高等院校“十三五”规划教材

概率论与数理统计

伍庆成　袁春燕　李　鹤　主编

湖南师范大学出版社

概率论与数理统计

主　编　伍庆成　袁春燕　李　鹤
副主编　邓　涛　黄绍东　李一帆
　　　　赵桂平

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/伍庆成，袁春燕，李鹤主编
.—长沙：湖南师范大学出版社，2017.1
ISBN 978-7-5648-2781-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①伍…②袁…③李… Ⅲ.①概率论
—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.
①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 011239 号

概率论与数理统计

GAILVLUN YU SHULI TONGJI

伍庆成　袁春燕　李　鹤　主编

◇策划统筹：米承琴
◇责任编辑：赵晓磊　颜李朝
◇责任校对：王子悦
◇装帧设计：天利排版
◇出版发行：湖南师范大学出版社
　　地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
　　电话/0731.88873070　88873071
◇经销：各地新华书店
◇印刷：三河市鑫鑫科达彩色印刷包装有限公司
◇开本：787mm×1092mm　1/16
◇印张：11.5
◇字数：230 千字
◇版次：2017 年 1 月第 1 版　2017 年 1 月第 1 次印刷
◇书号：ISBN 978-7-5648-2781-6
◇定价：29.80 元

前　言

概率论与数理统计是研究和提示随机现象统计规律性的数学学科，是高等院校理工科专业一门重要的基础理论课。随着现代科学技术的发展，概率论与数理统计在自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产等领域中得到了越来越广泛的应用。

作为一门应用数学学科，概率论与数理统计不仅具有数学所共有的特点，即高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性，而且具有更独特的思维方法。为使初学者尽快熟悉这种独特的思维方法，更好地掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论、基本运算及处理随机数据的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析解决实际问题的能力和创造性思维能力，我们编写了该教材。

在编写过程中我们认真贯彻教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的要求精神，并严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新修订的工科及经济管理类《本科数学基础课程（概率论与数理统计）基本要求》，同时参考了近几年国内外出版的《概率论与数理统计》相关教材。

本教材在编写过程中力求体现以下主要特色：

（1）在满足基本课时（54学时）要求的内容基础上，适当淡化理论推导过程；

（2）弱化技巧性训练，重在使学生理解和掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法；

（3）强调数学知识的应用，力求学以致用、学后会用，增强学生学习数学的信心与兴趣。

（4）书中精选了大量来自各行各业的例题，并做了较详细的分析与解答，以适用各专业的需求。另外，书中对某些重点和难点也做了必要的阐述，以帮助学生理解。最后各章配有习题，书后有答案，以供学生检查学习效果之用。

本书知识系统详略得当，举例丰富，讲解透彻，难度适宜，可作为应用型院校工科类、理科类（非数学专业），以及经济管理类相关专业的教材使用。

由于编者水平有限，本书难免存有不足之处，欢迎专家读者批评指正。

编　者

目　录

第1章　随机事件及其概率

现实世界存在着两类现象：一类是确定性现象. 例如，在一个标准大气压下，把纯水加热到100℃，水必然沸腾；早晨，太阳从东方升起；同性电荷必相互排斥；等等. 另一类是非确定性现象. 其特点是在一定条件下，重复进行试验，其结果未必相同. 例如，自动车床上加工出来的零件，可能是合格品也可能是次品；在相同条件下，抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上；等等.

本章主要研究能大量重复的随机现象，但也十分注意研究不能重复的随机现象，因为后者在我们经济生活中占有重要地位.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机现象与随机事件

在实际工作和生活中，有些现象在一定条件下必然会发生或必定不会发生. 例如，在室温下，生铁必定不会熔化. 这类在一定条件下必然会发生或必定不会发生的现象称为确定性现象. 然而，又存在与确定性现象有着本质区别的另一类现象. 例如，一台电视机的寿命（从开始使用到第一次维修的时间）；某城市一天内发生交通事故的次数. 这类在一定条件下有多种可能结果，且事先无法预知哪种结果会出现的现象称为随机现象.

人们经过长期实践并深入研究之后，发现随机现象虽然就每次试验或观察结果而言，具有不确定性，但在大量重复试验或观察下，其结果却呈现出某种规律性. 例如，多次重复投掷一枚硬币，得到正面向上的次数大致占总投掷数的$\frac{1}{2}$左右. 把这种在大量重复试验和观测下，其结果所呈现出的固有规律性，称为统计规律性. 概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科.

研究随机现象的统计规律性，需要在相同的条件下重复地进行多次试验（或观察），称为随机试验，简称试验. 它具有如下3个特点.

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行.

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以明确试验的所有可能结果.

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在随机试验中,可能出现的结果,称为随机事件,简称为事件,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.例如,抛一枚硬币的试验中,$A=$"正面向上",就是一随机事件,在随机事件中,有的是由某些事件复合而成的,而有些事件则不能分解为其他事件组合的最简单的随机事件称为基本事件.例如,掷一颗骰子的试验中,观察其出现的点数:"1 点""2 点"…"6 点"都是基本事件,"奇数点"也是随机事件,但它不是基本事件,它是由"1 点""3 点"和"5 点"这 3 个基本事件组成的,只要这 3 个基本事件中的一个发生,"奇数点"这个事件就发生.在每次试验中必然要发生的事件,称为必然事件;必然不发生的事件,称为不可能事件.

称随机试验中每一种可能的结果为一个样本点,用 ω 表示.样本点的全体组成的集合称为称为该随机试验的样本空间,记作 Ω.引入样本空间后,就可以从集合论的角度来描述随机事件及它们之间的关系和运算.随机试验中任意一个事件就是样本空间的子集,基本事件是由一个样本点组成的单元集,集合 Ω 和 $\varnothing$ 分别称为必然事件和不可能事件.

例 1 随机试验 E:10 件产品中有 8 件正品、2 件次品,无放回地任意从中抽取两件,并且一次抽取一件,观察正品、次品出现的情况.请写出这次试验的所有基本事件,并用大写的英文字母表示.

解 所有基本事件:$A_1=\{$正品,正品$\}$, $A_2=\{$正品,次品$\}$,

$A_3=\{$次品,正品$\}$, $A_4=\{$次品,次品$\}$.

例 2 为了检查一批产品的质量情况,从中随机抽取 100 件来检查,结果所产生的基本事件共有多少个?

解 基本事件数为 101 个,分别为:

$A_0=\{$没有次品$\}$,$A_1=\{$有 1 件次品$\}$,$A_2=\{$有 2 件次品$\}$,$\cdots$,$A_{100}=\{$有 100 件次品$\}$;

或统一表示为:$A_i=\{$有 i 件次品$\}(i=0,1,2,3,\cdots,100)$.

1.1.2 事件的关系与运算

概率论中的事件是赋予了具体含义的集合,因此,事件间的关系与运算可以按照集合论中集合间的关系与运算来处理.下面引进事件之间的几种主要关系及作用在事件上的运算.

1. 包含关系

如果事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 被事件 B 所包含,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.显然,对任一事件 A,有 $\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$.

2. 相等关系

如果事件 B 包含事件 A,同时事件 A 也包含事件 B,即 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

3. 事件的并(和)

两个事件 A 和 B 至少有一个发生,称为事件 A 与事件 B 的并(和),它是由事件 A 和

B 的所有样本点构成的集合. 记作 $A+B$ 或 $A\cup B$.

事件和的概念,可以推广到 n 个事件的情况,事件 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 称为事件 A_1, $A_2,\cdots,A_n$ 之和,表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生.

4. 事件的交(积)

两个事件 A 与 B 同时发生,称为事件 A 与事件 B 的交(积),记作 AB 或 $A\cap B$.

事件积的概念,也可以推广到 n 个事件的情况,事件 $A_1A_2\cdots A_n$ 称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之积,表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

5. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生,称为事件 A 与事件 B 的差. 它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点所组成的集合,记作 $A-B$.

6. 互不相容(互斥)事件

事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,称事件 A 与事件 B 互不相容(或称互斥). 互不相容事件 A 与 B 没有公共样本点. 显然,基本事件间是互不相容的.

7. 对立事件

两个事件 A 和 B 满足 $A+B=\Omega$ 及 $AB=\varnothing$,则称 A,B 互为对立事件,记作 $B=\overline{A}$.
显然,A 的对立事件 $\overline{A}$,表示 A 不发生.

对立事件有下列性质:

$$A\overline{A}=\varnothing, A+\overline{A}=\Omega, \overline{A}=\Omega-A, \overline{\overline{A}}=A.$$

由此可得,对立事件必为互斥事件,反之不成立.

8. 完备事件组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互斥,且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组.

例 3　设 A、B、C 是 Ω 中的随机事件,则

事件"A 与 B 发生,C 不发生"可表示为:$AB\overline{C}$;

事件"三个事件中至少有两个发生"可表示为:$AB+BC+CA$;

事件"三个事件中恰好有两个发生"可表示为:$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$;

事件"三个事件中有不多于一个事件发生"可表示为:$\overline{ABC}+\overline{A}BC+A\overline{BC}+\overline{A}B\overline{C}$.

应注意的是其表示方法并不唯一!

事件的运算规律如下:

交换律:$A+B=B+A, AB=BA$;

结合律:$A+(B+C)=(A+B)+C, (AB)C=A(BC)$;

分配律:$(A+B)C=AC+BC$.

例 4　掷一颗骰子的试验,观察出现的点数. 事件 A 表示"奇数点",B 表示"点数小于 5",C 表示"小于 5 的偶数点". 用集合的列举法表示下列事件:

$$\Omega, A, B, C, A+B, A-B, AB, AC, C-A, \overline{A}+B.$$

解 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$； $A=\{1,3,5\}$； $B=\{1,2,3,4\}$；
$C=\{2,4\}$； $A+B=\{1,2,3,4,5\}$； $A-B=\{5\}$；
$AB=\{1,3\}$； $AC=\varnothing$； $C-A=\{2,4\}$
$\overline{A}+B=\{1,2,3,4,6\}$.

例 5 从一批产品中每次取出一个产品进行检验，作不放回抽样，用 A_i 表示事件："第 i 次取到合格品"($i=1,2,3$). 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1)3 次都取得合格品；

(2)3 次中至少有一次取到合格品；

(3)3 次中恰有两次取得合格品；

(4)3 次中最多有一次取到合格品.

解 (1) 事件"3 次都取到合格品"意味着事件 A_1,A_2,A_3 同时发生，所以这一事件可表示为 $A_1A_2A_3$.

(2) 事件"3 次中至少有一次取到合格品"就是事件 A_1,A_2,A_3 至少有一个发生，所以这一事件可表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$，也可以表示为

$$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1A_2A_3.$$

(3) 事件"3 次中恰有两次取到合格品"意味着两次取得合格品，而另一次取得不合格品，所以这一事件可表示为 $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$.

(4) 事件"3 次中最多有一次取到合格品"就是事件 A_1,A_2,A_3 中至少有两个未发生，所以这一事件可表示为$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_2}\,\overline{A_3}$，或用$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ 表示.

1.2 事件的概率

1.2.1 事件的概率

随机事件的发生是带有偶然性的. 但随机事件发生的可能性还是有大小之别的，是可以设法度量的. 而在生活、生产和经济活动中人们很关心一个随机事件发生的可能性大小. 例如：

(1) 抛一枚硬币，出现正面与出现反面的可能性是相同的，各为 1/2. 足球裁判就是用抛硬币的方法让双方队长选择场地，以示机会均等.

(2) 某厂试制成功一种新止痛片在未来市场的占有率是多少呢?市场占有率高，就应多生产，获得更多利润；市场占有率低，就不能多生产，否则会造成积压，不仅影响资金周转，而且还要花钱去贮存与保管. 市场占有率对厂长组织生产太重要了.

市场占有率、中奖率以及常见的废品率、命中率、男婴儿出生率等都是用来度量随机事件发生的可能性大小. 尽管用的术语不同，但其共同点是用 0 到 1 间的一个数(也称为

比率）来表示一个随机事件发生的可能性大小. 在概率论中，这种比率就是概率的原形. 为了使这种比率真正成为概率，以致在今后概率运算中不引起麻烦，还需对这种比率增加某种可加性的要求. 具体请看下面给出的概率定义.

定义 1.1　在一个随机现象中，用来表示任一个随机事件 A 发生可能性大小的实数（即比率）称为该**事件的概率**，记为 $P(A)$，并规定：

（1）**非负性公理**：对任一事件 A，必有 $P(A)\geqslant 0$；

（2）**正则性公理**：必然事件的概率 $P(\Omega)=1$；

（3）**可加性公理**：若 A_1 与 A_2 是两个互不相容事件（$A_1A_2=\varnothing$），则有

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2).$$

这就是著名的概率的公理化定义，它虽然刻划了概率的本质，但没有告诉人们如何去确定概率. 历史上概率的古典定义、概率的统计定义和概率的主观定义都有各自确定概率的方法. 所以，在有了公理化定义之后，把它们看作确定概率的三种方法倒是很恰当的.

1.2.2　排列与组合概要

排列与组合是两类计数公式，它们的推导都基于如下两条计数原理.

1. 乘法原理

如果某件事需经 k 个步骤才能完成，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，…，做第 k 步有 m_k 种方法，那么完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ 种方法.

例如，甲城到乙城有 3 条旅游线路，由乙城到丙城有 2 条旅游线路，那么从甲城经乙城去丙城共有 $3\times 2=6$ 条旅游线路.

2. 加法原理

如果某件事可由 k 类不同办法之一去完成，在第一类办法中又有 m_1 种完成方法，在第二类办法中又有 m_2 种完成方法，…，第 k 类办法中又有 m_k 种完成方法，那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种方法.

例如，由甲城到乙城去旅游有三类交通工具：汽车、火车和飞机. 而汽车有 5 个班次，火车有 3 个班次，飞机有 2 个班次，那么从甲城到乙城共有 $5+3+2=10$ 个班次供旅游者选择.

3. 排列

从 n 个不同元素中任取 $r(r\leqslant n)$ 个元素排成一列称为一个排列，按乘法原理，此种排列共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$ 个，记为 P_n^r. 若 $r=n$ 则称为**全排列**，全排列数共有 $n!$ 个，记为 P_n.

4. 重复排列

从 n 个不同元素中每次取出一个，放回后再取下一个，如此连续取 r 次所得的排列称为重复排列，此种重复排列数共有 n^r 个. 注意，这里的 r 允许大于 n.

5. 组合

从 n 个不同元素中任取 $r(r \leqslant n)$ 个元素并成一组(不考虑其间顺序)称为一个组合，按乘法原理，此种组合总数为

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

并规定 $0! = 1$ 和 $C_n^0 = 1$.

6. 重复组合

从 n 个不同元素中每次取出一个，放回后再取下一个，如此连续取 r 次所得的组合称为重复组合，此种重复组合总数为 C_{n+r-1}^r.

上述四种排列组合及其总数计算公式将在古典概率计算中经常使用，这里不再举例说明，但应指出，在使用中要注意识别有序与无序、重复与不重复.

1.2.3 古典方法

古典方法是在经验事实的基础上对被考察事件发生可能性进行符合逻辑分析后得出该事件的概率. 这种方法简单、直观、不需要做试验，但只能在一类特定随机现象中使用. 其基本思想如下.

(1) 所涉及的随机现象只有有限个基本结果. 不妨设基本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，其中 n 为其基本结果的总数.

(2) 每个基本结果出现的可能性是相同的(简称等可能性). 确定一个随机现象的每个基本结果是等可能的，常凭经验事实和进行符合逻辑的分析. 例如，在掷骰子试验中，如果骰子是均匀的正六面体，那就没有理由认为其中一面出现机会比另一面更多一些. 故认为骰子各面出现的机会是等可能的.

(3) 假如被考察的事件 A 含有 k 个基本结果，则事件 A 的概率就是

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中含基本结果的个数}}{\Omega\text{ 中基本结果总数}}. \tag{1-1}$$

这种确定概率的方法曾是概率论发展初期的主要方法，故所得概率又称为古典概率. 它满足概率定义中的三条公理. 非负性公理是显然满足的. 必然事件概率按 $P(\Omega)$ 按 (1-1) 式计算必为 $\frac{n}{n} = 1$，故正则性公理成立. 最后，对两个互不相容事件 A_1 和 A_2，若有 $P(A_1) = \frac{k_1}{n}, P(A_2) = \frac{k_2}{n}$，这表明，事件 A_1 和 A_2 分别含有 k_1 和 k_2 个基本结果，由于 A_1 和 A_2 互不相容，故在 $k_1 + k_2$ 个基本结果中没有相同的基本结果，所以并事件 $A_1 \cup A_2$ 含有 $k_1 + k_2$ 个基本结果，这样一来，可得 $P(A_1 \cup A_2) = \frac{k_1 + k_2}{n} = P(A_1) + P(A_2)$，故可加性公理成立.

例 1 从 1 ～ 10 这 10 个自然数中任取一数. (1) 设事件 A 为“任取一数是偶数”，求 $P(A)$；(2) 设事件 B 为“任取一数是 5 的倍数”，求 $P(B)$.

解 取出的数可以是 1 ～ 10 这 10 个自然数中的任意一个，每一个数被取到的可能

性相同，如果将样本点任取一数字记为 $i(i=1,2,\cdots,10)$，则基本空间 Ω 含有 10 个样本点，即 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

(1) 事件 $A=\{2,4,6,8,10\}$，含有 5 个样本点，所以 $P(A)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 事件 $B=\{5,10\}$，含有 2 个样本点，所以 $P(B)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

例 2　袋内装有 5 个白球和 3 个黑球，从中任取两球. (1) 设事件 A 为“取到的球都是白球”，求 $P(A)$；(2) 设事件 B 为“恰取到 1 只黑球”，求 $P(B)$.

解　从 8 只球中随机地取出 2 只，共有 C_8^2 种取法. 于是样本点所含的基本结果总数是 $C_8^2=28$.

(1) 事件 A 发生，相当于在 5 个白球中随机地取 2 只，因而事件 A 所含的样本点个数是 $C_5^2=10$. 所以 $P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_8^2}=\dfrac{5}{14}$.

(2) 事件 B 发生，相当于取到 1 只白球和 1 只黑球，因而事件 B 所含的样本点个数是 $C_3^1C_5^1=15$. 所以 $P(B)=\dfrac{C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\dfrac{15}{28}$.

例 3　一次共发行 10000 张社会福利奖券，其中有 1 张特等奖、2 张一等奖、10 张二等奖、100 张三等奖，其他的不得奖，问购买 1 张奖券能中奖的概率是多少？

解　本题 $n=10000$，抽到任何一张奖券即为中奖(记为事件 A).

中奖奖券共有 $k=1+2+10+100=113$(张)，所求概率为 $P(A)=\dfrac{k}{n}=\dfrac{113}{10000}=0.0113$.

1.2.4　频率方法

频率方法是在大量重复试验中用频率去获得概率近似值的一个方法. 它是最常用、也是最基本的获得概率的方法. 频率方法的基本思想如下.

(1) 与考察事件 A 有关的随机现象是允许进行大量重复试验的.

(2) 假如在 N 次重复试验中，事件 A 发生 K_N 次，则事件 A 发生的频率为

$$P_N^*(A)=\frac{K_N}{N}=\frac{\text{事件 } A \text{ 发生的次数}}{\text{重复试验次数}}, \tag{1-2}$$

频率 $P_N^*(A)$ 的确能反映事件 A 发生可能性的大小，$P_N^*(A)$ 大意味着 A 发生的可能性大；$P_N^*(A)$ 大意味着 A 发生的可能性大. 另外，频率还具有非负性，必然事件 Ω 的频率必为 1，而对任意两个互不相容事件 A_1 与 A_2，若在 N 次重复试验中，A_1 出现 $K_N^{(1)}$ 次，A_2 出现 $K_N^{(2)}$ 次，那么并事件 $A_1\cup A_2$ 在这 N 次重复试验中必出现 $K_N^{(1)}+K_N^{(2)}$ 次，从而其频率有

$$P_N^*(A_1\cup A_2)=\frac{K_N^{(1)}+K_N^{(2)}}{N}=P_N^*(A_1)+P_N^*(A_2),$$

这些说明频率亦具有非负性、正则性和可加性.

(3) 频率 $P_N^*(A)$ 依赖于重复次数 N. 不同的 N，事件 A 的频率会不同，但人们的长期

实践表明，随着重复次数 N 的增加，频 $P_N^*(A)$ 会稳定在某一常数附近，这个频率的稳定值已与 N 无关，它就是事件 A 发生的概率 $P(A)$. 由频率的性质可以看到其稳定值(即概率)亦有类似性质.

(4) 在现实世界里，我们无法把一个试验无限次地重复下去，因此要获得事件 A 发生的频率的稳定值 $P(A)$ 是件很难的事情. 但在重复次数 N 较大时，**频率 $\boldsymbol{P_N^*(A)}$** 就很接近概率 $P(A)$. 在统计学中把频率称为概率的估计值，在实际中频率常当作概率近似值使用，例如，在足球比赛中，罚点球是一个扣人心弦的场面，若记事件 $A=$"罚点球射中球门"，A 的概率，即判罚点球的命中率 $P(A)$ 是多少?这可以通过重复试验所得数据资料计算频率而得概率估计值，曾经有人对1930年至1988年世界各地53274场重大足球比赛作了统计，在判罚的15382个点球中，有11172个射中，频率为 $\frac{11172}{15382}=0.726$，这就是罚点球命中概率 $P(A)$ 的估计值.

例 4 在掷一枚均匀硬币时，古典概率已给出，出现正面的概率为 0.5. 为了验证这一点，每个人都可以做大量的重复试验，图 1-1 记录了前 400 次掷硬币试验中频率 P^*(正面)的波动情况，在重复次数 N 较小时，P^* 波动剧烈，随着 N 的增大，P^* 波动的幅度在逐渐变小. 历史上有不少人做过更多次重复试验. 其结果(见表 1-1)表明，正面出现的频率逐渐稳定在 0.5. 这个 0.5 就是频率的稳定值，也是正面出现的概率. 这与用古典方法计算的概率是相同的.

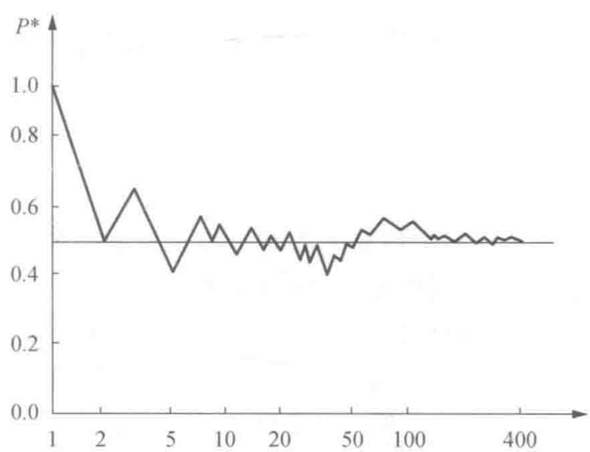

图 1-1

表 1-1

实验者	掷硬币次数	正面出现次数	频率
蒲来	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

1.3　概率的性质

利用概率的三条公理可以推出概率的所有性质，这里把一些常用性质推导出来，还有一些性质在以后章节中逐步导出.

定理 1-1　对任一事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明　因为 A 与 $\overline{A}$ 互不相容，且 $A \cup \overline{A} = \Omega$，故由可加性公理和正则性公理可得 $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$，移项后即得所要结果.

定理 1-2　不可能事件 $\varnothing$ 的概率为 0，即 $P(\varnothing) = 0$.

证明　因为不可能事件 $\varnothing$ 与必然事件 Ω 互为对立事件，故

$$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0.$$

例 1　抛两枚硬币，至少出现一个正面（记为事件 A_2）的概率是多少？

解　抛两枚硬币共有四个等可能基本结果：

（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）

事件 A_2 含有其中前三个基本结果，故 $P(A_2) = \dfrac{3}{4}$.

作为讨论，我们来考察 A_2 的对立事件 $\overline{A_2}$，它的含义是 $\overline{A_2}$ =“抛两枚硬币，都出现反面”. 它只含一个基本结果（反，反），于是 $P(\overline{A_2}) = \dfrac{1}{4}$，再用定理 1-1，可得

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - \frac{1}{4} = 0.75.$$

由此可见，两条不同思路获得相同结果，但相比之下，后一条思路更容易实现些，因为 $\overline{A_2}$ 所含的基本结果比 A_2 所含基本结果要少一些，从而计算也容易一些，这种思路在抛更多枚硬币时更易显露出其方便的特点，例如，在抛五枚硬币时，至少出现一个正面（记为 A_5）的概率为

$$P(A_5) = 1 - P(\overline{A_5}) = 1 - \frac{1}{2^5} = 0.9688.$$

因为对立事件 $\overline{A_5}$ 表示“五枚硬币都出现反面”，它在 $2^5 = 32$ 个等可能结果中仅含其中一个，故很易算得 $P(\overline{A_5}) = 2^{-5}$.

定理 1-3　对 n 个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

证明　在 $n = 3$ 时，任意三个互不相容事件的并可改写为

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3,$$

并且并事件 $A_1 \cup A_2$ 与 A_3 仍为互不相容的事件，于是由可加性公理得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3). \end{aligned}$$

一般地,通过上面那样进行合并及反复运用可加性公理就可推得上述一般结论.

例 2 一批产品共 100 件,其中有 5 件不合格品,现从中随机抽出 10 件,其中最多有 2 件不合格品的概率是多少?

解 设 A_i 表示事件"抽出 10 件中恰有 i 件不合格品". 于是所求事件 $A=$"最多有 2 件不合格品"可表示为

$$A = A_0 \cup A_1 \cup A_2,$$

并且 A_0, A_1, A_2 为三个互不相容事件,由定理 1-3 知,若能获 A_0, A_1, A_2 等事件的概率,很快能算得事件 A 的概率,用古典方法可算得 A_i 的概率为

$$P(A_i) = \frac{C_5^i C_{95}^{10-i}}{C_{100}^{10}}, i = 0,1,2.$$

其中,$P(A_0) = \dfrac{C_{95}^{10}}{C_{100}^{10}} = \dfrac{95!}{10! \cdot 85!} \cdot \dfrac{10! \cdot 90!}{100!} = \dfrac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} = 0.5837;$

类似可算得 $P(A_1) = 0.3394;$ $P(A_2) = 0.0702.$

于是所求的概率为 $P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) = 0.5837 + 0.3394 + 0.0702$
$= 0.9933.$

定理 1-4 对任意两个事件 A 与 B,若 $A \supset B$,则

(1)$P(A-B) = P(A) - P(B)$;

(2)$P(A) \geqslant P(B)$.

证明 由于 $A \supset B$,故可把 A 分为两个互不相容事件 B 与 $A-B$ 之并,即 $A = B \cup (A-B)$,由可加性公理得

$$P(A) = P(B) + P(A-B),$$

移项即得(1). 再因非负性公理,$P(A-B) \geqslant 0$,由(1) 可得(2).

定理 1-5 对任一事件 A,有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

证明 对任一事件 A,总有如下包含关系

$$\varnothing \subset A \subset \Omega,$$

由定理 1-4 中的(2) 即可得 $P(\varnothing) \leqslant P(A) \leqslant P(\Omega)$,再由 $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$ 就可获得上述结论.

这个性质告诉我们,凡是概率出现 1.2、$\dfrac{7}{5}$、200% 或 -0.3 都说明有错误发生了,必须检查和纠正.

定理 1-6 对任意两个事件 A 与 B,有

(1)$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

(2)$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

证明 由于并事件 $A \cup B$ 可改写为两个互不相容事件 A 与 $B - AB$ 的并,从可加性公理可得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB).$$

考虑到 $B \supset AB$,由定理 1-4 中的(1) 可得 $P(B-AB) = P(B) - P(AB)$,把此式代回原式即得(1). 再因 $P(AB) \geqslant 0$,用(1) 立即推得(2).

定理 2-6 中的(1)称为概率的加法公式,当事件 A 与 B 为互不相容事件时 $P(AB)=0$,它就是可加性公理,当事件 A 与 B 相容时,$P(AB)>0$,这时加法公式中最后一项不可少,因为前两项之和 $P(A)+P(B)$ 中 $P(AB)$ 重复计算了一次,对任意三个事件也有类似的加法公式.

定理 1-7　对任意三个事件 A,B,C,有

(1) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$;

(2) $P(A\cup B\cup C)\leqslant P(A)+P(B)+P(C)$.

证明　利用结合律 $A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C$ 和定理 1-6 中的(1)可得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)C)\\&=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC\cup BC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)\\&\quad+P(ABC).\end{aligned}$$

这就证得(1),由于 $BC\supset ABC$,故 $P(BC)-P(ABC)\geqslant 0$,故舍去(1)中最后四项将导致右端有可能被放大,这说明(2)亦成立.

例 3　掷两颗骰子,至少有一颗骰子的点数大于 3 的概率是多少?

解　设 A_i 为事件"第 i 颗骰子的点数大于 3",$i=1,2$,那么事件"掷两颗骰子,至少有一颗骰子的点数大于 3"可表示为 $A_1\cup A_2$(见图 1-2).

从图上可以看出 $P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{2}$,$P(A_1A_2)=\dfrac{1}{4}$,

由定理 1-6 可知,所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2)&=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

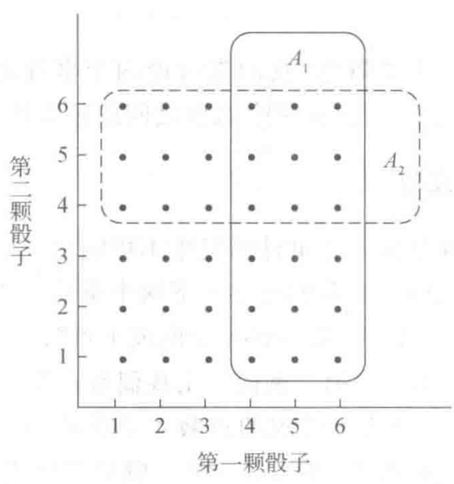

图 1-2

作为讨论,我们来研究事件"掷三颗骰子,至少有一颗骰子的点数大于 3"的概率,该事件可表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$,其中 A_3 表示事件"第三颗骰子的点数大于 3".用古典方法