

好玩的

数学

修订版

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书

总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”

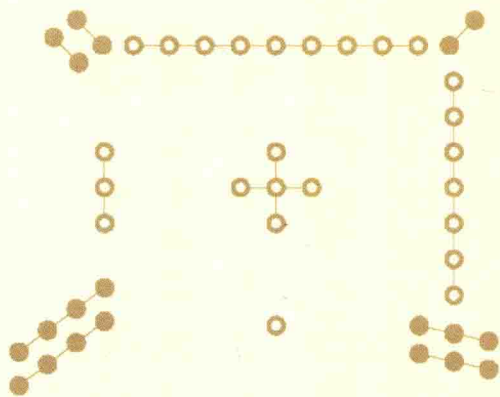
科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

张景中 主编

古算诗词题今解

徐品方 著

古算诗词题是我国珍贵的文化遗产，
雅俗共赏的诗词和传统数学思想交相辉映，
共同传承，
至今仍是启迪我们数学思维的绝佳方式。



科学出版社

好玩的

数学

(修订版)

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书

总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”

科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

张景中 主编

古算诗词题今解

徐品方 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

古算诗词题是我国珍贵的文化遗产。我国古算家文理兼优,把博大精深的古算名题和算法推理编成耐人寻味、朗朗上口的诗词或歌谣,使抽象难懂的数学题形象生动、易于理解和记诵,同时激发人们学习数学的兴趣。本书精选出古代数学中的约 200 首中外诗词题进行注释,译为白话文,并且重点给出古今 240 多种不同解法,有的还补充出原著省略的算理。本书按主要解题的方法为序编排诗词题,方便读者查阅、使用。

本书可供中学以上师生、数学研究人员、爱好数学和数学史的学生,以及对数学感兴趣的大众读者参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

古算诗词题今解/徐品方著. —北京:科学出版社, 2018. 2
(好玩的数学/张景中主编)
ISBN 978-7-03-055613-4

I. ①古… II. ①徐… III. ①数学—普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 286715 号

责任编辑:侯俊琳 田慧莹 崔慧娟 / 责任校对:郭瑞芝
责任印制:张克忠 / 整体设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 2 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2018 年 2 月第一次印刷 印张:18 1/4

字数:350 000

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

丛书修订版前言

“好玩的数学”丛书自2004年10月出版以来，受到广大读者欢迎和社会各界的广泛好评，各分册先后重印10余次，平均发行量近45000套，被认为是一套叫好又叫座的科普图书。丛书致力于多个角度展示了数学的“好玩”，将现代数学和经典数学中许多看似古怪、实则富有深刻哲理的内容最大限度地通俗化，努力使读者“知其然”并“知其所以然”；尽可能地把数学的好玩提升到了更为高雅的层次，让一般读者也能领略数学的博大精深。

丛书于2004年获科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”，2006年又被国家新闻出版总署列为“向全国青少年推荐的百种优秀图书”之一，2009年荣获“国家科学技术进步奖二等奖”。但对于作者和编者来说，最高的奖励莫过于广大读者的喜爱关心。十年来，收到不少热心读者提出的意见和修改建议，数学研究领域和科普领域也都有了新的发展，大家感到有必要对书中的内容进行更新和补充。要感谢各位在耄耋之年仍俯首案牍、献身科普事业的作者，他们热心负责地对自己的作品进一步加工，在“好玩的数学（普及版）”的基础上进行了修订和完善。出版社借此机会将丛书改为B5开本，以方便读者阅读。

感谢多年来关心本套丛书的广大读者和各界人士，欢迎大家提出批评建议，共同促进科普事业繁荣发展。

编者
2015年3月

第一版总序

2002年8月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传。”不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，

它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i} = 1$$

这里指数中用到的 π ，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e ，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i ，就是虚数单位，它的平方等于 -1 。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π 》和《不可思议的 e 》（此二书尚无普及版——编者注），分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清

楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树和教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回 三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树和教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》（此次普及版出版时，王教授对原《数学聊斋》一书进行了仔细修订后，将其拆分为《数学聊斋》与《数学志异》二书——编者注），把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师伽德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等 40 余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第 37 节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高

阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024 - 4 = 1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x+4$ 个。

5个猴子分别拿了 a, b, c, d, e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a = (x+4)/5$$

$$b = 4(x+4)/25$$

$$c=16(x+4)/125$$

$$d=64(x+4)/625$$

$$e=256(x+4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $x+4$ 应是 3125 的倍数，所以

$$x+4=3125k \quad (k \text{ 取自然数})$$

当 $k=1$ 时， $x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射 - 反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π 》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 $355/113$ 。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 $355/113$ 。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 $355/113$ 。后来，在夏道行教授所著《 π 和 e 》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 $355/113$ ，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi = 3.1415926535897 \dots$ ，可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$ ，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 $355/113$ ，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。

但它是正整数，大于或等于1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1/(113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目

都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

张景中

2004年9月9日

前 言

《尚书》云“诗言志，歌咏言”，诗词是人类情感的结晶。有一些数学家也是心灵诗人，不少古算家以诗词抒怀，把他们钟爱的一些数学名题，以及博大精深的数学思想、方法，编成耐人寻味的诗词题。他们用朗朗上口的诗歌启迪后辈的心智，传递数形的信息，使一些抽象、难懂的数学问题得到形象、生动、押韵的诗味表达，既有助于理解、记诵，又可引人入胜，激发读者的浓厚兴趣和好奇心。例如，明代数学家吴敬《九章算法比类大全》(1450)中的一首诗：

远望巍巍塔七层，红光点点倍加增。

共灯三百八十一，请问尖头几盏灯。

古代印度数学家婆什迦罗《莉拉沃蒂》(1150)一书中的一首诗：

平平湖水清可鉴，面上半尺生红莲。

出泥不染亭亭立，忽被强风吹一边。

渔人观看忙向前，花离原位二尺远。

能算诸君请解题，湖水如何知深浅。

数学诗词题是反映数量关系内在联系及其规律的一种新颖的表达形式，其中的数学精华，以及蕴含的数学法则、公式、思想和方法，等待读者去思考与解答。

中国古算诗词歌赋较多，最早是《孙子算经》(公元4世纪，如卷下第31题、第34题)，同时还有南宋杨辉的《日用算法》(1262)自序称“编诗括十有三首。”这是算法化、口诀化、大众化的代表作。后来元代朱世杰的《四元玉鉴》(1303)、明代吴敬的《九章算法比类大全》(1450)、刘仕隆的《九章通明算法》(1424)、程大位的《算法统宗》(1592)

以及清代梅穀成的《增删算法统宗》(1761)等著作中都有古算诗词题。有趣的是,程大位著作中共有110首诗词题,叫“难题”,是从吴敬的著作(331首)和刘仕隆的著作(33首)中精选出来的。而梅穀成著作中的110首又是根据程大位的著作增删而成的。

古算诗词题在教育中有一定作用,遗憾的是有一些人认识不到其价值和作用,如宋朝荣棨(“棨”音 qǐ)说:南宋首都临安(今杭州)算书中已有诗词题(未录书目),但“或隐问答以欺众,或添歌彖以衒己,乖万世益人之心,为一时射利之具”(《黄帝九章》古序)。显然,他把这种古算诗词题(歌彖,“彖”音 tuàn)贬斥为欺众、炫己、益人之心、一时射利之具,似有偏颇,看不到它除了具备教育功能外,还可以是数学通向科学、历史和文学的桥梁,能使读者从中感悟到数学与文史、数学与科学文化的交融和汇合。

诗词古体表达的数学问题,因古今语言文字差异,或有时照顾押韵、格律等,有些诗词题语言含糊、内容难懂。因此,我们从中外古代数学书中精选出约200首诗词题进行注释,译为白话,并且突出地给出古今多种不同解法(一题多解,启发创新);有的还补出书上省略的算理,并以蕴含哲理的精辟小议,融知识性、趣味性和文理史哲等多学科为一体。这是传承和弘扬古算诗词题文化遗产,亦即传播优秀的数学文化传统,使其不致失传的一项研究工作。

为了方便不同读者阅读,或供教学参考(如教与学同步选用),本书依主要解法为序编排,有时一个诗词题要重复安排在不同解法的章节。本书具有可读性、实用性、学术性和收藏性,是一本创新教育的好玩的数学读物。

徐品方

2017年2月于四川省西昌市西昌学院南校区邛海之滨

目 录

丛书修订版前言

第一版总序

前言

01 四则运算	1
1.1 排鱼求数	1
1.2 孝女归家（西江月）	1
1.3 粒米求程	3
1.4 经商纳税	4
1.5 巧对对联	5
1.6 轮流骑马	5
1.7 经商本钱（水仙子）	7
程大位简介	8
1.8 计算利息	10
1.9 唐僧取经	11
1.10 铺金问积	11
1.11 官兵分布	12
1.12 苏武流放	13
1.13 推车问里	14
1.14 船载油盐	15
两个数学世家	15
1.15 两求斤歌	17
1.16 买米运费（西江月）	18
1.17 幸福少女（印度）	19
婆什迦罗与女儿	20
1.18 寿星几岁	20

1.19	巧妙分金 (西江月)	21
1.20	含金几成	22
1.21	银里加铜	22
1.22	鸡兔同笼	23
1.23	群羊逐草 (凤栖梧)	25
1.24	僧分馒头	26
1.25	男女捉兔 (鹧鸪天, 又名思佳客)	26
1.26	增钱剥浅	27
1.27	甲追及乙 (西江月)	28
1.28	将军追校 (鹧鸪天, 又名思佳客)	29
1.29	制笔用料	30
1.30	绩麻分布	31
1.31	纺织分配 (西江月)	33
1.32	知碗求僧	34
1.33	河滨洗碗	35
1.34	勤奋读书	37
1.35	书生分卷	38
1.36	浮屠增级	39
1.37	盈不足术	41
1.38	隔墙分银	43
1.39	客房有几	44
1.40	哑子买肉	45
1.41	隔墙分绫	46
1.42	牧童偷瓜 (西江月)	46
1.43	牧童分瓜 (浪淘沙)	47
1.44	牧童分杏	47
1.45	粮长奖工	48
1.46	牧童游戏	48
1.47	鳖龟有几 (鹧鸪天, 又名思佳客)	49
1.48	妙算羊数 (西江月)	49
1.49	依等算钞	50

1.50	计算赔偿 (鸬鹚天, 又名思佳客)	51
1.51	粮食互换 (梅气清)	52
	附: 连比定义	53
1.52	和面用油 (西江月)	54
1.53	制器工钱	54
1.54	竿上安簏	55
1.55	五官分金	55
1.56	四商分银	56
1.57	春日沽酒	56
1.58	携酒春游	58
1.59	李白沽酒	60
1.60	沽酒探亲	61
1.61	四客分丝	62
1.62	一年口粮	62
	附: 复比概念	63
1.63	打工报酬	63
1.64	孙子定理	64
1.65	神奇妙算	66
1.66	红灯几盏 (水仙子)	68
1.67	银元几何	69
1.68	求一之术	69
	附: 秦九韶	70
1.69	妙题妙解	71
1.70	巧算遗产 (英国)	71
1.71	行程减等	72
1.72	赔偿青苗	73
02	一元一次方程	75
2.1	勤奋读书	75
2.2	春日沽酒	75
2.3	携酒春游	76
2.4	沽酒探亲	77