概率论与数理统计
学习辅导与习题精解

沈远彤 主 编
李志明 杨迪威 张世中 副主编

大学出版社

概率论与数理统计
学习辅导与习题精解

沈远彤 主 编

李志明 杨迪威 张世中 副主编

清华大学出版社

北 京

内容简介

本书是为配合概率论与数理统计课程而编写的辅导书，内容为随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理与中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计和假设检验共8章，每章包括本章知识要点、典型习题解析、自测题及解答三部分. 书中对课程内容进行了系统、全面的归纳与总结，对习题进行了精心的选择，具有题型多样、覆盖面广和解答详细的特点.

本书可以作为理工科各专业本科生学习概率论与数理统计课程的同步学习辅导书，也可以作为硕士研究生入学考试的复习资料，还可供高校教师作为教学参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习辅导与习题精解/沈远彤主编. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-48559-9

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①沈…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 241110 号

责任编辑：汪　操
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：11.5　　**字　　数**：252 千字
版　　次：2017 年 11 月第 1 版　　**印　　次**：2017 年 11 第1 次印刷
定　　价：29.00 元

产品编号：072208-01

PERFACE

前　言

概率论与数理统计课程是理工科重要的几门数学基础课之一，是理工科学生学习其他课程的基础，也是许多专业硕士研究生入学考试的必考科目. 概率论与数理统计以随机现象为研究对象，有自己独特的概念和方法，其内容丰富，结果深刻. 然而概率论与数理统计课程教学学时有限，这就要求学生在课堂学好基本概念与理论之后，还需要在课外进行自学与练习，本书即基于此编写而成，希望能帮助到学生，并解决同学们在自学与练习中遇到的一些困难.

本书的编写以本科概率论与数理统计课程教学大纲和硕士研究生入学考试基本要求为基础，参考了多种概率统计教材与复习资料，还结合了编者长期的课堂教学实践经验. 本书不仅系统地介绍了概率论与数理统计各部分内容的基本概念、性质和定理，还重点讲解了解题的方法与技巧，且为兼顾学生报考硕士研究生的需要，加入了历年考研试卷中概率论与数理统计方面经典的试题，并给出全部的参考答案. 每一章的具体内容如下:

(1) 本章知识要点. 此部分归纳总结了相应章节的知识要点，包括基本概念、基本性质、重要定理以及重点与难点等内容. 通过浏览复习此部分内容，学生可以巩固教材知识，把握知识脉络，以便进一步理清解题思路.

(2) 典型习题解析. 针对概率论与数理统计课程重点与难点，精选了一批典型习题进行分析与解答. 主要包括选择、填空、计算和证明四种题型. 通过此部分的学习，学生能学习到解题的规律、方法和技巧，并能启迪思维，提高解题能力，还可加深对概率论与数理统计课程的理解.

(3) 自测题及解答. 每一章都给出了一套自测题并提供了详细的解答. 读者通过完成测试题可以自我检查该章的知识掌握情况，也对学习的效果起到评估的作用.

全书由李宏伟教授负责审阅，朱小宁副教授也提出了宝贵意见，清华大学出版社的责任编辑为本书的出版给予了热情的支持与帮助，本书还获得了湖北省教学研究项目——统计学系列课程教学改革的理论与实践(2014145)和中国地质大学（武汉）本科教学工程项目(ZL201739)的大力支持，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2017 年 7 月

CONTENTS

目　录

第 1 章　随机事件及其概率 …… 1

1.1　本章知识要点 …… 1

1.2　典型习题解析 …… 4

1.3　自测题及解答 …… 18

第 2 章　随机变量及其概率分布 …… 23

2.1　本章知识要点 …… 23

2.2　典型习题解析 …… 27

2.3　自测题及解答 …… 41

第 3 章　多维随机变量及其分布 …… 48

3.1　本章知识要点 …… 48

3.2　典型习题解析 …… 52

3.3　自测题及解答 …… 67

第 4 章　随机变量的数字特征 …… 77

4.1　本章知识要点 …… 77

4.2　典型习题解析 …… 81

4.3　自测题及解答 …… 98

第 5 章　大数定理与中心极限定理 …… 104

5.1　本章知识要点 …… 104

5.2　典型习题解析 …… 106

5.3　自测题及解答 …… 112

第 6 章　样本及抽样分布 …… 119

6.1　本章知识要点 …… 119

6.2 典型习题解析 …… 123
6.3 自测题及解答 …… 130

第7章 参数估计 …… 135

7.1 本章知识要点 …… 135
7.2 典型习题解析 …… 139
7.3 自测题及解答 …… 154

第8章 假设检验 …… 162

8.1 本章知识要点 …… 162
8.2 典型习题解析 …… 164
8.3 自测题及解答 …… 172

参考文献 …… 178

第 1 章

随机事件及其概率

1.1 本章知识要点

一、随机现象和随机事件

1. 随机现象

在个别试验中呈现不确定性,而在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象称为随机现象.

2. 随机试验

若试验(观察或实验过程)满足下述条件,则该试验称为随机试验(记为 E).

(1) 试验可以在相同条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但能事先明确所有可能的结果,并且每次试验仅有其中一个结果出现;

(3) 进行一次试验之前,不能断言哪个结果会出现.

3. 基本结果

随机试验 E 的每一个不可再分解的结果称为基本结果(记为 ω),它将是统计中的基本单元,故又称**样本点**.

4. 样本空间

随机试验 E 的所有基本结果的全体称为样本空间(记为 Ω).

5. 随机事件

随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的随机事件,简称**事件**,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示. 由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**. 每次试验中必定要发生的事件称为**必然事件**,记为 Ω,每次试验中不可能发生的事件称为**不可能事件**,记为$\varnothing$.

二、事件的关系及其运算(A,B 和 $A_k,k=1,2,\cdots$为Ω 的子集)

1. 包含关系

$A\subset B$,若 A 发生则必有 B 发生.

2. 相等关系

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

3. 和事件

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\{x\mid x\in A_1\text{ 或 }x\in A_2,\cdots,\text{或 }x\in A_n\}.$$

4. 积事件

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\},\text{也记为 }AB;$$

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=\{x\mid x\in A_1\text{ 且 }x\in A_2,\cdots,\text{且 }x\in A_n\},\text{也记为 }A_1A_2\cdots A_n.$$

5. 差事件

$$A-B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

6. 互不相容(互斥)事件

$$A\cap B=\varnothing,\quad\text{或}\quad AB=\varnothing.$$

7. 对立事件

$$A\cup B=\Omega\quad\text{且}\quad AB=\varnothing.$$

记为 $B=\overline{A},A=\overline{B},\overline{A}=\Omega-A$.

8. 事件的运算律

与集合的运算律相似,事件的运算有交换律、结合律、分配律和德摩根律等.

三、概率的定义和性质

1. 古典概率

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,$n$ 为有限的正整数,且每个样本点 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$出现的可能性相等,则事件 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$出现的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数 }m}{\text{基本事件的总数 }n}.$$

2. 几何概率

向某一可度量的区域 G 内投一点,若所投点落在 G 中任一区域 g 内的可能性的大小与 g 的度量成正比,而与 g 的位置和形状无关,则把具有这种特征的随机试验称为几何概型.其点投中区域 g 的概率为

$$P=\frac{g\text{ 的度量}}{G\text{ 的度量}}.$$

3. 统计概率

在相同条件下,独立重复作 n 次试验,当试验次数 n 很大时,如果某事件 A 的频率 $f_n(A)$稳定地在$[0,1]$上的某一个数值 p 附近摆动,而且随着试验次数的增多,这种摆动的

幅度会越来越小，则称数值 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$.

4. 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于 E 的每一个随机事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，如果它满足下列三条公理，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率：

(1) $P(A)\geqslant 0$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

5. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$ 或 $P(A)+P(\overline{A})=1$；

(3) 设 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A)\leqslant P(B)$；

(4) 设 A,B 为任意两个事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

四、概率的有关计算公式

1. 条件概率

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 已发生的条件下，事件 B 发生的条件概率.

2. 乘法定理

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A),\quad P(A)>0,$$
$$P(AB)=P(B)P(A\mid B),\quad P(B)>0,$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1}).$$

3. 全概率公式

设 $B_iB_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j,P(B_j)\neq 0,\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i=\Omega$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A\mid B_i).$$

4. 贝叶斯公式(逆概率公式)

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j)P(A\mid B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

5. 事件的独立性

设 A,B 是两事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A,B 相互独立.

若 A,B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 各对事件均相互独立.

6. 独立试验序列概型——伯努利概型

设事件 A 在每次试验中发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 次独立的重复试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P(\text{“}A\text{ 恰好发生 }k\text{ 次”})=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},\quad q=1-p,k=1,2,\cdots,n.$$

五、重点与难点

1. 重点

概率的定义、性质、概率计算及事件的独立性.

2. 难点

判别事件概率的类型、条件概率、全概率公式及贝叶斯公式的应用.

1.2 典型习题解析

1. 填空题

(1) 同时掷两颗骰子，记录两颗骰子出现的点数之和，则随机试验的样本空间为________.

解 $\Omega=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

(2) 将一根单位长的细棍任意分为两段，记录各段的长度，则随机试验的样本空间为________.

解 记 x 为第一段长度，y 为第二段长度，则

$$\Omega=\{(x,y)\mid x+y=1,\text{ 且 }0<x<1,0<y<1\}.$$

(3) 若 A,B,C 为 3 个事件，则 A,B 同时发生，而 C 不发生，可表示为________；A,B,C 最多有一个发生，可表示为________________.

解 A,B 同时发生，而 C 不发生，可表示为 $AB\bar{C}$；A,B,C 最多有一个发生，可表示为 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

(4) 掷一枚硬币，令 A_i 表示“第 i 次为正面朝上”，$i=1,2,3$. 则 $A_1A_2A_3$ 表示________；$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ 表示________；$A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示________________.

解 $A_1A_2A_3$ 表示“三次均为正面朝上”；$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ 表示“三次均为反面朝上”；$A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示“三次中至少有一次正面朝上”.

(5) 若 A,B 为互不相容的事件，且 $P(A)=0.2,P(B)=0.6$，则 $P(A\cup B)=$________；$P(AB)=$________；$P(A\cup\bar{B})=$________；$P(A\bar{B})=$________；$P(\bar{A}\bar{B})=$________.

解 因为 A,B 互不相容，所以 $AB=\varnothing$，$A\bar{B}=A-AB=A$，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.2 + 0.6 - 0 = 0.8;$$
$$P(AB) = 0;$$
$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B}) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.4;$$
$$P(A\bar{B}) = P(A) = 0.2;$$
$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.2.$$

(6) 若 A,B 为两个相互独立的事件,且 $P(A)=0.3$,$P(B)=0.4$,则 $P(AB)=$________;$P(A\cup B)=$________;$P(\bar{A}\cap\bar{B})=$________;$P(\bar{A}B)=$________;$P(A|\bar{B})=$________.

解 因为 A、B 相互独立,所以 $P(AB)=P(A)P(B)$,$\bar{A}B=B-AB$,则

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.12;$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3 + 0.4 - 0.12 = 0.58;$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.58 = 0.42;$$
$$P(\bar{A}B) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = 0.4 - 0.12 = 0.28;$$
$$P(A \mid \bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(\bar{B})} = \frac{0.18}{0.6} = 0.3.$$

(7) 设 A,B 为两事件,$P(A)=0.7$,$P(B)=0.6$,$A\supset B$,则 $P(AB)=$________;$P(A\cup B)=$________;$P(A\bar{B})=$________;$P(A|\bar{B})=$________;$P(A|B)=$________.

解 $P(AB)=P(B)=0.6$;

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(B)=0.7;$$
$$P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(B)=0.1;$$
$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\bar{B})}=\frac{0.1}{0.4}=0.25;$$
$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.6}{0.6}=1.$$

(8) 已知 $P(A)=0.5$,$P(B)=0.6$,$P(B|A)=0.8$,则 $P(\bar{A}\bar{B})=$________.

解 因为 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.8$,所以 $P(AB)=0.4$,则

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 0.3.$$

(9) 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$,$P(AB)=P(AC)=0$,$P(BC)=\dfrac{1}{8}$,则 A,B,C 至少有一个发生的概率为________.

解 因为 $P(AB)=P(AC)=0$,所以 $P(ABC)=0$,则

$$\begin{aligned} P(A,B,C\text{至少有一个发生}) &= P(A \cup B \cup C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) \\ &\quad - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - 0 - \frac{1}{8} + 0 = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

(10) 一批产品由 45 件正品、5 件次品组成，现从中任取 3 件产品，其中恰有 1 件次品的概率为________.

解 基本事件总数为 $n=C_{50}^3$，所涉事件数为 $m=C_5^1C_{45}^2$，从而所求概率为

$$p=\frac{m}{n}=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}=0.2526.$$

2. 单项选择题

(1) 某人射击 3 次，事件 A_i 表示第 i 次击中($i=1,2,3$)，则表示恰好击中一次的是(　　).

A. $A_1\cup A_2\cup A_3$　　B. $\Omega-\overline{A_1A_2A_3}$

C. $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$　　D. $\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

解 $A_1\cup A_2\cup A_3$，$\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 都表示至少击中一次，$\Omega-\overline{A_1A_2A_3}=A_1A_2A_3$ 表示都击中，$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 表示恰好击中一次，故选 C.

(2) 若事件 A,B 满足 $A\subset B$，则(　　).

A. A 与 B 同时发生　　B. A 发生时则 B 必发生

C. B 发生时则 A 必发生　　D. A 不发生则 B 总不发生

解 由事件包含关系的定义易知应选 B.

(3) 设 A,B,C 是三个事件，与事件 A 互斥的事件是(　　).

A. $\overline{A}B\cup A\overline{C}$　　B. $\overline{A(B\cup C)}$　　C. $\overline{ABC}$　　D. $\overline{A\cup B\cup C}$

解 $(\overline{A}B\cup A\overline{C})A=\overline{A}BA\cup A\overline{C}A=\varnothing\cup A\overline{C}=A\overline{C}$；

$\overline{A(B\cup C)}A=(\overline{A}\cup(\overline{B\cup C}))A=\overline{A}A\cup(\overline{B\cup C})A=(\overline{B\cup C})A=\overline{B}\overline{C}A$；

$\overline{ABC}A=(\overline{A}\cup\overline{BC})A=\overline{A}A\cup\overline{BC}A=\overline{BC}A$；

$(\overline{A\cup B\cup C})A=(\overline{A}\overline{B}\overline{C})A=\varnothing$，

仅有选项 D 与事件 A 的交集一定是空集，故选 D.

(4) 设 A,B 为任意两个事件，则 $P(A-B)$ 等于(　　).

A. $P(B)-P(AB)$　　B. $P(A)-P(B)+P(AB)$

C. $P(A)-P(AB)$　　D. $P(A)-P(B)-P(AB)$

解 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，故选 C.

(5) 设事件 A 与 B 的概率大于零，且 A 与 B 为对立事件，则不成立的是(　　).

A. A 与 B 互不相容　　B. A 与 B 相互独立

C. A 与 B 互不独立　　D. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容

解 A 与 B 为对立事件，$A\cup B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$，因此 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$，所以 A 与 B 互不相容，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容，又 $P(AB)=0$，$P(A)P(B)>0$，$P(AB)\neq P(A)P(B)$，则 A 与 B 互不独立，故选 B.

(6) 设 A,B 为任意两个事件，则下列关系式成立的是(　　).

A. $(A\cup B)-B=A$　　B. $(A\cup B)-B\supset A$

C. $(A\cup B)-B\subset A$　　D. $(A-B)\cup B=A$

解 $(A\cup B)-B=A-B\subset A$，$(A-B)\cup B=A\cup B$，故选 C.

(7) 设 A 与 B 为两个事件，$P(A)\neq P(B)>0$，且 $A\supset B$，则一定成立的关系式是(　　).

A. $P(A|B)=1$　B. $P(B|A)=1$　C. $P(B|\bar{A})=1$　D. $P(A|\bar{B})=1$

解 因为 $P(A)\neq P(B)>0$，且 $A\supset B$，所以 $P(A)>P(B)$，则

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1,\quad P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}<1,$$

$$P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=0,\quad P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(B)}{1-P(B)}\leqslant 1,$$

故选 A.

(8) 设 A,B 是两个事件，$P(A)>0$，$P(B)>0$，则当下面的条件(　　)成立时，A 与 B 一定独立.

A. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$　　B. $P(B|A)=0$

C. $P(A|B)=P(B)$　　D. $P(A|B)=P(\bar{A})$

解 若 $P(B|A)=0$，则 $P(AB)=0\neq P(A)P(B)$，不独立；

若 $P(A|B)=P(B)$，则 $P(AB)=P(B)P(B)$，不独立；

若 $P(A|B)=P(\bar{A})$，则 $P(AB)=P(B)P(\bar{A})$，也不独立.

由独立性等价定理可知 A 选项是正确的.

(9) 若 A,B 是两个任意事件，且 $P(AB)=0$，则(　　).

A. A 与 B 互不相容　　B. AB 是不可能事件

C. $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$　　D. AB 未必是不可能事件

解 概率为 0 的事件，不一定不发生，因此 A,B 选项错误，正确选项为 D.

(10) 设随机事件 A,B,C 两两互斥，且 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.4$，则 $P(A\cup B-C)=$(　　).

A. 0.5　B. 0.1　C. 0.44　D. 0.3

解 A,C 互斥，B,C 互斥，所以 $A\cup B$ 与 C 互斥，则

$$P(A\cup B-C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.5,$$

故选 A.

(11) 设 A,B 为两事件，则 $(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})$ 表示(　　).

A. 必然事件　　B. 不可能事件

C. A 与 B 恰有一个发生　　D. A 与 B 不同时发生

解 $(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})=(A\cup B)(\overline{AB})=(A\cup B)(\Omega-AB)=(A\cup B)-AB=A\bar{B}\cup\bar{A}B$，故选 C.

(12) 若 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(A\cup B)=$(　　).

A. 0.5　　B. 0.6　　C. 0.7　　D. 0.8

解　$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3, P(AB)=0.2$，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7,$$

故选 C.

(13) 设 A,B 为任意两个随机事件，且 $A\subset B, P(B)>0$，则下列选项必然成立的是(　　).

A. $P(A)<P(A|B)$　　B. $P(A)\leqslant P(A|B)$

C. $P(A)>P(A|B)$　　D. $P(A)\geqslant P(A|B)$

解　$0<P(B)\leqslant 1, P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}\geqslant P(A)$，故选 B.

(14) 设 $P(A)=0.8, P(B)=0.7, P(A|B)=0.8$，则下列结论成立的是(　　).

A. A 与 B 独立　　B. A 与 B 互不相容

C. $B\supset A$　　D. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

解　$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=0.8, P(AB)=0.56$，则 B,D 错误，而 $P(A)>P(B)$，故 C 错误，又 $P(AB)=P(A)P(B)=0.56$，故选 A.

(15) 每次试验失败的概率为 $p(0<p<1)$，则在 3 次独立的重复试验中至少成功一次的概率为(　　).

A. $3(1-p)$　　B. $(1-p)^3$　　C. $1-p^3$　　D. $C_3^1(1-p)p^2$

解　$A_i=$"第 i 次试验失败"$(i=1,2,3)$, $P(A_i)=p$，则至少成功一次的概率为

$$P(\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3)=P(\overline{A_1A_2A_3})=1-P(A_1A_2A_3)=1-p^3,$$

故选 C.

(16) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好是第 2 次命中目标的概率为(　　).

A. $3p\,(1-p)^2$　　B. $6p\,(1-p)^2$

C. $3p^2\,(1-p)^2$　　D. $6p^2\,(1-p)^2$

解　$P\{$前 3 次恰有 1 次击中目标，第 4 次击中目标$\}=C_3^1p(1-p)^2p=3p^2(1-p)^2$，选 C.

(17) 掷两颗骰子，出现点数之和是 3 的概率为(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{18}$　　D. $\dfrac{1}{36}$

解　基本事件总数为 $m=36$，所涉事件数为 $n=2$，从而所求概率为 $p=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$，故选 C.

(18) 已知 A,B 两事件的概率都是 $\dfrac{1}{2}$，则下列结论成立的是(　　).

A. $P(A\cup B)=1$　　B. $P(\overline{A}\overline{B})=1$

C. $P(\overline{A}\overline{B})=P(AB)$　　D. $P(AB)=\dfrac{1}{2}$

解 题中 $P(A)=P(B)=0.5$，但没有条件 $AB=\varnothing$，不能认为是对立事件，又

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=P(AB),$$

故选 C.

(19) 设 A,B 和 C 为三个随机事件，$P(AB)>0$ 且有 $P(C|AB)=1$，则下列结论正确的是(　　).

A. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　B. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

C. $P(C)=P(AB)$　　D. $P(C)=P(A\cup B)$

解 由 $P(C|AB)=1$，有 $C\supset AB$，$P(C)\geqslant P(AB)$，又

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\quad 且\quad P(A\cup B)\leqslant 1,$$

故 $P(C)\geqslant P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$，选 B.

(20) A,B,C 为相互独立事件，$0<P(C)<1$，则下列 4 对事件中不相互独立的是(　　).

A. $\overline{A\cup B}$与C　　B. $\overline{A-B}$与C　　C. $\overline{AB}$与C　　D. $\overline{AC}$与$\overline{C}$

解 由 A,B,C 为相互独立事件，故其中任意两个事件的和、差、交、并、逆与另一个事件或其逆是相互独立的，故选 D.

3. 设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$，$C=\{5,6,7,8\}$，求：(1)$AB$；(2)$\overline{A}\cup\overline{B}$；(3)$\overline{\overline{A}\overline{B}}$；(4)$\overline{A\,\overline{BC}}$；(5)$\overline{A\overline{BC}}$；(6)$(A\cup B)C$；(7)$\overline{A(B\cup C)}$；(8)$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}}$.

解 (1) $AB=\{1,3\}$；

(2) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,4,5,6,7,8,9,10\}$；

(3) $\overline{\overline{A}\overline{B}}=\{1,2,3,4,5,7,9\}$；

(4) $\overline{A\,\overline{BC}}=\{5,6,7,8,9,10\}$；

(5) $\overline{A\overline{BC}}=\{1,3,5,6,7,8,9,10\}$；

(6) $(A\cup B)C=\{5,7\}$；

(7) $\overline{A(B\cup C)}=\{2,4,5,6,7,8,9,10\}$；

(8) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}}=ABC=\varnothing$.

4. 如图 1.1，令 A_i 表示“第 i 个开关闭合”，$i=1,2,\cdots,6$，试用 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 表示下列事件：

(1)“系统Ⅰ为通路”；

(2)“系统Ⅱ为通路”.

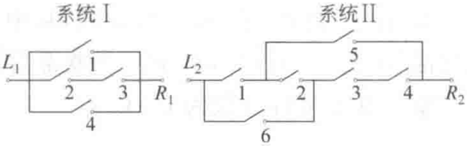

图 1.1

解 (1) $A_1\cup A_2A_3\cup A_4$；

(2) $A_1A_5\cup A_1A_2A_3A_4\cup A_6A_3A_4\cup A_6A_2A_5$.

5. 若 $P(A)=\alpha$，$P(B)=\beta$，$P(\overline{A}\cup\overline{B})=\gamma$. 求：(1)$P(AB)$；(2)$P(\overline{A}B)$；(3)$P(\overline{A}\cup B)$；(4)$P(\overline{A}\overline{B})$.

解 (1) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=\gamma, P(AB)=1-\gamma$;

(2) $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\beta-1+\gamma$;

(3) $P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=1-\alpha+\beta-(\beta-1+\gamma)=2-\alpha-\gamma$;

(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=2-\alpha-\beta-\gamma$.

6. 从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张，求下列事件的概率：(1)4 张中恰有 2 张“K”；(2)至少有 2 张“K”；(3)4 张牌花色各不相同.

解 基本事件总数为 $n=C_{52}^4$.

(1) 所涉事件是 4 张牌中恰有 2 张“K”，总数为 $m=C_4^2\cdot C_{48}^2$，所以 $p_1=\dfrac{C_4^2C_{48}^2}{C_{52}^4}$；

(2) 所涉事件是 4 张牌中至少有 2 张“K”，包含 2 张、3 张、4 张的可能性，其总数为 $m=C_4^2C_{48}^2+C_4^3C_{48}^1+C_4^4C_{48}^0$，所以 $p_2=\dfrac{C_4^2C_{48}^2+C_4^3C_{48}^1+C_4^4}{C_{52}^4}$；

(3) 设想分步骤依次抽取“黑桃”“红心”“草花”“方片”，由乘法原理，有 $m=C_{13}^1\cdot C_{13}^1\cdot C_{13}^1\cdot C_{13}^1$，所以 $p_3=\dfrac{(C_{13}^1)^4}{C_{52}^4}$.

7. 在桥牌比赛中，把 52 张牌任意地分发给东、南、西、北四家，求北家的 13 张牌中：(1)恰有 A,K,Q,J 各一张，其余全为小牌的概率；(2)四张牌 A 全在北家的概率.

解 设事件 A 表示“北家的 13 张牌中恰有 A,K,Q,J 各一张，其余为小牌”，事件 B 表示“四张 A 全在北家”，则有

基本事件总数 $n=C_{52}^{13}$；

事件 A 所含的基本事件数为 $m_1=C_4^1\times C_4^1\times C_4^1\times C_4^1\times C_{36}^9$；

事件 B 所含的基本事件数 $m_2=C_4^4\times C_{48}^9$，

故所求的概率为

$$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{C_4^1\times C_4^1\times C_4^1\times C_4^1\times C_{36}^9}{C_{52}^{13}}\approx 0.038,$$

$$P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{C_4^4\times C_{48}^9}{C_{52}^{13}}\approx 0.0026.$$

8. 在 40 件产品中有 3 件次品，从中任取 2 件，求：(1)“恰有一件次品”的概率；(2)“全是次品”的概率；(3)“至少有一件次品”的概率；(4)“无次品”的概率.

解 基本事件总数为 $n=C_{40}^2$.

(1) m(恰有一件次品)$=C_{37}^1\cdot C_3^1$，所以 $p_1=\dfrac{C_{37}^1C_3^1}{C_{40}^2}=\dfrac{37\times3\times2}{40\times39}=\dfrac{37}{260}$；

(2) m(全是次品)$=C_3^2$，所以 $p_2=\dfrac{C_3^2}{C_{40}^2}=\dfrac{3\times2}{40\times39}=\dfrac{1}{260}$；

(3) m(至少有一件次品)$=C_{37}^1\cdot C_3^1+C_3^2$，所以 $p_3=\dfrac{C_{37}^1C_3^1+C_3^2}{C_{40}^2}=\dfrac{37+1}{260}=\dfrac{19}{130}$；

(4) 事件“无次品”与事件“至少有一件次品”对立，故 $p_4=1-\frac{19}{130}=\frac{111}{130}$.

9. 甲袋中有 3 只白球、7 只红球、15 只黑球，乙袋中有 10 只白球、6 只红球、9 只黑球，从两袋中分别任取一球，求两球颜色相同的概率.

解 记 A_1,A_2,A_3 分别是“从甲袋中取出白球、红球、黑球”，则

$$P(A_1)=\frac{3}{25},\quad P(A_2)=\frac{7}{25},\quad P(A_3)=\frac{15}{25}.$$

另记 B_1,B_2,B_3 分别是“从乙袋中取出白球、红球、黑球”，则

$$P(B_1)=\frac{10}{25},\quad P(B_2)=\frac{6}{25},\quad P(B_3)=\frac{9}{25}.$$

显然 A_1,A_2,A_3 互不相容，B_1,B_2,B_3 互不相容，所以有

$$\begin{aligned}P(\text{“两球颜色相同”})&=P(A_1B_1\cup A_2B_2\cup A_3B_3)\\&=P(A_1B_1)+P(A_2B_2)+P(A_3B_3)\\&=\frac{3}{25}\cdot\frac{10}{25}+\frac{7}{25}\cdot\frac{6}{25}+\frac{15}{25}\cdot\frac{9}{25}=\frac{207}{625}.\end{aligned}$$

10. 某地铁车站每 5 分钟有一趟列车到站，乘客到达车站的时刻是任意的，求一乘客候车时间不超过 3 分钟的概率.

解 几何概型问题. 设 x 表示候车时间，则 x 可取$[0,5]$内的任意值，故总的可能区域 G 的度量为 5，令 A 表示乘客候车时间不超过 3 分钟，则所涉事件中 $0\leqslant x\leqslant 3$，其 A 的度量为 3，所以有乘客候车时间不超过 3 分钟的概率 $p=\frac{3}{5}=0.6$.

11. 在$(0,1)$中任取两个数，求下列事件的概率：(1)两数和小于 1.5；(2)两数积小于 0.25；(3)两数中最大者小于 0.5；(4)两数中最小者小于 0.5.

解 令 x,y 分别表示任取的两个数，则 $0<x<1,0<y<1$，样本空间为 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，其度量如图 1.2 中正方形区域.

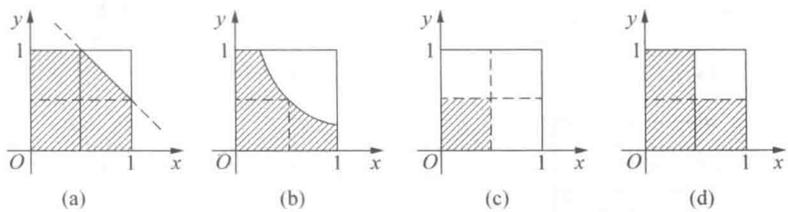

图 1.2

(1) 令 A 表示“$x+y<1.5$”，则 A 的面积如图 1.2(a)中阴影部分，所以

$$P(A)=\frac{7}{8}=0.875;$$

(2) 令 B 表示“$xy<0.25$”，则 B 的面积如图 1.2(b)中阴影部分，所以