普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编　杨福民

（下）

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

杨福民　主编

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书是为适应教学改革而编写的应用型本科少课时用教材．全书分上、下两册，共 12 章．上册包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用．下册包括微分方程、无穷级数、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分．

本书的特点是根据目前应用型本科学生实际情况和教学现状，力求教学内容、要求、篇幅适度；概念、理论和运算方法本着以应用为目的，必需、够用为度的原则作了适度调整．尽量突出对基本概念、基本理论、基本方法与运算的教与学，配有较多的难度适中的例题与习题．各章有内容小结和练习题，有利于内容的总结与归纳，知识点的衔接与贯通．并附有期终测试样卷和练习题的参考答案，便于学生自学和练习．

本书适合培养应用型人才的理工类高等本科院校作为教材，也可供经济管理类专业学生使用．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下 / 杨福民主编．-- 北京：北京邮电大学出版社，2014.1(2016.6 重印)

ISBN 978-7-5635-3784-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 288328 号

书　　名	高等数学(下)
主　　编	杨福民
策 划 人	马　飞
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www3. buptpress. com
电子信箱	ctrd@buptpress. com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京厚诚则铭印刷科技有限公司
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	14.5
字　　数	299 千字
版　　次	2014 年 1 月第 1 版　2016 年 6 月第 4 次印刷

ISBN 978-7-5635-3784-6　　定价：29.00 元

中国矿业大学银川学院
基础课部数学教研室编委会

主　编　杨福民

副主编　李　明　卢　琴　刘俊梅

参　编　（排名不分先后）

马廷福　张振祺　杨文海　金　涛

马永刚　张马媛　梁　艳

前　言

高等教育由精英教育转向大众教育的历程已十载有余，随着教学改革的深化，独立学院将办学定位于培养“应用型人才”，为此不断进行着探索和实践. 新的培养模式的一个重要的方面就是突出和加强实践性的实验实训、实习和课程设计等教学环节. 作为学科的公共基础课教学势必受到一定影响. 与时俱进，认同并参与教学改革与实践，适应并服务于培养“应用型人才”的教学模式，确立大众化高等教育的教学质量观，将新的教学理念和教学方法、手段在教学的各个环节中实践与实施.

编写与之相适应的教材是亟待解决的一项改革任务，为应用型人才的培养提供及时、可靠、坚实的保证. 应用型人才培养计划中“高等数学”课程安排已经成为少课时的教学. 面向培养对象，结合办学定位与教学目标，体现个性化的教与学，我们在吸收国内同类教材的优点基础上，结合多年教学的经验，确立教材编写以“因材施教，学以致用”为指导思想；贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的教学原则；突出“基本概念、基本理论、基本计算方法”的教学要求.

教材编写力求有利于教师组织教学，有利于学生学习掌握课程的基本知识内容. 使教师易讲、易教，学生易懂、易学. 适当降低理论深度，突出数学知识的应用工具性，培养数学的思维和方法，提高应用能力和综合素质.

在教材的编写中妥善处理学科的系统性、严肃性与达到基本教学要求之间的关系，知识内容学习掌握与应用能力提高的关系，加强基础的教与学和兼顾素质教育的关系；重视概念、侧重计算、启发应用. 内容少而精，简化定理、性质的证明，对纯数学的定义、构造性的证明、技巧性强的数学计算作几何直观或淡化、省略的处理.

参与本书的编写人员都是长期在一线从事本科数学教学的教师，有一定的教学经历和教学经验，在编写内容及深度方面较好地反映和体现了应用型本科的教学需求. 每章内容小结是本章重要知识点及主要方法的汇总，并简单介绍了本章内容在学科中的

地位作用以及与其他章节内容的联系,起到融会贯通地掌握学习内容的作用.各章节的教学要求及重点与难点是依据学科教学大纲,并体现学生实际水平提出的一个多层次基本教学要求,作为教与学的指导意见.每章节配置了较多的例题和习题,易于练习,便于自学.教师在授课时可有选择地使用其中的部分,其余供有精力的学生自主学习,自行完成.

《高等数学》上、下册由中国矿业大学银川学院数学教研室编写.本教材是为独立学院理工类应用型本科编写.适合"高等数学"少学时(约 128 学时)的教学,用" * "号标的内容,针对不同层次的教学要求,教师在授课时可按专业的要求有选择地使用.

学院和教务处的领导对教材的出版给予了极大的关注和支持,出版社的领导和编辑们对本书的编辑和出版给予了具体的指导和帮助,编者对此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,教材中难免存在不妥之处,敬请专家、同行及读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善.

编写组

2013 年 6 月

目　录

第 7 章　微分方程初步

在许多实际问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系，却比较容易列出所求函数的导数满足的关系式. 这样的关系式称为**微分方程**. 微分方程广泛应用于工程技术学科和经济学领域，已成为科技工作者的重要工具. 本章主要介绍有关微分方程的基本概念和几种常见类型的微分方程的解法.

§ 7.1　微分方程的基本概念

为便于阐述微分方程的基本概念，先来考察三个简单的实际例子.

例 1　一曲线通过点(1,2)，且在该曲线上任意点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $2x$，求此曲线的方程.

解　设所求曲线的方程为 $y=y(x)$. 由导数的几何意义知，曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $2x$. 于是按题意可得

$$y'=2x,$$

对其两端积分，得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C,$$

其中 C 为任意常数. 又因曲线通过点(1,2)，故应满足条件 $y(1)=2$，把此条件代入上式，有 $2=1^2+C$，故 $C=1$.

于是，所求曲线方程为

$$y=x^2+1.$$

例 2　设有一质量为 m 的物体，以初始速度 v_0 垂直上抛，开始上抛时的位移(高度)为 s_0，设此物体的运动只受重力的影响，试确定该物体运动的位移 s 与时间 t 的函数关系.

解　设位移与时间的函数关系为 $s=s(t)$，因为物体运动的加速度是位移 s 对时间 t 的二阶导数，且题设只受重力的影响，所以根据牛顿第二定律有

$$ms''(t)=-mg$$

即

$$s''(t)=-g,$$

其中 g 是重力加速度，它是一常数.

因为物体运动速度 $v=v(t)=s'$,所以上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g,$$

两端积分得

$$v=-gt+C_1,$$

再两端积分,得

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2,$$

其中 C_1,C_2 是两个任意常数.

由题设初始速度为 v_0,且开始上抛时的位移为 s_0,代入上式,得 $C_1=v_0,C_2=s_0$. 于是

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$$

即为所求的函数关系.

***例 3** 物体冷却速度与物体温度和周围温度之差成正比. 室温为 20 ℃时,一物体在 20 min内从 100 ℃冷却到 60 ℃. 试求物体温度 T(℃)与时间 t(min)的函数关系. 问:经过多少分钟它可冷却到 30 ℃?

解 设在 t 时刻,物体温度为 $T(t)$. 依题意得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-20),$$

其中 k 为比例常数. 上式化为$\frac{\mathrm{d}T}{T-20}=k\mathrm{d}t$,积分得

$$\ln(T-20)=kt+\ln C.$$

由题设知 $t=0$ 时 $T=100$ ℃,$t=20$ 时 $T=60$ ℃,由此确定 $C=80,k=-\frac{\ln 2}{20}$.

于是物体温度 T(℃)与时间 t(min)的函数关系为

$$T-20=80\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{20}} \quad \text{即} \quad T=20+80\cdot 2^{-\frac{t}{20}}.$$

由题意,令 $T=30$ ℃,有 $2^{-\frac{t}{20}}=2^{-3}$,从而$\frac{t}{20}=3$,由此得 $t=60$(min). 所以物体从 100 ℃冷却到 30 ℃需 60 min.

上面三个例子就是利用函数的导数或微分建立了函数关系并解决了有关问题. 下面介绍微分方程的一般概念.

定义 7.1 含未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**. 微分方程中未知函数的导数的最高阶数,称为**微分方程的阶**.

未知函数为一元函数的微分方程,称为**常微分方程**. 如例 1 中 $y'=2x$ 以及例 3 中$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-20)$是一阶常微分方程,例 2 中 $s''(t)=-g$ 是二阶常微分方程.

未知函数为多元函数，从而出现多元函数的偏导数的方程，称为**偏微分方程**.

本章简要介绍微分方程初步知识，因此，后文提到微分方程或方程时，均指常微分方程.

定义 7.2　若某个函数代入微分方程中，能使该方程成为恒等式，则称此函数为该**微分方程的解**.

如果微分方程的解中包含任意独立的(即不可合并而使个数减少的)常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解称为微分方程的**通解**；在通解中给予任意常数以确定的值而得到的解，称为**特解**.

例如，例 1 中方程 $y'=2x$ 的通解为 $y=x^2+C$，而 $y=x^2+1$ 为特解.

例 2 中方程 $s''(t)=-g$ 的通解为 $s=-\dfrac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$，而 $s=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$ 为特解.

例 3 中方程$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-20)$的通解为 $\ln(T-20)=kt+\ln C$，而 $T=20+80\cdot 2^{-\frac{t}{20}}$为特解.

一般地，特解是当自变量取定某个特定值时确定的解，这种特定条件称为微分方程的**初值条件**. 例如例 1、例 2 和例 3 的初值问题的微分方程分别表示为

$$\begin{cases}y'=2x,\\ y(1)=2,\end{cases}\qquad \begin{cases}s''(t)=-g,\\ v(0)=v_0,s(0)=s_0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-20),\\ T(0)=100.\end{cases}$$

例 4　验证 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$ 是微分方程 $y''+y=x$ 的解；并求满足初始值 $y(0)=1,y'(0)=3$ 的特解.

解　由于

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+1,$$
$$y''=-C_1\cos x-C_2\sin x,$$

将 y''，y 代入方程左边

$$y''+y=-C_1\cos x-C_2\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x+x\equiv x.$$

函数 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$ 及其导数代入 $y''+y=x$ 后成为一个恒等式，因此函数 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$ 是微分方程 $y''+y=x$ 的解.

将条件 $y(0)=1,y'(0)=3$ 代入 y 及 y' 的表达式得

$$\begin{cases}C_1\cos 0+C_2\sin 0+0=1,\\ -C_1\sin 0+C_2\cos 0+1=3,\end{cases}$$

解得 $C_1=1,C_2=2$. 故所求的特解为 $y=\cos x+2\sin x+x$.

习　题　7.1

1. 指出下列各微分方程的阶数：

(1) $(2x-y^2)\mathrm{d}x+(x^2+y)\mathrm{d}y=0$；　(2) $x(y')^3-2y''=0$；

(3) $x^3y'''-2y''-y=0$；　(4) $x^2(y')^3-2y'=0$.

2. 验证下列各给定函数是否为对应微分方程的解：

(1) $xy'=2y$，　　$y=5x^2$；

(2) $y''+y=0$，　　$y=3\sin x-4\cos x$；

(3) $y''-2y'+y=0$，　　$y=x^2e^x$；

(4) $y''=1+(y')^2$，　　$y=x^2+C$.

3. 确定下列函数中任意常数 C_1,C_2 的值，使函数满足所给的初值条件：

(1) $y=(C_1+C_2x)e^x$，　　$y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$；

(2) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$，　　$y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=3$.

§7.2　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y')=0,$$

其中，x 为自变量，y 为未知函数，y'为 y 的一阶导数.

本节介绍几种常见的一阶微分方程及其解法.

7.2.1　可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

的一阶微分方程称为**可分离变量的微分方程**.

其解法是将变量分离，使自变量 x 及其微分 dx，未知函数 y 及其微分 dy 分离到等号的两边，即上式化为

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx \quad (g(y)\neq 0),$$

两边积分，即可得到方程的通解.

例 1　求微分方程 $y'=-\dfrac{x}{y}$的通解.

解　分离变量得

$$ydy=-xdx,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C,$$

C 为任意实数. 由上式知 $C\geqslant 0$，若记 $C=\dfrac{1}{2}r^2$，则

$$x^2+y^2=r^2$$

为所给微分方程的通解.

例 2 求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解 当 $y\neq 0$ 时,分离变量得

$$\frac{dy}{y}=2x dx,$$

两边积分$\int\frac{dy}{y}=\int 2x dx$, 得

$$\ln|y|=x^2+C_1$$

即

$$|y|=e^{x^2+C_1} \quad 或 \quad y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^2},$$

其中 e^{C_1} 为任意正常数. 去掉绝对值记号,将正、负号转移到常数上,可记 $C=\pm e^{C_1}$,因此方程的通解为

$$y=Ce^{x^2} \quad (C\ 为任意常数)$$

经检验:当 $C=0$ 时,$y=0$ 仍是原方程的解. 不难验证,$y=Ce^{x^2}$ 的确使原方程成为恒等式.

为了简便,以后再遇到类似情形时,不再详细写出处理绝对值正负记号的过程. 例如,本例可直接把求解过程写成:

分离变量得

$$\frac{dy}{y}=2x dx,$$

两边积分$\int\frac{dy}{y}=\int 2x dx$, 得

$$\ln y=x^2+\ln C$$

即

$$y=Ce^{x^2}(C\ 为任意常数).$$

例 3 求初值问题的特解$\begin{cases} dy=-\frac{y}{x}dx, \\ y|_{x=2}=4. \end{cases}$

解 对方程分离变量得

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x},$$

两边积分$\int\frac{dy}{y}=\int -\frac{dx}{x}$, 得

$$\ln y=-\ln x+\ln C,$$

于是得方程的通解 $xy=C$.

因为 $y|_{x=2}=4$,故 $C=8$. 于是此初解问题的解为

$$xy=8, \quad 即\ y=\frac{8}{x}.$$

例 4 放射性元素铀不断地有原子放射出微粒子而变成其他元素,铀的含量不断减少,这种现象叫作衰变. 由原子物理学知道,铀的衰变速度与未衰变的铀的含量 $M(t)$成正比. 已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0,求在衰变过程中铀的含量 $M(t)$随时间 t 变化的规律.

解 设铀的含量 $M=M(t)$,铀的衰变速度为$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$.

由已知铀的衰变速度与铀的含量 $M=M(t)$成正比,故得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-kM,$$

其中常数 $k(k>0)$称为衰变系数. 因为含量 $M=M(t)$随时间 t 增加而单调减少,即$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}<0$,所以 k 前有负号.

由于初始条件为 $M(0)=M_0$,于是 $M=M(t)$满足的微分方程的初值问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-kM,\\ M(0)=M_0.\end{cases}$$

解可分离变量的方程

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=-k\mathrm{d}t,$$

两边积分得

$$\ln M=-kt+\ln C,$$

故通解为

$$M=C\mathrm{e}^{-kt}.$$

由初始条件 $M(0)=M_0$ 得 $C=M_0$. 于是所求的铀的含量 $M=M(t)$随 t 变化的规律为

$$M=M(t)=M_0\mathrm{e}^{-kt}.$$

***例 5** 设降落伞从跳伞塔下落后,所受空气阻力与速度成正比,并设降落伞离开跳伞塔时($t=0$)速度为零,求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解 设降落伞下落速度为 $v(t)$. 降落伞在空中下落时,同时受到重力 P 与阻力 R 的作用. 重力大小为 mg,方向与 v 一致;阻力大小为 kv(k 为比例系数),方向与 v 相反,从而降落伞所受外力为

$$F=mg-kv.$$