

结构优化设计

丁运亮 编

南京航空航天大学

2001年10月

飞符

支计

目 录

第一章 结构优化设计的一般概念

§ 1-1 结构优化设计的含义	1
§ 1-2 结构优化设计问题的数学描述	2
§ 1-3 应用举例	4
例 1-1 三杆构架的设计	4
例 1-2 加强薄板的设计	7
例 1-3 机翼结构优化设计	9
例 1-4 直升机尾梁结构设计	11
§ 1-4 结构优化设计发展概况	14
习 题	15

第二章 有关的数学和力学基本知识

§ 2-1 两个问题	16
§ 2-2 函数的台劳展开	17
§ 2-3 方向导数和梯度	19
一. 方向导数	19
二. 梯 度	20
三. 几种特殊类型函数的梯度	21
§ 2-4 极值的必要条件和充分条件	21
§ 2-5 凸集, 凸函数和凸规划	23
一. 函数的凸性	23
二. 凸集	24
三. 凸函数	25
四. 凸规划	26
§ 2-6 约束和拉格朗奇乘子	27
§ 2-7 Kuhn-Tucker 定理及约束边界上的最优性判别	28
一. Kuhn-Tucker 定理	28
二. Kuhn-Tucker 定理的几何意义	
三. Kuhn-Tucker 条件的推广	
习 题	

第三章 满应力设计

§ 3-1 满应力设计的概念和特点	39
§ 3-2 比例满应力设计	40
§ 3-3 改进满应力设计	45
一. 改进措施	45
二. 设计程序框图及算例	46
三. 修改的齿形法	49
§ 3-4 杆系结构的满应力设计	50
§ 3-5 板杆元结构的满应力设计	52
一. 受剪板元	52
二. 平面应力薄膜元	52
三. 算例	53
§ 3-6 梁元结构的满应力设计	56
一. 受弯曲同时受剪切的梁元结构	56
二. 受弯曲同时受轴力的梁元结构	57
§ 3-7 一个元件带多个设计变量的梁元结构优化设计	58
一. 基本原理	58
二. 设计程序框图及算例	60
习 题	63

第四章 用最优化准则作结构优化设计

§ 4-1 概述	65
§ 4-2 一般位移准则法	65
一. 单一位移约束下的最优化准则	66
二. 主被动元件的确定原则	68
三. 设计程序框图及算例	69
四. 多位移约束下的最优化准则	77
§ 4-3 一种新的最优化准则法	80
一. 基本原理	80
二. 设计程序框图及算例	81
三. 同一般位移准则法的比较	82
满应力设计与新的最优化准则结合—包络法	85
	90

序子=次规划. 逆序

第五章 用可行方向法的结构优化设计

§ 5-1 概述	91
§ 5-2 最佳矢量法	92
§ 5-3 梯度投影法	93
一. 侧移向量的计算	94
二. 步长的确定	95
三. 收敛性判别	96
四. 设计程序框图及算例	96
§ 5-4 可行方向法	102
一. 计算侧移向量的线性子规划	102
三. 设计程序框图及算例	104

第六章 结构优化设计中的近似技术

§ 6-1 概述	109
§ 6-2 结构优化设计问题	109
§ 6-3 设计变量连接	110
§ 6-4 减少不等式约束数	112
6-4-1 区域化法	112
6-4-2 约束暂时删除概念	112
§ 6-5 高质量的显示近似表达式	114
§ 6-6 对偶求解法	116
6-6-1 鞍点	116
6-6-2 最大-最小问题	117
6-6-3 原问题与对偶问题	120
6-6-4 计算考虑	120
6-6-5 简单混合近似问题的对偶求解法	121
参考文献	127

第一章 结构优化设计的一般概念

§ 1—1 结构优化设计的含义

优化

这里所讲的结构优化设计，指的是在给定结构外形和基本结构形式；给定各元件材料；外载荷条件；给定整个结构的强度、刚度、工艺要求的条件下，对结构进行整体和元件优化设计。

结构优化设计，有时又称为结构综合^[34]。从目前的观点看，它便是综合对结构进行有限元分析或解析计算，运用数学上的最优化方法，在计算机上实现自动设计，产生出一个理想的设计方案。

具体地说，对任何一种新的结构设计，在进行结构优化设计之前，首先要求设计人员事先选定该结构的布局方案（即外形尺寸、基本结构形式、元件类型等，可以选择多种布局方案同时进行计算比较）。在此基础上，便可运用力学的基本观点，对该结构进行观察和分析，例如将实际结构运用有限元分析的方法简化成理想的力学计算模型，这就是所谓的结构离散化。

从有限元分析的观点看，离散化后的所有各个元件都是一个一个的受力单元。结构在外力作用下的力学特性可以近似地认为就是这些小的受力单元的力学特性的总和。

从结构设计角度看，这每一个小单元，都可看成是一个设计对象。在每一个设计对象中选取一个关键性尺寸作为可改变的参数，例如杆元件的横截面面积，板元件的厚度，梁元件的惯性矩等。所有这些可变化的参数统称为设计变量。改变这些设计变量的大小，实际上也就改变了每个元件的受力特性，整个结构的平衡协调系统也起了变化，同时还改变了整个结构的材料分布及结构重量。

结构优化设计就是为了寻找一组最优的设计变量（即各受力元件参数的最有利组合），使得所设计的结构既满足强度、刚度、工艺以及动态特性等要求，而且结构重量最轻，或者制造成本最低。为了达到此目的，任一静不定结构的优化设计过程，都得反复改变这些设计变量，使之向所要求的目标变化，而每一次设计变量的修改，同时也改变了整个结构的受力特性，因此，就需要对修改后的结构进行重分析。结构优化设计便是在“分析（对事先任意给定的初始设计作分析）——设计（修改设计变量）——再分析——再设计”这样一个多次迭代过程中，由计算机自动来完成的。

由此可见，有限元分析是结构优化设计的力学基础，在结构优化的迭代过程中起重分析作用。

最优化方法是结构优化设计的数学基础。最优化方法经过一定的工程处理，在优化设计中起再设计作用。

而一般的结构设计技术将为结构优化设计提供合理的预研方案，并最终将结构优化设计的结果在实际结构设计中付诸实现。

设计变量

目标函数

约束条件

等式约束

不等式约束

§1-2 结构优化设计问题的数学描述

把前面所述的结构优化设计概念，用数学形式描述出来，即成为一般的数学规划形式。

寻找一组变量

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix} \quad m \text{ 个元件}$$

$$f(x) \rightarrow \text{Min (最小)}$$

$$g_j(x) \leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

$$g_e(x) = 0 \quad (e=1, 2, \dots, n)$$

(1-1)

使得函数
并且满足

其中， x 称为设计变量向量。它的每一个分量即代表一个元件的设计参数（横截面积或厚度等）。或者多个元件根据它们的共同特性合用一个设计变量，此称为设计变量连接。设计变量连接是简化结构优化设计问题的一种很有用的方法。

$f(x)$ 称为目标函数或称为价值函数。它定义为设计变量 x 的函数，是作为在可供选择的许多可行设计中，即满足所有约束条件的设计中，进行比较选择的依据。优化的目标就是要使 $f(x)$ 达到最小。目标函数可能指整个结构重量，也可能指最低成本或其他种种指标，也即最优化问题并不一定与最小重量相联系。但在大多数结构优化设计中，总是把结构重量最轻作为目标函数，而且最小结构重量是各种目标函数中最容易写成设计变量的函数形式。

$g_j(x) \leq 0$ 称为不等式约束。它说明一种结构只能在某种限制条件下工作，这些约束条件可能包括应力、位移、稳定性、振动频率、几何尺寸等等。不同的约束条件所得到的最后优化设计结果是不一样的。

$g_e(x) = 0$ 称为等式约束。它代表整个结构的平衡协调方程。例如在矩阵位移法中，这些方程可以写为

$$[K]\{u\} = \{p\}$$

(1-2)

$$[K]\{y\} = \xi[M]\{y\}$$

(1-3)

式中 $[K]$ ——结构刚度矩阵； $\{u\}$ ——位移向量； $\{p\}$ ——载荷向量； $\{y\}$ ——特征向量； $[M]$ ——结构的质量矩阵； ξ ——特征值。

在某些优化设计的著作中，把式 (1-2) 和式 (1-3) 称为状态方程；并把 u, y 称为状态变量，意即这些量是决定整个结构力学状态特性的；它们是设计变量的函数。或者叫做结构相应于设计变量的响应量^[1]。

由设计变量所组成的数学空间称为设计空间。如果只有两个设计变量，则这个空间是一个设计平面，如图 1-1 所示。若此时把约束条件以等式反映在这个设计平面内，则为平面

上的若干条曲线。如果同时把一系列目标函数等值线（可能是直线，也可能是曲线，依 $f(x)$ 与 x 的函数关系而定）也画在同一图上，我们便可以来分析目标函数、约束条件和设计变量在优化设计过程中的相互关系。

三个设计变量组成立体空间，约束条件 $g_j(x)=0, j=1,2,\dots,k$ 成为若干个曲面，目标函数则构成一系列等值面。三个以上设计变量组成多维设计空间，约束条件组成一个一个的超曲面，目标函数则构成一系列等值超曲面（或超平面）。多维空间及超曲面无法直接用几何图形表达出来。

设计空间内任一点 x ，代表一个设计。每一个约束曲面（或曲线）都把设计空间分成两部分：即满足该约束条件的部分和不满足的部分。所有临界约束组合成一个约束边界，或称为约束包络面（或线）。约束边界把设计空间划分为两个区域：可行域和不可行域。在约束边界上及可行域内的任一设计点均满足全部约束条件，因而是一可行设计，称为可行点。反之，不可行域中的任一点，都是不能接受的设计点，称为不可行点。见图 1—1。有关结构优化设计一般概念的描述，还可参考文献[44]。

设计空间中的某一点 $x^{(0)}$ 可以用向量来表示，假设它为初始设计

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_m^{(0)} \end{pmatrix}$$

经过结构分析，发现这一设计不满足优化要求，于是运用优化方法修改设计，从而得到一新的设计点（新的设计向量）

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_m^{(1)} \end{pmatrix}$$

图 1—1 表示在二维情况下的 $x^{(0)}$ 和 $x^{(1)}$ 两向量及其相互关系。这两个设计点（向量）之间的关系，在多维情况下用数学形式表示，则为

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_m^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_m^{(0)} \end{pmatrix} + \omega_0 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

或写为

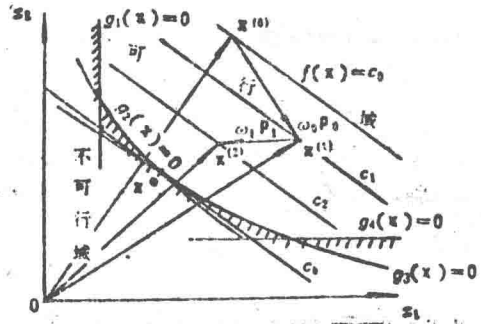


图 1—1

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \omega_0 \mathbf{p}_0$$

式中 ω_0 ——正的系数，或称为步长；

$\mathbf{p}_0$ ——方向向量。

由式 (1-5) 可见，若能给定某一方向向量 $\mathbf{p}_0$ 和步长 ω_0 ，就可以对原设计进行修改而获得一个新的设计。同样，对新设计点再进行结构重分析。检查约束条件及目标函数，发现还需要调整，则又可取一新的方向向量 $\mathbf{p}_1$ 及步长 ω_1 来修改设计。如此继续迭代下去，直到设计点到达最优为止。上式可以写成一般迭代公式

$$\mathbf{x}^{(v+1)} = \mathbf{x}^{(v)} + \omega_v \mathbf{p}_v \quad (v=0, 1, 2, \dots) \quad (1-6)$$

式中 $v, v+1$ ——表示前后两次迭代次数。

ω_v 及 $\mathbf{p}_v$ 的选取由具体的最优化方法决定。在具体计算中，一般 $\mathbf{p}_v$ 取为单位向量

$$\mathbf{p}_v = -\frac{\mathbf{p}_v}{(\mathbf{p}_v^T \cdot \mathbf{p}_v)^{1/2}} \quad (1-7)$$

而

$$(\mathbf{p}_v^T \cdot \mathbf{p}_v)^{1/2} = \sqrt{p_{v1}^2 + p_{v2}^2 + \dots + p_{vn}^2} \quad (1-8)$$

上述设计过程可以用一个简单程序框图来表示，见图 1-2。

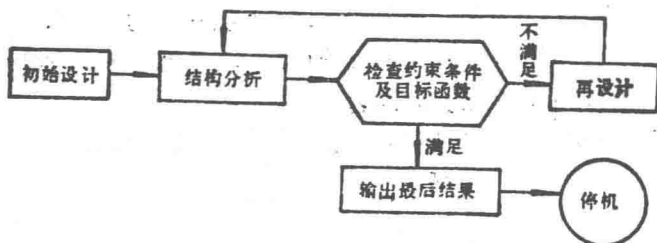


图 1-2

§ 1-3 应用举例

例1-1 三杆构架的设计

三杆构架的设计问题是结构优化设计中广泛运用的一个最简单的应用实例^[1,13,15,16]。

现给出三杆构架的外形尺寸，如图 1-3。两种载荷情况分别为 P_1 和 P_2 。 $P_1 = P_2 = 20000 \text{ lb}$ 。给定材料的弹性模数 $E = 10^7 \text{ lb/in}^2$ ，材料的重量密度 $\rho = 0.1 \text{ lb/in}^3$ ，杆元的应力极限 $[\sigma_+] = 20000 \text{ lb/in}^2$ ， $[\sigma_-] = -15000 \text{ lb/in}^2$ ，第 1 点 y 方向的位移极限 $u_y^* = 0.01 \text{ in}$ ，元件最小尺寸为 $x_{i \min} = 0.01 \text{ in}^2$ ， $i=1, 2, 3$ 。

设计要求 选择元件的横截面面积 x_1 ， x_2 和 x_3 (设计变量)，使整个构架重量尽可能轻，同时满足应力、位移和元件尺寸约束。

这里，我们按有限元分析中的矩阵位移法（直接刚度法）来推导出三杆构架优化设计中的数学规

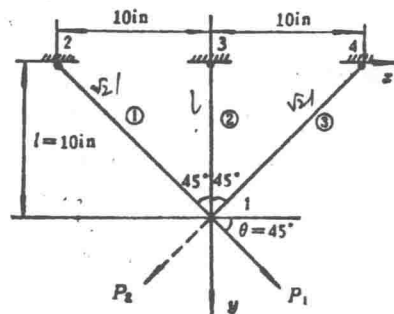


图 1-3

$$K_2 \cdot \delta + \sqrt{2} K_1 \cdot \delta + K_3 \cdot \sqrt{2} \delta$$

$$K_2 + \sqrt{2} K_1 + \sqrt{2} K_3$$

划表达形式。

三杆构架为平面构架，坐标如图1—3。每个节点只有两个自由度，并且第2，3，4点均铰接，自由度被约束住，所以实际上该问题只有两个自由度。

分别写出三杆的几何矩阵和元件刚度矩阵

第①杆

几何矩阵

$$[a_1] = \frac{1}{\sqrt{2}L}[-L, -L, L, L] = \frac{\sqrt{2}}{2}[-1, -1, 1, 1] \quad (1-9)$$

元件刚度矩阵

$$[K_1] = \frac{Ex_1}{\sqrt{2}L}[a_1]^T[a_1] = \frac{Ex_1}{2\sqrt{2}L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-10)$$

第②杆

$$[a_2] = [0, -1, 0, 1] \quad (1-11)$$

$$[K_2] = \frac{Ex_2}{L}[a_2]^T[a_2] = \frac{Ex_2}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-12)$$

第③杆

$$[a_3] = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, -1, -1, 1] \quad (1-13)$$

$$[K_3] = \frac{Ex_3}{2\sqrt{2}L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-14)$$

三杆构架的总刚度矩阵，直接由 $[K_1]$ ， $[K_2]$ ， $[K_3]$ 迭加便可得到，并且考虑只取第1点两个自由度，则得

$$\begin{aligned} [K] &= \begin{pmatrix} \frac{Ex_1}{2\sqrt{2}L} + \frac{Ex_3}{2\sqrt{2}L} & \frac{Ex_1}{2\sqrt{2}L} - \frac{Ex_3}{2\sqrt{2}L} \\ \frac{Ex_1}{2\sqrt{2}L} - \frac{Ex_3}{2\sqrt{2}L} & \frac{E}{2\sqrt{2}L}(x_1 + x_3 + 2\sqrt{2}x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{E}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} x_1 + x_3 & x_1 - x_3 \\ x_1 - x_3 & x_1 + x_3 + 2\sqrt{2}x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-15)$$

若考虑结构对称，两种载荷情况也对称，可设 $x_1 = x_3$ 。元件①中的应力大小在载荷条件

P_1 下与元件 3 在载荷条件 P_2 下是相同的, 反之亦然。因此, 只要考虑第一种载荷条件就够了。据此, 式 (1-15) 简化为

$$[K] = \frac{E}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}x_2 + x_1 \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

由平衡协调方程式 (1-2), 有

$$\begin{aligned} & \frac{E}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}x_2 + x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} P_1 \cos \theta \\ P_1 \sin \theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1-17)$$

解得

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= \frac{LP_1}{Ex_1} \\ u_{1y} &= \frac{LP_1}{(x_1 + \sqrt{2}x_2)E} \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

元件中的应力

$$\sigma_1 = \frac{E}{\sqrt{2}L} [a_1] \{u\}_1 = \frac{2x_1 + \sqrt{2}x_2}{2(x_1^2 + \sqrt{2}x_1x_2)} P_1 \quad (1-19)$$

式中 $\{u\}_1$ ——第①杆两端节点位移, 铰接点处位移用 0 代入。

同样可得

$$\sigma_2 = \frac{E}{L} [a_2] \{u\}_2 = \frac{1}{(x_1 + \sqrt{2}x_2)} P_1 \quad (1-20)$$

$$\sigma_3 = \frac{E}{\sqrt{2}L} [a_3] \{u\}_3 = \frac{-\sqrt{2}x_2}{2(x_1^2 + \sqrt{2}x_1x_2)} P_1 \quad (1-21)$$

到此为止, 我们可以建立三杆构架优化设计的数学规划表达形式:

求设计变量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$

使得目标函数——结构重量最轻, 即

$$f(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \rho L_i x_i = 2\sqrt{2}x_1 + x_2 \rightarrow \text{Min} \quad (1-22)$$

并且满足

应力约束

$$g_1(\mathbf{x}) = \sigma_1 - [\sigma_+]$$

$$= \frac{2x_1 + \sqrt{2}x_2}{2(x_1^2 + \sqrt{2}x_1x_2)} P_1 - 20000 \leq 0 \quad (1-23)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1 + \sqrt{2}x_2} P_1 - 20000 \leq 0 \quad (1-24)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = \left| \frac{-\sqrt{2}x_2}{2(x_1^2 + \sqrt{2}x_1x_2)} P_1 \right| - 15000 \leq 0 \quad (1-25)$$

位移约束

$$g_4(x) = u_{1y} - u_0^*$$

$$\frac{LP_1}{(x_1 + \sqrt{2}x_2)E} - 0.01 \leq 0 \quad (1-26)$$

尺寸约束

$$g_5(x) = x_{1\min} - x_1 \leq 0 \quad (1-27)$$

$$g_6(x) = x_{2\min} - x_2 \leq 0 \quad (1-28)$$

尽管这个问题是理想的设计问题，并且维数很低（最后为两维空间的设计问题），但它作为一个很好的例子可考验某些优化方法及检验计算的初步迭代规律，将在以后各章中用来作详细运算的例子。

例1—2 加强薄板的设计。这个例题取自参考文献[45]。

现给定加强薄板的外形尺寸，如图 1—4(a)。已知数据：

$$E = 10^7 \text{ lb/in}^2, \rho = 0.1 \text{ lb/in}^3, \mu = 0.30$$

杆元极限应力 $[\sigma] = \pm 10000 \text{ lb/in}^2$,

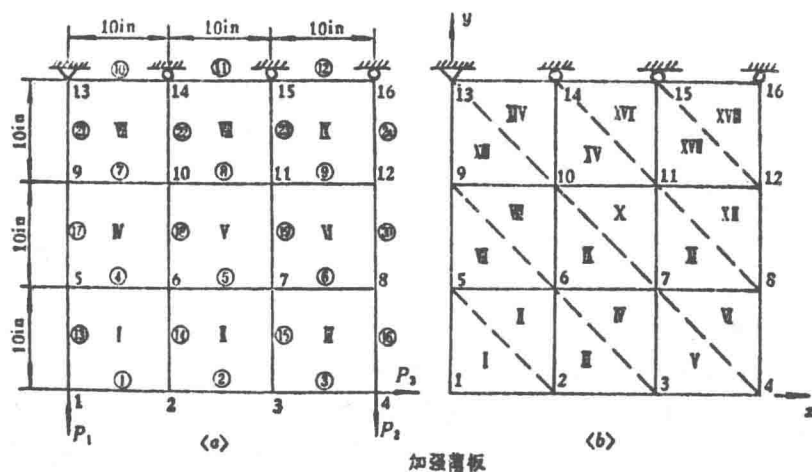
板受剪或受正应力极限应力 $[\tau]$ 或 $[\sigma] = \pm 10000 \text{ lb/in}^2$,

杆元最小尺寸限制为 0.05 in^2 ,

板厚最小尺寸限制为 0.022 in ,

不考虑位移约束，四种载荷情况见图 1—4。

设计要求 选择杆元横截面面积和板厚度，使整个加强薄板重量最轻，同时满足应力和元件尺寸约束。



外,还有 18 块三角板共 42 个设计变量。若同一个矩形内两块三角板,采用变量连接共一个设计变量,则仍为 33 个设计变量。采用矩形板薄膜元,变量数同第一种。离散模型不同,优化设计结果也会有差异,可以通过这两种离散模型的计算来进行分析比较,选其中更合理的一个。

该问题的平衡协调方程仍为式 (1-2)

$$[K]\{u\}=\{p\}$$

总刚度矩阵 $[K]$ 可直接由各元件刚度矩阵按节点自由度迭加而成,对杆元、受剪板及平面应力薄膜元的元件刚度矩阵可用一个共同的公式表示

$$[K_i]=[a]^T[D][a] \quad (1-29)$$

式中 $[a]$ ——各元件的几何矩阵;

$[a]^T$ —— $[a]$ 的转置。各元件的几何矩阵可参考结构力学或有限元分析等有关著作。

$[D]$ ——元件的弹性模量矩阵。

对杆元

$$[D]=\frac{Ex_1}{L} \quad (1-30)$$

对受剪板元

$$[D]=\frac{Gx_1}{4A}=\frac{Ex_1}{8(1+\mu)A} \quad (1-31)$$

对平面应力薄膜元

$$[D]=\frac{EAx_1}{1-\mu^2}\begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (1-32)$$

式中 E ——弹性模量;

μ ——泊桑比;

L ——杆长;

A ——代表板的面积;

x_1 ——表示设计变量,即杆的横截面积或板厚度。

由于结构静不定度数较高,元件类型多,维数高,在这个例题中就不可能象例 1-1 那样直接由式 (1-2) 求出位移 $\{u\}$ 与各设计变量之间的显函数关系,只能由式 (1-2) 求得位移的数值。因此在绝大多数结构中,状态变量 $\{u\}$ 与设计变量 $\{x\}$ 都只能用隐函数关系表示出来。在给定设计变量的初始设计情况下,由 (1-2) 式可求得位移值。

解得位移后,很容易求出各元件中的应力,也可以用一个通式表示

$$\{\sigma\}_i=\frac{1}{x_1c_i}[D][a]\{u\}_i \quad (1-33)$$

或者写为

$$\{\sigma\}_i=[S]\{u\}_i \quad (1-34)$$

载荷情况表

情 况 \ 载荷(lb)	P_1	P_2	P_3
1	30000	30000	0
2	50000	10000	0
3	20000	40000	0
4	0	0	20000

式中 $\{\sigma\}_i$ ——第 i 个元件中的应力, 对平面应力元, 它为一列向量, 由三个分量组成。杆元和受剪板元都只为一个数;

$\{u\}_i$ ——相应于第 i 个元件各节点的位移列向量;

c_i ——一个常数, 对杆元 $c_i=1$, 对受剪板元 $c_i=2$, 对平面应力薄膜元 $c_i=A$;

$[S] = \frac{1}{x_i c_i} [D] [a]$ ——应力矩阵, 因 $[D]$ 的分子中含 x_i , 正好将 x_i 消去, 所以

各元件的应力矩阵与设计变量无关。

对平面应力薄膜元, 通常按 V_{on} Mises (凡米塞斯) 准则计算出元件的当量应力

$$\sigma_e = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_3^2)^{1/2} \quad (1-35)$$

式中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为列向量 $\{\sigma\}_i$ 中的三个分量。 $\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y, \sigma_3 = \tau_{xy}$ 。

现在, 我们可以写出加强薄板优化设计的数学规划形式:

寻找设计变量

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{33})^T$$

使得结构重量

$$W(x) = \sum_{i=1}^{33} \rho L_i x_i \rightarrow \text{Min} \quad (1-36)$$

同时满足

$$|\sigma_i| - [\sigma_i] \leq 0 \quad (1-37)$$

$$x_{i, \min} - x_i \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, 33) \quad (1-38)$$

式中 x_i, L_i ——对杆元分别为杆的横截面积和杆长; 对板元为板的厚度和板的平面面积。

在第三章中, 我们将用改进的满足应力设计法来分别计算两种离散模型, 并进行具体分析比较。

例1-3 机翼结构优化设计

上两例是在给定具体结构型式、材料等条件下来进行结构优化设计的。本例则是给出了机翼外形尺寸, 要求选择机翼内部结构型式及具体的纵横向构件安排, 并进行结构优化设计。

已知:

最大过载系数 $n_{\max} = 5.5$, 两种载荷情况

全机总重 $G_0 = 2565 \text{ kg}$

最大速度 $V_{\max} = 1400 \text{ km/s}$ ($H = 5000 \text{ 米}$)

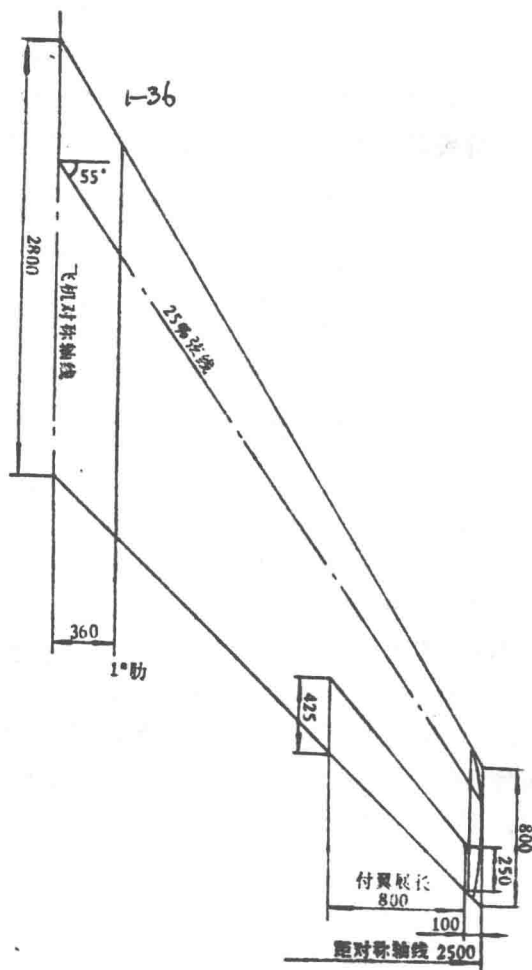


图 1-5

机翼面积 $S=9 \text{ m}^2$ (包括机身覆盖部分)
 机翼翼展 $L=5 \text{ m}$
 机翼根弦长 $b_{\text{根}}=2800 \text{ mm}$ (在机身对称轴线上)
 机翼翼尖弦长 $b_{\text{尖}}=800 \text{ mm}$
 根梢比 $\eta=3.5$
 展弦比 $\lambda=2.77$
 后掠角 $\chi=55^\circ$ (25%弦线处)
 下反角 $\psi=0^\circ$
 安装角 $\alpha=0^\circ$
 一对副翼面积 $S_{\text{副}}=0.27 \times 2 \text{ m}^2$
 副翼翼展长 $l_{\text{副}}=800 \text{ mm}$
 安全系数 $f=1.5$
 翼型 NACA64-006 (顺气流)
 机翼平面外形见图1—5。

这里,选择两种结构型式来进行分析比较,见图1—6。一种为单梁双墙式结构,主梁与机身固接,前后墙与机身铰接,蒙皮为桁条铆接结构;另一种为单块式结构,蒙皮为整体壁板,前、中、后三墙与机身铰接,上下蒙皮也与机身相连。当然,还可以选择其它结构型式。

设计要求 选择各元件的尺寸,在两种结构型式中挑选结构重量较轻者,同时满足

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{应力约束 } \sigma_i - [\sigma_i] \leq 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \\
 \text{稳定性约束 } |\sigma_i| - \sigma_{bc_i} \leq 0 \\
 \text{位移约束 } u_j - u_j^* \leq 0 \quad (j=1,2,\dots,k) \\
 \text{频率约束 } \xi_0 - \xi \leq 0 \\
 \text{颤振速度约束 } V_{\text{max}} - V_f \leq 0 \\
 \text{尺寸约束 } x_{i,\text{min}} - x_i \leq 0 \quad (i=1,2,\dots,m)
 \end{array} \right\} \quad (1-39)$$

式中 σ_{bc_i} ——第 i 个元件的失稳临界应力;

ξ_0 ——给定的固有频率 ω_0^2 下限, $\xi = \omega^2$;

V_f ——颤振临界速度。

两种结构型式离散模型见图1—6。翼型上下对称,考虑结构也设计成上下对称的,则只需要计算上半部分即可。单梁双墙式结构共有111个节点,333个自由度;单块式结构共有115个节点,345个自由度。两种模型均可用三种元件来理想化:杆元(包括梁、墙、翼肋的缘条以及桁条、筋条)、三角形薄膜元(机翼蒙皮)和对称纯受剪板(梁、墙和翼肋腹板)。据此,共有元件数如下:

元件	单梁双墙式	单块式
杆元	171	183
三角薄膜元	173	184
对称纯剪板	156	163
Σ	500	530

梁蒙皮面积
腹板厚度
蒙皮厚度
杆蒙皮面积

肋不作为设计变量
前缘后缘蒙皮厚度
接头

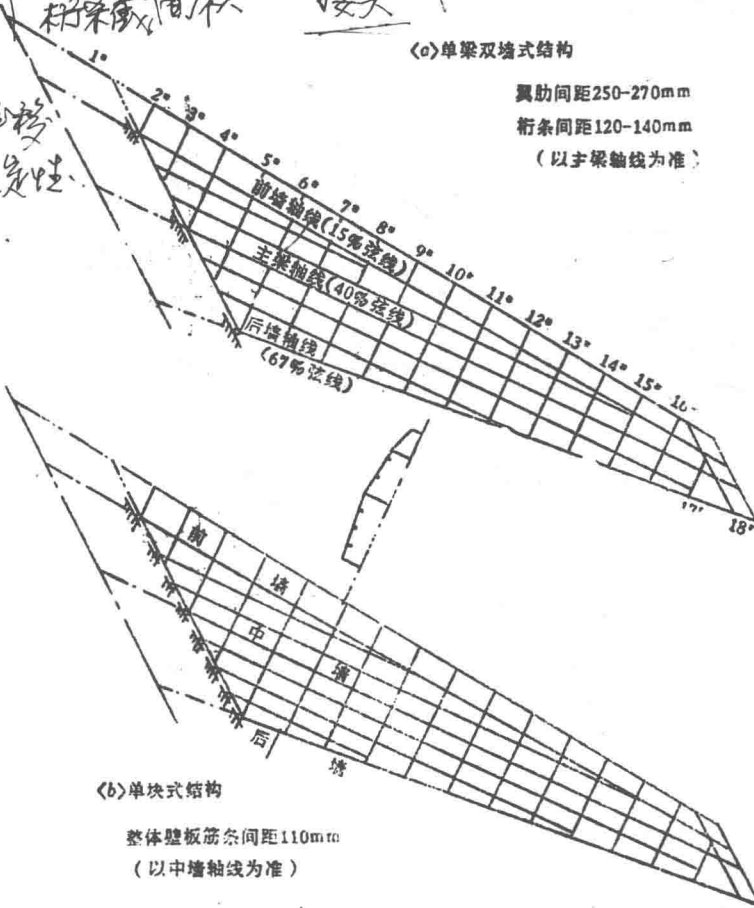
(a) 单梁双墙式结构

翼肋间距250-270mm

桁条间距120-140mm

(以主梁轴线为准)

约束: 应力、位移、
重量、稳定性、
寿命



(b) 单块式结构

整体壁板筋条间距110mm

(以中墙轴线为准)

材料特性及有关数据

先统一选用LY12CZ

$\mu=0.3333$,

$[\sigma]=\pm 4700\text{kg/cm}^2$,

最小尺寸: 杆元 0.5cm^2 , 板元 0.05cm

$E=720000\text{kg/cm}^2$,

$\rho=0.0028\text{kg/cm}^3$,

图 1-6

仅从结构的元件数和自由度来看, 该问题就是一个大型结构的优化设计问题, 如果把每一个元件都作为一个设计变量, 这就是有 500 个以上设计变量的优化问题。相应的约束条件数则超过 1000 个。为了解这样一类复杂结构的优化问题, 必须要有一系列有效措施, 例如用变量连接来减少设计变量数, 采用约束删除技术来减少有效约束数等, 目的在于缩短计算时间, 减少迭代次数, 加快收敛性。关于这些措施将在以后各章中详细介绍。

考虑式 (1-39) 所有约束条件的规划问题称为多约束优化问题。要同时考虑这么多不同类型的约束条件是复杂而困难的, 一般为了使问题求解方便, 可以根据具体问题采用分开单项约束逐步优化的方法, 即在前一个约束优化的基础上再考虑一个新的约束类型, 以不违反前一类约束为前提, 这样分阶段优化, 最后达到满足全部约束。

例1-4 直升机尾梁结构设计

这个例子选自参考文献[1]。图 1—7 所示为美军眼镜蛇直升机的尾梁，由尾梁承受的最大飞行载荷如图中所示。已知尾梁外形尺寸，并给定：

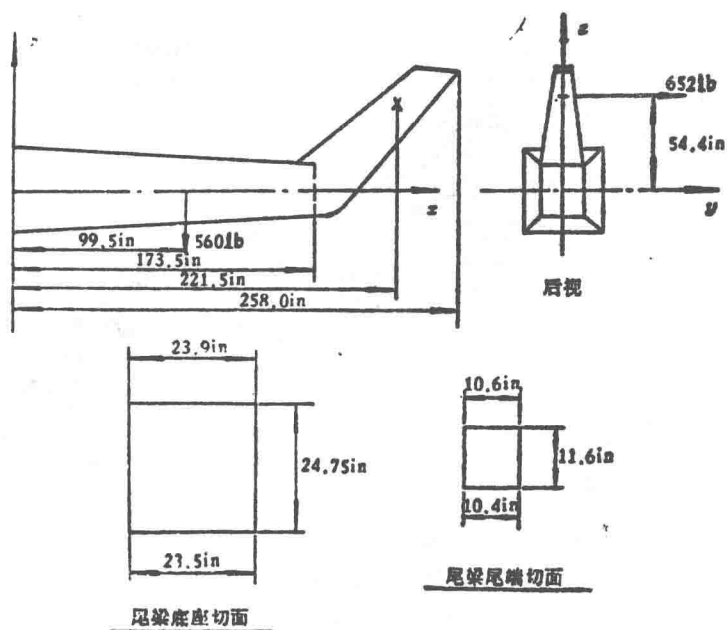


图 1—7

结构材料 2024-T3 铝合金

弹性模数 $E=10.5 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$, $\mu=0.3$

应力极限 $[\sigma]=\pm 25000 \text{ lb/in}^2$

材料比重 $\rho=0.1 \text{ lb/in}^3$

位移极限 $u^*=\pm 0.5 \text{ in}$

杆元横截面面积下限 $x_{i \min}=0.0415 \text{ in}^2$

板厚下限为 0.02 in

结构不破坏自振频率下限为 29 Hz

一种载荷条件。

设计要求 设计一个最轻量化结构，满足多方面的特性要求。

象在例 1—3 机翼结构设计中一样，根据直升机尾梁的具体情况，现考虑两种设计方案，第一种，尾梁设计成带纵梁，横向元件并有蒙皮覆盖的完整封闭形式。在这种情况下，设计变量为纵梁，横向杆元的横截面大小以及蒙皮厚度，常用的有限元类型同机翼类似，为杆元、梁元、受剪薄板和三角形薄膜元（或矩形）；第二种，是设计一个构架式尾梁，这里可以用杆和梁元而不带蒙皮。构架式尾梁的优点是有高的生成能力，构架式尾梁理想模型如图 1—8 所示。结构理想化为 28 个节点，108 个元件，84 个自由度。从工艺制造角度考虑，对称元件应具有相同横截面积，108 个元件可以合并为只有 42 个设计变量，设 $x \in R^k$ 代表设计变量向量，该问题为极小化结构重量

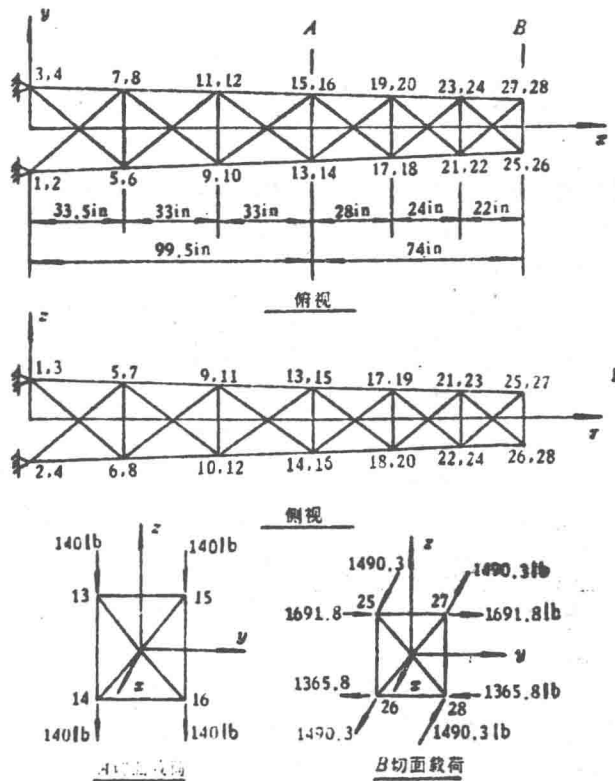


图 1-8

$$W(x) = \rho \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{NM(j)} L_{ij} x_i$$

(1-40)

式中 $NM(j)$ ——第 j 组中元件数;

L_{ij} ——第 j 组第 i 个元件的长度。

整个结构满足平衡协调方程 (1-2) 和方程 (1-3)

同时满足的约束条件为

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_i| - [\sigma_i] &\leq 0 & (i=1, 2, \dots, 108) \\ |u_j| - u_j^* &\leq 0 & (j=1, 2, \dots, 72) \\ -F_i - F_{i,bl} &\leq 0 & (i=1, 2, \dots, 108) \\ \xi_0 - \xi &\leq 0 \\ x_{i, \dots, l} - x_i &\leq 0 & (i=1, 2, \dots, k) \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

中 72——代表所有自由的节点位移数;

F_i ——第 i 个元件的内力 (取受压的负内力);

$F_{i,bl}$ ——第 i 个元件的临界载荷 (欧拉临界力)。

这是一个中等大小的结构优化设计问题, 有 42 个设计变量, 144 个状态变量 (u 和 y),