也是 P 上的一个偏序关系;

(2) $\leqslant$ 在 Q 上的限制所得关系 $\leqslant|_Q$ 是 P 上的一个偏序关系.

证明留给读者.

在上述定理中, 称偏序集 $(P,\leqslant')$ 是偏序集 $(P,\leqslant)$ 的对偶, 简记作 P'. 称偏序集 $(Q,\leqslant|_Q)$ 是偏序集 $(P,\leqslant)$ 的子偏序集, 简记作 $(Q,\leqslant)$ 或 Q. 显然, 若 $(P,\leqslant)$ 是一个链 (或反链), 则其对偶以及子偏序集也是链 (或反链).

定义 1.1.3　设 $(P,\leqslant)$ 是任意一个偏序集, Q 是 P 的一个子集, 如果子偏序集 $(Q,\leqslant)$ 本身是一个链 (或反链), 则称 Q 为 P **内的链**(或 P **内的反链**).

定义 1.1.4　设 $(P,\leqslant)$ 与 $(Q,\leqslant)$ 是两个偏序集①, 称映射 $\varphi: P\to Q$ 为**序同态**(或**保序**), 如果满足

(1) $x\leqslant y\Rightarrow\varphi(x)\leqslant\varphi(y)$ $(\forall x,y\in P)$.

称映射 φ 为**序同构**(或**同构**), 如果 φ 是双射, 并且满足(1)与下面条件:

(1′) $\varphi(x)\leqslant\varphi(y)\Rightarrow x\leqslant y$ $(\forall x,y\in P)$.

显然序同构一定是序同态. 当 $(P,\leqslant)=(Q,\leqslant)$ 时, 序同态 (或序同构) φ 叫做偏序集 $(P,\leqslant)$ 的**自同态**(或**自同构**), 若序同态 $\varphi: P\to Q$ 是满射, 则称偏序集 P 与 Q 同态, 记作 $P\sim Q$. 若 φ 是序同构, 则称 P 与 Q 同构, 记作 $P\cong Q$. 若 P 与 Q 的某一个子偏序集同构, 则称偏序集 P 可同构嵌入到偏序集 Q 中.

定义 1.1.5　设 $(A,\leqslant)$ 是任意一个偏序集, $a\in A$, 称 A 的下述子集

$$(a]=\{x|x\in A,x\leqslant a\},\quad [a)=\{y|y\in A,a\leqslant y\}$$

分别为由 a 决定的**主理想**和**主漏斗**.

在偏序集 $(A,\leqslant)$ 与偏序集 $(P(A),\subseteq)$ 间定义映射

$$\iota:\ a\mapsto(a]\quad(\forall a\in A).$$

易见 $a\leqslant b(a,b\in A)$ 当且仅当 $\iota(a)\subseteq\iota(b)$. 特别地, 当 $\iota(a)=\iota(b)$ 时, 必有 $a=b$. 因此 A 与 $P(A)$ 的子偏序集 $\iota(A)=\{(a]|a\in A\}$ 同构, 即偏序集 A 可以同构嵌入到偏序集 $P(A)$ 中, 于是证明了下述结果.

定理 1.1.2　任意偏序集 $(A,\leqslant)$ 均可同构嵌入到某个集合 A 的幂集 (关于集合包含关系 $\subseteq$) 偏序集 $(P(A),\subseteq)$ 中.

上述定理表明, 例 1.1.1 给出的幂集偏序集具有特殊的地位.

对偶地, 可以定义**反序同态**及**反序同构**、**自对偶同构** 等概念.

显然, 与 P' 同构的偏序集一定与 P 对偶同构. 偏序集在一个反序同构对应下, 若不是自对偶, 就一定是成对地对偶的. 同样地, 关于偏序集的定义和定理在一个反序同构对应下, 若不是自对偶的, 就一定是成对地对偶的.

由序同构及反序同构的定义, 容易证明下述定理.

定理 1.1.3　设 $(P,\leqslant)$ 与 $(Q,\leqslant)$ 是两个偏序集, $\theta:\ P\to Q$ 是满射, 则下述条件等价:

(1) θ 是序同构 (反序同构);

(2) θ 是可逆映射, 并且 θ 与 θ^{-1} 皆是保序的 (保反序的);

①P, Q 的偏序关系用同一个符号 $\leqslant$ 表示, 根据上下文, 这不会造成混淆.

(3) θ 是保序的 (反序的), 即

$$x \leqslant y \Rightarrow \theta(x) \leqslant \theta(y)(\theta(y) \leqslant \theta(x)), \quad \forall x, y \in P.$$

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 显然成立. 为证 (3)⇒(1), 只需证 θ 是双射. 设 $\theta(x) = \theta(y)$ $(x, y \in P)$, 则 $\theta(x) \leqslant \theta(y)$ 且 $\theta(y) \leqslant \theta(x)$, 由 (3) 知: $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$, 于是 $x = y$, 因此 θ 是单射, 已知 θ 为满射, 故 θ 为双射. 证毕】

注 定理 1.1.3(2) 中要求 θ^{-1} 保序 (保反序) 是必须的. 存在双射 (即可逆映射) $\theta: P \to Q$ 使得 θ 是保序的, 但 θ^{-1} 不是保序的, 因而 θ 不是序同构 (反例留给读者).

1. Hasse 图分次偏序集

设 $(P, \leqslant)$ 是一个偏序集, 且 A 是 P 的一个非空子集, $a \in A$, 若对任意的 $x \in A$, 有 $x \leqslant a$, 则称 a 是 A 的一个**最大元**; 若不存在 $y \in A$, 使得 $a < y$, 则称 a 是 A 的一个**极大元**. 对偶地, 可以给出**最小元**和**极小元**的概念.

显然最大元 (最小元) 一定是极大元 (极小元), 反之不真.

特别地, 偏序集 $(P, \leqslant)$ 的最大元 1(若存在时) 叫做 P 的最大元, 用 $\vee P = 1$ 表示; $(P, \leqslant)$ 的最小元 0(若存在时) 叫做 P 的最小元, 用 $\wedge P = 0$ 表示; 1, 0 统称为 P 的**界**.

定理 1.1.4 设 $(P, \leqslant)$ 是一个偏序集, 且 A 是 P 的一个非空子集.

(1) 若 A 有最大元 (最小元), 则只有一个;

(2) 若 A 是有限子集, 则必有极大元 (极小元);

(3) 若 A 是 P 内的链 (即线性序子集), 则 A 的极大元 (极小元)(当存在时) 一定是 A 的最大元 (最小元).

证 只证 (2), 其余留作练习.

设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 归纳定义 P 中元素列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 使得 $b_1 = a_1$. 假定 b_{k-1} 已经定义 $(1 < k < n)$, 规定

$$b_k = \begin{cases} a_k, & b_{k-1} < a_k, \\ b_{k-1}, & \text{否则}, \end{cases}$$

这样得到一列元素 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 显然 $b_n \in A$ 且是 A 的一个极大元. 类似可证 A 有极小元.

定义 1.1.6 偏序集 (或链)$(P, \leqslant)$ 叫做一个**有限偏序集**(**有限链**), 如果 P 是有限集; 否则称 P 是一个**无限偏序集**(或**无限链**). 通常 P 含元素的个数 (基数) 可用 $n(P)$ 表示, 叫做 P 的**阶**.

由定理 1.1.4 显然可得如下推论.

推论 1.1.1 任何有限链一定有最大元 (最小元).

定义 1.1.7 设 a, b 是偏序集 $(P, \leqslant)$ 中任意两个不同的元素. 若 $a < b$, 并且不存在 $x \in P$ 使得 $a < x < b$, 则称 b **覆盖** a, 记作 $a \prec b$. 若 $a < b$, 则称 P 的子集 $\{x | x \in P, a \leqslant x \leqslant b\}$ 是以 a, b 为端点的**区间**, 又称为**商**, 记作 $[a, b]$(也记作 b/a). 若 $a \prec b$, 则称之为**素区间**, 又称为**素商**.

特别地, 称区间 $[0, a], [a, b], [a, 1]$ 为格 L 的**商子格**.

定义 1.1.8 当偏序集 $(P, \leqslant)$ 有界 0 或 1 时, 则称覆盖了 0 的元为 P 的**原子**; 称 1 覆盖的元 (若存在时) 为 P 的**对偶原子**.

定义 1.1.9 偏序集 P 称为是满足**升链条件**的, 如果它的每个非空子集都含有极大元; P 称为是满足**降链条件**的, 如果它的每个非空子集都含有极小元.

很明显, 偏序集 P 满足升链 (降链) 条件的充要条件是它不含无穷序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 使 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots (a_1 > a_2 > a_3 > \cdots)$. 这个事实也就是这个条件命名为升链或降链条件的原因.

定义 1.1.10 满足降链条件的链称为**升良序链**; 满足升链条件的链称为**降良序链**.

很明显, 偏序集 P 中的链均为有限的充要条件是它既满足升链条件也满足降链条件.

定理 1.1.5(Dilworth 分解定理) 偏序集 P 中每个由 $k+1$ 个元素作成的子集中都至少有两个可比元, 则 P 是 k 个链的并集.

证明 (很明显, Dilworth 分解定理的逆是成立的).

先对有限偏序集 P 进行证明. 办法是对 P 的元素数进行数学归纳. 当 $P = \varnothing$ 或 P 为单元集时, 对任意 k 显然定理都是成立的.

现在设 P 为有限集, 并且 P 中两两不可比的元最多只能有 k 个. 任取 P 中极大链 C, 由于 P 有限, 故这种链总是存在的. 如果 $P - C = \{x \in P | x \notin C\}$ 中不再含有 k 个两两不可比的元了, 由于 $P - C$ 的元素数少于 P 的元素数, 按归纳法假定, $P - C$ 是 $k-1$ 个链的并, 从而 P 是 k 个链的并. 即在此条件下, 定理显然成立.

因此, 设 $P - C$ 中含有子集 $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$, 当 $i \neq j (1 \leqslant i, j \leqslant k)$ 时, s_i, s_j 不可比. 考虑

$$P_* = \{x \in P \mid x \leqslant s \text{ 对某 } s \in S \text{ 成立 }\};$$
$$P^* = \{x \in P \mid x \geqslant s \text{ 对某 } s \in S \text{ 成立 }\}.$$

因为每个元 $x \in P$ 都与某个 $s \in S$ 可比, 故 $P = P_* \cup P^*$. 又显然有 $S \subseteq P_* \cap P^*$. 因为 $S \cap C = \varnothing$, 所以由 C 的极大性知道, C 的最大元不属于 P_*, C 的最小元不属于 P^*. 因此, P_* 和 P^* 都含有比 P 少的元素. 按归纳法假定, 有

$$P_* = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k, \quad P^* = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k,$$

其中 D_i, E_i 都是链. 由于 s_i 两两不可比, s_i 一定分别属于不同的 D_j 和 E_j. 不妨设 $s_i \in D_i \cap E_i, i = 1, 2, \cdots, k$. 于是令 $C_i = D_i \cup E_i$, 就得到 $P = P_* \cup P^* = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$, 其中 $C_i, i = 1, 2, \cdots, k$ 显然都是链, 故 P 是有限情形定理得证.

对一般情形, 我们对 k 进行归纳.

当 $k = 1$ 时, 定理显然是成立的. 对一般 k 为方便计, 称 $C \subseteq P$ 是好的: 如果对每个有限集 $S \subseteq P$, S 至少有一种表成 k 个链的并的分解 (对 S 有限情形, 按前面证明这总是存在的), 使得 $C \cap S$ 包含在这些链的某一个之中, 对任意 $x, y \in C$, 由于 $\{x, y\}$ 本身就是一个有限集, 而 $C \cap \{x, y\} = \{x, y\}$ 应包含在一个链中, 故 x, y 可比, 即 C 本身也是一个链. 又显然对每个 $x \in P$ 单元集 $\{x\}$ 都是好的子集, 故如果令 $\mathscr{P} = \{P \text{ 的所有好子集 }\}$, 用集包含关系, 则 $\mathscr{P}$ 作成一个非空的偏序集.

设 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{P}$ 中的一个链, 下面来证明 $\overline{C} = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C \in \mathscr{P}$. 事实上, 任取有限集 $S \subseteq P$, 由

于

$$S\cap\overline{C}=S\cap\left(\bigcup_{C\in\mathscr{C}}C\right)=\bigcup_{C\in\mathscr{C}}(S\cap C),$$

所以有限集 $S\cap\overline{C}$ 包含在有限个 $S\cap C$ 的并中. 但 $\{S\cap C\}$ 是一个链, 该有限个 $S\cap C$ 中有一个最大的设为 $S\cap C_0$, 我们有 $S\cap\overline{C}\subseteq S\cap C_0$. 因为 $C_0\in\mathscr{P}$, 由 $S\cap C_0$ 的最大性, 可得 $S\cap\overline{C}$ 包含在 S 的一个分解的链中. 这就说明 $\overline{C}\in\mathscr{P}$. 于是可以对 $\mathscr{P}$ 用 Zorn 引理, 即 $\mathscr{P}$ 中有极大元 M.

现在考虑 $P-M$. 如果它不含 k 个两两不可比的元素, 则按归纳法假定, $P-M$ 是 $k-1$ 个链的并. 但 $M\in\mathscr{P}$ 本身为一个链, 故 P 是 k 个链的并, 即定理成立.

因此, 假设 $P-M$ 中有两两不可比的 k 个元 $a_1,a_2,\cdots,a_k$. 根据 M 的极大性, 对每个 $i=1,2,\cdots,k$, $M\cup\{a_i\}$ 都是不好子集. 从而对每个 i, 都存在一个有限集 $S_i\subseteq P$, 不管 S_i 怎样分解为 k 个链的并, 都不全在其中任何一个链中. 由于 $M\in\mathscr{P}$, 则必然有 $a_i\in S_i$. 现在令

$$S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_k.$$

由于 M 是好子集, S 有一个分解 $S=K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_k$, 其中 K_i 是链, 不妨设 $a_i\in K_i, i=1,2,\cdots,k$, 使得对某个 n, $1\leqslant n\leqslant k$ 有 $S\cap M\subseteq K_n$. 令 $K_i'=S_n\cap K_i$, 则

$$\begin{aligned}S_n&=S_n\cap S=S_n\cap(K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_k)\\&=(S_n\cap K_1)\cup\cdots\cup(S_n\cap K_k)=K_1'\cup\cdots\cup K_k'.\end{aligned}$$

另一方面, 由于 $a_n\in S_n\cap K_n=K_n'$, 又 $S_n\cap M=S_n\cap S\cap M\subseteq S_n\cap K_n=K_n'$, 则有 $S_n\cap(M\cup\{a_n\})\subseteq(S_n\cap M)\cup\{a_n\}\subseteq K_n'$. 即 $S_n\cap(M\cup\{a_n\})$ 包含在 S_n 的一个分解 $S=K_1'\cup\cdots\cup K_k$(其中 K_i' 是链) 中的链 K_n' 中, 这与 S_n 的定义相矛盾. 这说明 $P-M$ 不可能含有 k 个两两不可比的元素, 从而全部定理得证. 证毕】

Dilworth 分解定理对无穷的 k 是不成立的, 可举以下反例. 设 Ω 为一个具有连续统势的序数, f 为 Ω 到全部实数间的一个 1-1 对应. 令 $P=\{(\xi,f(\xi))|\xi\in\Omega\}$ 用下列方式规定 P 的偏序 $\leqslant$:

$$(\xi,f(\xi))\leqslant(\eta,f(\eta))\Leftrightarrow\xi\leqslant\eta\text{并且}f(\xi)\leqslant f(\eta).$$

于是 P 成为一偏序. 现在设子集 $S\subseteq P$ 中任意两元均不可比. 考虑集

$$W=\{\xi|(\xi,f(\xi))\in S\},$$

W 为一序数集, 因而为一升良序链. 设 $\xi,\eta\in W$, 有 $\xi<\eta$. 由于 S 中元的不可比性, 必有 $f(\xi)>f(\eta)$. 因而集 $\{f(\xi)|(\xi,f(\xi))\in S\}$ 为一实数集并按其自然顺序是一降良序链. 但这种实数链只能是可数的, 故集 S 为一可数集.

同理可证 P 中任意链也必然是可数的, 但 P 不能作为可数个可数集的并.

定理 1.1.6(Zermelo 定理) 对任意偏序集 P 都存在 P 上一个全序 (线性序)R 使得对一切 x, $y\in P$, 都有 $x\leqslant y\Rightarrow xRy$.

证明　设 $\mathscr{P}$ 是 P 上所有满足以下条件的关系 R 的全体.

(1) R 是 P 的偏序;

(2) 对一切 $x,y\in P$, 有 $x\leqslant y\Rightarrow xRy$. 按照集包含关系, $\mathscr{P}$ 是一个偏序集. $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{P}$ 是一个链. 令 $\overline{R}=\bigcup_{R\in\mathscr{C}}R$, 显然 $\overline{R}\in\mathscr{P}$. 根据 Zorn 引理, $\mathscr{P}$ 中存在一个极大元, 记作 R_0. 我们证明关系 R_0 是 $\mathscr{P}$ 上一个全序.

如果不然, 存在 $u,v\in P$, 使得 uR_0v 和 uR_0u 都不成立. 我们来定义一个 P 上的关系 R_1, 如下:

(Ⅰ) $xR_0y\Rightarrow xR_1y$;

(Ⅱ) xR_0u 并且 $vR_0y\Rightarrow xR_1y$.

由 (Ⅰ), $R_0\subset R_1$, 从而 R_1 满足条件 (Ⅱ). 我们证明 R_1 是 P 上的偏序. 对任意 $x\in P$, 有 xR_0x, 再用 (Ⅰ), 有 xR_1x. 对任意 $x,y,z\in P$, 设已知 xR_1y 且 yR_1z, 按 R_1 的定义, 这时有以下四种可能:

(i) xR_0y 同时 yR_0z;

(ii) xR_0y 同时 yR_0u 并且 vR_0z;

(iii) xR_0u 并且 vR_0y 同时 yR_0z;

(iv) xR_0u 并且 vR_0y 同时 yR_0u 并且 vR_0z.

第 (iv) 种情况是不可能的, 因为这时根据 R_0 的传递性会有 vR_0u. (i) 导出 xR_0z, 从而 xR_1z. 如果 (ii) 成立, 则有 xR_0u 和 uR_0z, 故按定义有 xR_1z. (iii) 成立的情形显然一样. 故 R_1 满足传递性. 对于反对称性, (i)—(iv) 中应取 $z=x$. 这时 (ii), (iii), (iv) 都给出 vR_0u 不可能. 故只有 (i) 能成立, 这时当然有 $x=y$. 以上总起来证明了 R_1 也满足条件 (Ⅰ), 即 $R_1\in\mathscr{P}$. 但按定义有 uR_1v, 故 R_1 真包含 R_0, 与 R_0 是 $\mathscr{P}$ 中极大元相矛盾. 这就证明了设 R_0 非全序是不对的.　　证毕】

定理 1.1.7　*设 $(P,\leqslant)$ 是一个偏序集, $a,b\in P$, $a\neq b$, 则*

(1) $a\prec b\Leftrightarrow a\leqslant b$, 并且 $[a,b]=\{a,b\}$;

(2) 若 P 是有限偏序集, 则 $a\leqslant b$ 当且仅当存在有限个元素 $c_k\in P$ ($k=0,1,2,\cdots,n$), 使得

$$a=c_0\prec c_1\prec c_2\prec\cdots\prec c_{n-1}\prec c_n=b.$$

证明略.

由上述定理可知, 在有限偏序集 $(P,\leqslant)$ 中, 偏序关系“$\leqslant$”完全由具有偏序关系的元素对决定, 如果把 P 中的每个元素都用一个小圆圈在同一平面上表示出来, 当且仅当 b 覆盖 a 时把 b 画在 a 的高处, 并用线段将 a, b 连接起来, 这样得到的图形称为偏序集 $(P,\leqslant)$ 的示图, 也叫做 **Hasse 图**. 利用示图, 可以把偏序集中各元素之间的序关系形象地表示出来.

例 1.1.4　*设 $K=\{1,2,3,\cdots,15\}$, $|$ 表示整数的整除关系, 则 $(K,|)$ 成为一个有限偏序集, 其 Hasse 图由图 1.1(a) 给出.*

例 1.1.5　*设 $A=\{1,2,3\}$, 则 A 的幂集 $P(A)$ 关于集合包含关系 $\subseteq$ 成为一个偏序集 $(P(A),\subseteq)$, 其中 $P(A)$ 的阶为 8, $\varnothing$ 为 $P(A)$ 的最小元, A 是 $P(A)$ 的最大元, 单点集 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ 是原子. 其 Hasse 图由图 1.1(b) 给出.*

有时某些无限偏序集也可用 Hasse 图表示. 例如, 整数集、有理数集、实数集关于自然序 (数的小于或等于关系) 构成的无限链 $(\mathbf{Z},\leqslant)$, $(\mathbf{Q},\leqslant)$, $(\mathbf{R},\leqslant)$. 其 Hasse 图由图 1.1(c), (d), (e) 给出.

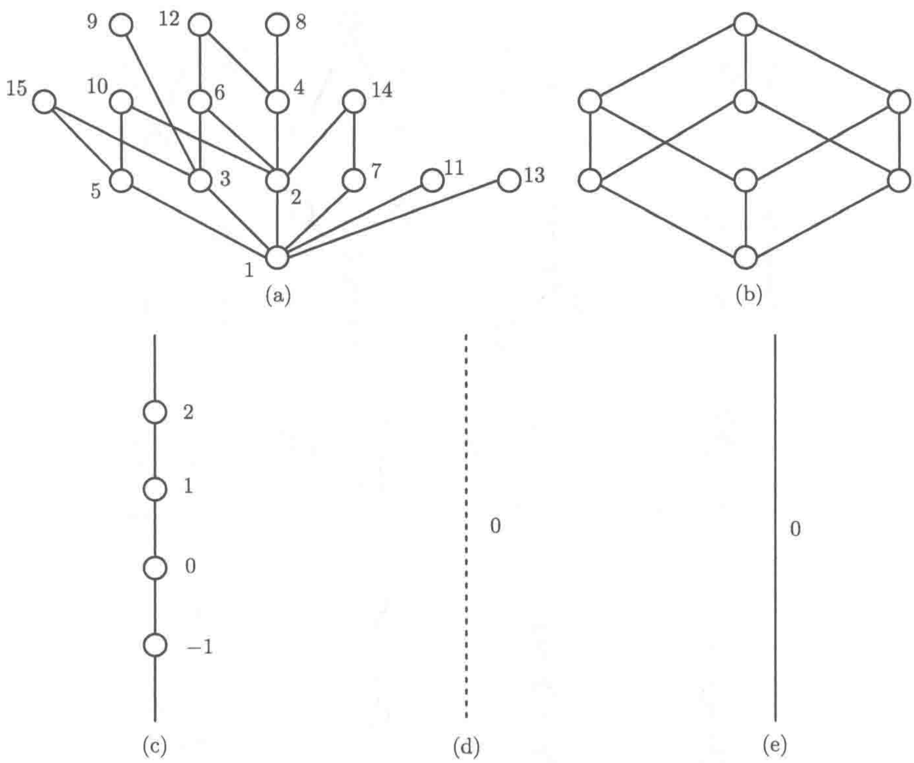

图 1.1

关于有限偏序集的 Hasse 图, 显然有以下事实:

(1) $a\leqslant b$ 当且仅当可沿折线自下而上 a 到达 b;

(2) 两个有限偏序集同构当且仅当它们可由同一个 Hasse 图表示;

(3) 偏序集 $(P,\geqslant)$ 的 Hasse 图可由 $(P,\leqslant)$ 的示图上下倒置得到;

(4) 有限偏序集 P 自对偶, 当且仅当 P 的 Hasse 图是上下对称.

根据 (2), 对于每一个确定的自然数 n, 有可能求得所有彼此不同构的 n 阶偏序集的个数.①

例 1.1.6 所有不同构的 4 阶偏序集共有 16 个. 其 Hasse 图由图 1.2 给出, 其中有 8 个是自对偶的.

定理 1.1.8 任何 n 元有限链 (反链) 彼此同构.

定义 1.1.11 定义 n 元有限链的**长**为 $n-1$, m 元有限反链的**宽**为 m. 规定无限链 (反链) 的长 (宽) 为 ∞.

推论 1.1.2 两个有限链 (反链) 同构当且仅当它们的长 (宽) 相等.

①不同构的 n 阶偏序集的个数的公式表示是偏序集上的一个至今未解决的公开问题.

定义 1.1.12　设 $(P,\leqslant)$ 是任意一个偏序集. 用 $l(P)(w(P))$ 表示所有 P 内的有限链 (反链) 的长 (宽) 的上确界, 称为偏序集 P 的**长**(**宽**). 当 $l(P)$ $(w(P))$ 为有限数时, 则称 P 是**有限长的**(**有限宽的**), 否则, 称 P 是**无限长的**(**无限宽的**).

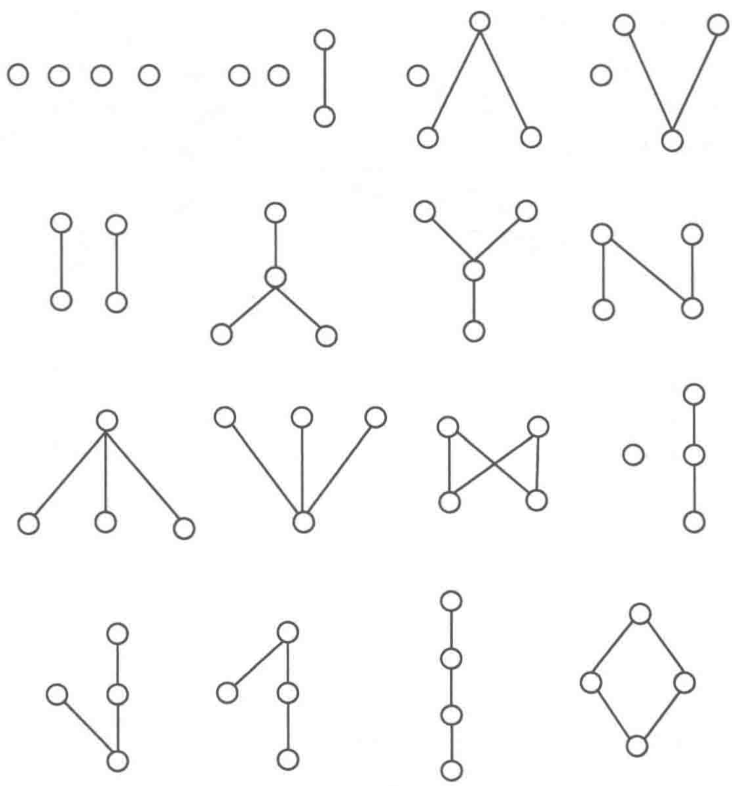

图 1.2

下面介绍分次偏序集.

定义 1.1.13　设 $(P,\leqslant)$ 是一个偏序集, 如果存在 P 到整数集 $\mathbf{Z}$ 的映射 (函数)$\varphi:P\to\mathbf{Z}$, 满足

(1) $x<y\Rightarrow\varphi(x)<\varphi(y)\quad(x,y\in P)$;

(2) $x\prec y\Rightarrow\varphi(x)+1=\varphi(y)\quad(x,y\in P)$,

则称 P **被函数** φ **分次**, 称 φ 为**分次函数**, P 叫做**分次偏序集**.

例如自然数集 $\mathbf{N}$(整数集 $\mathbf{Z}$) 关于自然序 $\leqslant$ 构成的链是分次偏序集, 恒等映射 $\varepsilon:n\mapsto n$ 是一个分次函数. 例 1.1.4 中的偏序集 $(K,|)$ 是一个分次偏序集, 其分次函数 g 如下表:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$g(x)$	0	1	1	2	1	2	1	3	2	2	1	3	1	2	2

定理 1.1.9　分次偏序集一定是有界有限长的.

证明　设 $(P,\leqslant)$ 是一个分次偏序集, g 是相应的分次函数. 对任意 $a,b\in P$, $a\leqslant b$, 由分次偏序集的定义, 可知介于 a,b 之间的任意链的长至多等于 $g(b)-g(a)$. 故 P 是有界有限长的.　　证毕】

在结束本小节之前, 我们提一下偏序集的"对偶"特点.

设 $(P, \leqslant)$ 为一偏序集, 前面介绍过的 P 的对偶 P' 显然有 $P'' = P$, 并且若 P 是有限的, 则简单地将 P 的 Hasse 图倒置便得 P' 的 Hasse 图.

对于 P 中一个命题, 如果把 $\leqslant$ 都换成 $\geqslant$, 同时把 $\geqslant$ 都换成 $\leqslant$, 就得到 P 中原命题的一个对偶命题. 例如命题"P 满足升链条件"的对偶命题是"P 满足降链条件". 一个命题称为是自对偶的, 如果这个命题在 P 和 P' 中都成立 (即此命题和它的自对偶命题在 P 中同时成立). "P 是一个链"和"P 中一切链均有限"是自对偶命题, 但命题"P 满足升链条件"则不是自对偶的. 当一个自对偶命题在 P 中成立时, 它的对偶命题当然也在 P 中成立. 应注意自对偶命题和它的对偶命题并非总是同一命题. 第 2 章可以看到很多这种例子.

上述这些概念的好处是: 若一个命题作为一系列自对偶命题的推论在一个偏序集 P 中证明是成立的, 则这个命题必然在 P' 中也成立, 从而它的对偶命题在 P 中也成立. 例如, 由于 Zorn 引理可以用一系列自对偶命题来加以论证, 所以它的对偶命题 (即如果 P 中任何非空子集都有下界, 则 P 中存在极小元) 也是普遍成立的.

对偶原理 若一个关于偏序集的命题在所有的偏序集中为真, 则其对偶命题 (即把每个的 $\leqslant$ 代以 $\geqslant$, 最大 (小) 元代以最小 (大) 元, 极大 (小) 元代以极小 (大) 元, 0 代以 1, 上 (下) 界代以下 (上) 界, 上 (下) 确界代以下 (上) 确界, 等等) 亦真.

有时会遇到这种情形, 所要证明的命题可以分成两部分, 而这两部分互为对偶. 如果其中之一能用一系列自对偶命题加以论证, 则另一部分"按对偶原理"就自动成立了.

1.1.2 在偏序集意义下的格定义

设 $(P, \leqslant)$ 是一个偏序集, $S \subseteq P$, 元素 $a \in P$ 是 S 的**上界**, 如果对所有的 $s \in S$ 有 $s \leqslant a$; 下界可对偶地定义. S 的所有上界的集合用 $S^{\triangle}$ 表示, 读作 S 的**上界集**; S 的所有下界的集合用 $S_{\triangledown}$ 表示, 读作 S 的**下界集**. 即

$$S^{\triangle} = \{a \in P | s \leqslant a, \forall s \in S\},$$

$$S_{\triangledown} = \{b \in P | s \geqslant b, \forall s \in S\}.$$

由于序关系 $\leqslant$ 具有传递性, $S^{\triangle}$ 总是一个上定向集. $S_{\triangledown}$ 总是一个下定向集. 如果 $S^{\triangle}$ 有最小元 d, 则称 d 是 S 的**最小上界**. 即, d 是 S 的最小上界当且仅当:

(1) d 是 S 一个上界;

(2) 对 S 的任一上界 a, $a \leqslant d$.

最小上界也称**上确界**, 表示为

$$\sup S = \vee S = \bigvee_{a \in S} a.$$

对偶地 $S_{\triangledown}$ 的最大元 (若存在) 称为 S 的**下确界**, 表示为

$$\inf S = \wedge S = \bigwedge_{a \in S} a.$$

由于最大元、最小元是唯一的, 若一个集合的上确界、下确界存在, 则它是唯一确定的.

设 P 是偏序集, S 是 P 的子集. 当 $S=\varnothing$ 时, $\varnothing^{\triangle}=P$. $\sup\varnothing$ 存在当且仅当 P 有最小元 0, 且此时 $\sup\varnothing=0$. $\varnothing_{\triangledown}=P$, $\inf\varnothing$ 存在当且仅当 P 有最大元 1, 此时 $\inf\varnothing=1$. 一般说来, S 的上确界、下确界若都存在, 则有 $\inf S\leqslant\sup S$, 但 $S=\varnothing$ 时是个例外. 当 $S=P$ 时, $\sup P(\inf P)$ 存在当且仅当 P 有最大 (小) 元.

定义 1.1.14(序关系下的格代数定义)　设 $(P,\leqslant)$ 是偏序集, 若 P 中任意两元素 a,b 都有上确界 $a\vee b$ 和下确界 $a\wedge b$, 则称 $(P,\leqslant)$ (简称 P) 为一个**格**.

(a)　　(b)

图 1.3

在格中, 元素 $a\vee b$ 和 $a\wedge b$ 分别称为 a 与 b 的**并**和**交**.

在一般的偏序集 P 中, $a\vee b$ 和 $a\wedge b$ 可能不存在, 其原因有以下两个 (图 1.3):

(1) a 与 b 没有共同的上界 (下界);

(2) a 与 b 没有最小 (大) 上界 (下界).

由定义显然可以得到:

(1) 在格 $(L,\leqslant)$ 中, 若 $a,b\in L, a\leqslant b$, 则 $a\vee b=b$, $a\wedge b=a$.

(2) 由 (1) 即得: $a\vee a=a, a\wedge a=a$; $a\vee(a\wedge b)=a, a\wedge(a\vee b)=a$.

例 1.1.7　每个链都是格, 任意集合 A 的幂集在集合包含关系下也都是格.

例 1.1.8　设 V 是数域 P 上的向量空间, V 的所有子空间组成的集合按如下定义的"$\subseteq$"成为格. 若 W,W' 是 V 的两个子空间, 则

$$W\wedge W'=W\cap W';\quad W\vee W'=W\cup W'\ (\text{子空间的和}).$$

若格 L 含有限个元素, 则称 L 为有限格; 否则就称 L 为无限格. 有限格可用 Hasse 图来表示, 图 1.4 给出了所有五元格的示图.

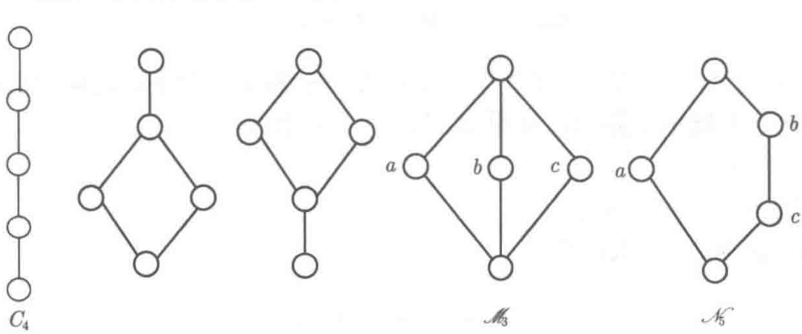

图 1.4

偏序集中的许多概念和术语, 如最大元素、最小元素、覆盖、原子等都可自然地移到格上来, 此处不再赘述.

定理 1.1.10　设 P, Q 是偏序集, 则

(1) P 是格 $\Leftrightarrow$ P 之对偶 P' 是格;