HIT

数学 · 统计学系列

A Brief History of Geometry

几何学简史

郭卫中　孔令令　主编

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

几何学简史

A Brief History of Geometry

郭卫中 孔令令 主编

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书简要介绍几何学的历史，从几何观念的形成讲起，直到拓扑学中的四色问题。全书共分为七章，分别介绍了几何学的起源、欧几里得几何学、射影几何学、解析几何学、非欧几何学、微分几何学和拓扑学的简要发展历史及相关的主要问题。本书叙述简明、语言平实、重视历史背景，有助于提升读者对几何学的兴趣。

本书可以作为数学史课程中的专题教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

几何学简史/郭卫中，孔令令主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.1

ISBN 978-7-5603-6733-0

Ⅰ.①几…　Ⅱ.①郭…　②孔…　Ⅲ.①几何学-数学史

Ⅳ.①O18-09

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 147350 号

策划编辑　杜　燕
责任编辑　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 10　字数 180 千字
版　　次　2018 年 1 月第 1 版　2018 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6733-0
定　　价　28.00 元

◎序言

几何学历史悠久，起源于实践，反过来又指导实践，自古以来就是不可或缺的基础性的数学分支。无论是初等教育还是高等教育，几何学的身影都从未消失过。它对于培养学生的几何直观有着重大的意义，它的许多概念、理论和方法在数学的其他分支中都有广泛的应用。更重要的是几何学一旦与其他分支交叉就会出现一些新方向。比如：几何与代数交叉出现了解析几何、代数几何；几何与分析交叉出现了几何分析，等等。因此无论从基础理论的角度还是实际应用的角度来看，几何学都是数学中十分重要的分支。为了能更好地学习几何，我们很有必要了解几何学的发展历史。

本书可以作为数学史课程中的专题教材来使用，同时也可以作为对几何学感兴趣的同学的入门读物。希望通过对本书的阅读，读者能加深了解几何学中各个分支的背景并对其产生浓厚的兴趣。本书的主要内容是几何学的发展过程和相关问题。

本书第一章从几何学的起源谈起，继而介绍了塔利斯、毕达哥拉斯以及阿基米德等人对几何学的主要贡献。第二章首先简要介绍了欧几里得《几何原本》的主要内容、公理与公设及平行公理，然后介绍了中国古代数学中的几何学，最后介绍了希尔伯特的公理系统。第三章谈及射影几何学，首先是射影的一些基本概念，其次介绍的是笛沙格定理、巴斯加定理以及射影的一些性质。第四章从解析几何的源起开始，简单介绍了笛卡儿和费马在这一方面的功绩，并给出几个简单的应用，同时也涉及了二次曲线、向量理论和二次曲面等内容。第五章讨论的是非欧氏几何，从发现前期到诞生，最后到射影表示。第

六章介绍的是微分几何学，先从曲线论和曲面论谈起，再升级到对高维数及流形的介绍。最后一章是关于拓扑学，先介绍学科的由来，再给出多面体定理的简述、应用以及拓扑相关问题。

本书能够顺利出版，首先要感谢裴东河教授的大力支持，同时，东北师范大学的研究生温鑫杰和徐悦在校订中给予了极大帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢。

编 者
2017 年 6 月
于东北师范大学

◎ 目录

第一章 几何学的起源

1.1 几何观念的形成

在科学史中，几何学也许算是最古老的一个学科了，它的历史几乎和人类历史同样悠久。

人类在生活和从事生产的各种实践活动中，接触自然界一些物体的形状、大小和位置关系，通过人们的思考、抽象，逐步形成了形体的观念。

古代文明多半发源于大江大河流域，如埃及的尼罗河流域，古巴比伦的底格里斯河与幼发拉底河流域，印度次大陆的印度河流域，我国的黄河流域，都是世界上古老文明的发源地，人类文化的摇篮。

埃及的尼罗河发源于非洲腹地，经埃及注入地中海。每到春季，从腹地流下来的大量雪水，常常引起尼罗河下游的泛滥。但是，在尼罗河泛滥的同时也把腹地的肥沃土壤冲到下游，因此尼罗河下游的一些地方最适合农业耕种，并有良好的收成，所以埃及成为世界上最早人类文明发源地之一。

尼罗河的定期泛滥给人们带来许多好处，同时也给人们带来相当大的危害，因此有必要尽可能正确预报尼罗河的泛滥。当时人们用肉眼去观察宇宙和天气的变化，积累了许多天文知识，于是制定了历法，因此古埃及人早在数千年前就已经知道一年为365天又四分之一日。

由于那时的当权者有对受泛滥灾害影响的人们增减税收的需要，从而数的计算技术便有了较大的进步。

由于尼罗河定期泛滥，常把人们规划好的田地冲毁，水过之后人们需要再次修整规划土地，因此土地测量技术也有很大

的发展。

当时的埃及人为了在尼罗河的广大地区进行土地测量，使用了绳子这一工具，而且把使用绳子进行测量的专家称为测量员。

测量员把绳子绷直就可画出直线来，如果把绳子的一端固定，使其另一端旋转一圈就可画出圆来，如果把直线和圆联合使用，就可画出各种图形来。

例如，在图 1 中，垂直地面竖立一根木棒 PQ，假定这根木棒的影子的最短位置是 QM，就可把 QM 延长引出南北指向的一条直线。

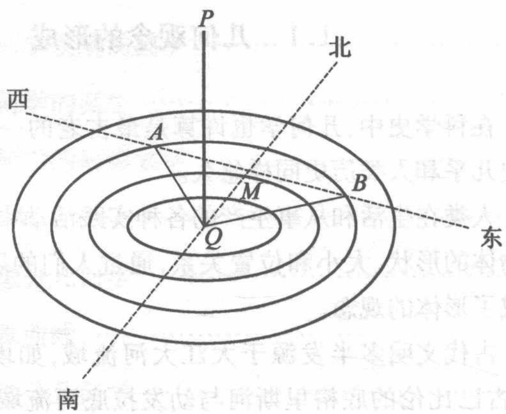

图 1

如果在午前和午后，QA 和 QB 是这根木棒影子长度相等的位置，则联结 A，B 就可引出一条指向东西的直线来。事实上，有名的埃及金字塔的底边正是指向东西与南北的。

另外，测量员还用下面的方法在任何地方作出直角图形来。例如在图 2 中，首先取一条用某一单位测出长度为 12 的绳子，在距其一端长度为 3 的地方打个结，在距其另一端长度为 4 的地方也打个结，那么这两个结之间的长度为 5，然后再把两端结合在一起，这样，按三个结点把绳子绷直就形成一个三边分别为 3，4，5 的三角形，并且由经验使人们知道长度为 5 的边所对应的角是直角。

利用三边长为 3，4，5 来作三角形，其长边所对的角是直角，这件事在巴比伦、印度、中国早已被人们熟知。据说在巴比伦还以 5，12，13 为边长作三角形，而 13 这个长边所对的角也是直角。

一般历史学家都认为埃及的几何学起源于尼罗河泛滥后土地的重新测量。“几何”一词，拉丁文是 geometria，希腊文是 γεωμετρια，是由 γεα（土地），μετρειν（测量）二字合成，原义是土地测量的意思。

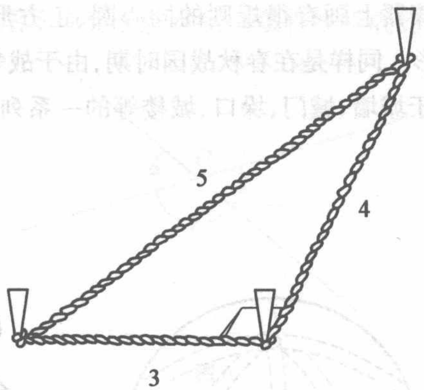

图 2

古埃及高级掌权者为了永久保存他们死后的尸体，所以每一位法老登基之后都为自己建造陵墓，而且陵墓建筑得越坚固越好。第三王朝初年，坟墓的基本形式是石砌的长方体，第四王朝以后坟墓改成举世闻名的金字塔形。法老库夫为自己建造了巨大的金字塔，塔高为 146.5 m，基底正方形边长为 233 m。在巴黎埃菲尔铁塔（高 300 m）1889 年落成之前，库夫的金字塔一直是世界最高的建筑物。

由库夫金字塔的造型和结构可以看出，四五千年前的埃及人不但有精湛的建筑技巧，而且还掌握了不少几何知识。

我国几何学的起源，萌芽于旧石器时代。原始人以自然物的形状为模型，经过反复观察、思考而形成某些简单形状的观念，如：观察一些树木就容易形成圆柱和直线的观念；观察平静的水面，就容易形成平面的观念；观察一些圆形的果子就容易产生球的观念，等等。

从我国考古工作者发掘的石器的形状、陶器的形状以及陶器花纹中几何图案也可以看出我们的祖先已经掌握了相当可观的几何知识，如北京猿人的石锤（图 3），大溪出土的空心陶球（图 4），张家口出土的陶器的几何图案（图 5），等等。

在我国古代社会中，工程测绘、制造工艺以及度量衡中用到了许多几何知识，如：夏商时代已开始兴修水利工程，为了使各项工程合乎需要，必须进行测量和计算，在河南偃师二里头发掘出来的早商时代宫殿遗址，规模宏伟，墙基笔直，柱孔排列整齐，分布均匀。在河南安阳殷墟几次发现商代使用的车子遗迹，车轮是圆的，而辐由毂向外射出把圆周角等分，也把圆形的轮等分。在春秋战国之际的出土文物中，也有引人注目的几何图形，如：在山东临淄郎家庄出土的

(约前500—前400)漆器上画有很规则的同心圆、正方形、平行线、三角形、菱形、长方形等几何图形。同样是在春秋战国时期,由于战争的需要,修筑了很多城墙,如《墨子》中关于城墙、城门、垛口、城楼等的一系列计算问题都与立体几何有关。


图3

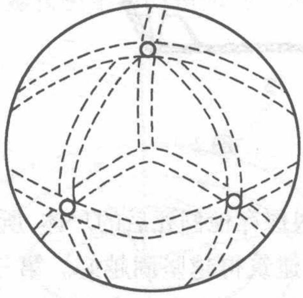
图4


图5

由以上事实可以看出,由于人类生活、生产和战争的需要,已经形成了许多几何形体观念,积累了较为丰富的几何知识。因此,人类实践是形成形体观念和建立几何抽象概念的基础。

1.2 几何学的早期发展

埃及与希腊虽然只有地中海之隔,但希腊气候适宜,并没有像埃及那样的洪水泛滥。希腊人吸收了埃及的文化并加以发展,他们把从埃及和巴比伦得来的经验知识加以思考、整理使其理论化,而且把理论知识应用于实际。在这方面做出重要贡献的是世界上最早的数学家塔利斯(Thales,前624—前546),塔利斯生于小亚细亚的米利都城,青年时代作过商人,曾游访过巴比伦和埃及,学习了数学和天文知识,回国后在米利都创建了伊奥尼亚学派。塔利斯当时是自发的唯物主义代表,享有很高的声望,人们推崇他为古希腊七贤之首,在历史上人们称他为“科学之祖”。下面简要介绍一下他的主要功绩。

1. 塔利斯的功绩

(1)对顶角

定理1 对顶角相等。

所谓对顶角是指图 6 中交于点 O 的两条直线所成的 α 角和 β 角。

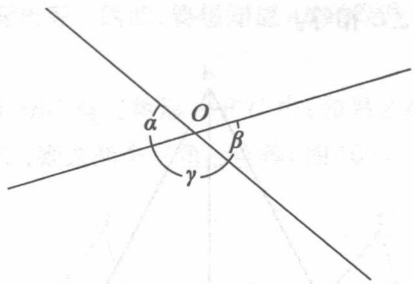

图 6

这两个角相等是当然的,而塔利斯做了如下证明,考虑图中的 γ 角,则有

$$\alpha + \gamma = 2 \text{个直角}$$

$$\beta + \gamma = 2 \text{个直角}$$

所以

$$\alpha = \beta$$

(2)全等及其应用

定理 2 设有三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$,如果 AB 的长度等于 $A'B'$ 的长度,AC 的长度等于 $A'C'$ 的长度,$\angle A$ 等于 $\angle A'$,则这两个三角形全等(图 7)。

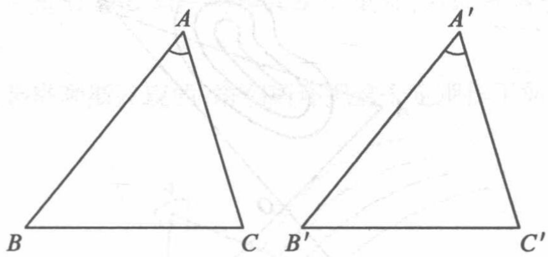

图 7

所谓两个三角形全等是指这两个三角形恰好重合的意思。

事实上,我们移动三角形 ABC,使 AB 与 $A'B'$ 重合,因为 AB 与 $A'B'$ 相等,所以恰好重合,这时,如果把点 C 与 C' 放在 AB 与 $A'B'$ 的同侧,因 $\angle A$ 与 $\angle A'$ 相等,所以 AC 与 $A'C'$ 必重合,又因 AC 与 $A'C'$ 相等,所以点 C 与 C' 重合,因为能够使三角形 ABC 恰好重合于三角形 $A'B'C'$,所以,三角形 ABC 与三角形 $A'B'C'$ 全等。

这个定理是塔利斯发现的,塔利斯利用这个定理还证明了下面的定理。

定理3 等腰三角形的两底角相等(图8),即在三角形ABC中若AB与AC的长度相等,则$\angle B$与$\angle C$相等。

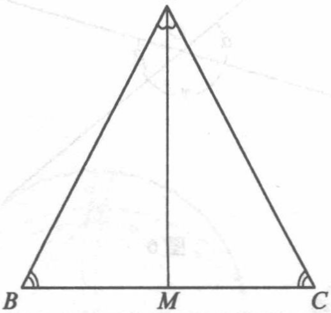

图8

塔利斯首先引$\angle A$的二等分线与边BC交于点M。于是,在三角形ABM与ACM中,由假定AB与AC长度相等,AM与AM公用当然相等,而且$\angle BAM$与$\angle CAM$相等,所以利用前面的定理三角形ABM与ACM全等,从而$\angle B$等于$\angle C$。

塔利斯还利用定理2测量了隔山不相见的两个地点A与B间的距离(图9)。

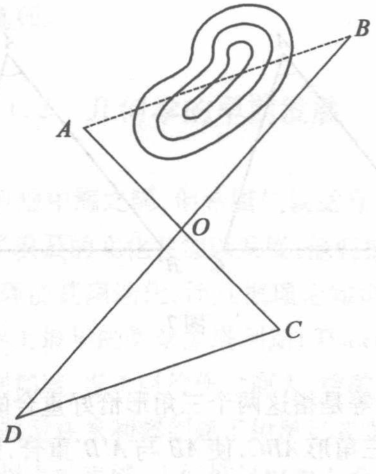

图9

塔利斯首先取从A点和B点都能看到的一点O,联结A与O,并在其延长线上取与AO距离相等的OC,再联结B与O,并在其延长线上取与BO相等的OD。这样,在三角形OAB与OCD中,OA与OC相等,OB与OD相等,$\angle AOB$与

$\angle COD$ 因为是对顶角必等。根据全等定理，三角形 OAB 与 OCD 全等。从而，AB 的长度与 CD 的长度相等。因此，要想知道 AB 的距离，只要测出 CD 的长度即可。

定理4 在三角形 ABC 与三角形 $A'B'C'$ 中，如果 $\angle B$ 等于 $\angle B'$，$\angle C$ 等于 $\angle C'$，边 BC 等于边 $B'C'$，则这两个三角形全等（图10）。

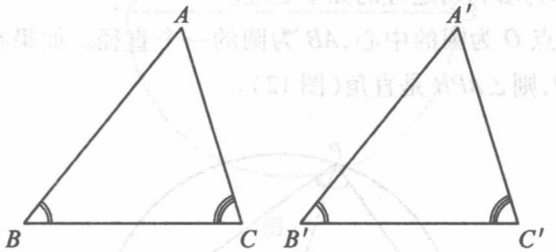

图10

实际上，移动三角形 ABC，使边 BC 与边 $B'C'$ 重合，因为 BC 与 $B'C'$ 的长度相等，所以恰好重合。这时，如果把 A 与 A' 放在 BC 与 $B'C'$ 的同侧，则因 $\angle B$ 与 $\angle B'$ 相等，所以 BA 与 $B'A'$ 重合，又因 $\angle C$ 与 $\angle C'$ 相等，所以 CA 与 $C'A'$ 重合，从而 A 与 A' 重合。

因为能够使三角形 ABC 与三角形 $A'B'C'$ 重合，所以三角形 ABC 与三角形 $A'B'C'$ 全等。

这个定理也是塔利斯发现的，塔利斯还把这个定理作了如下应用（图11）。

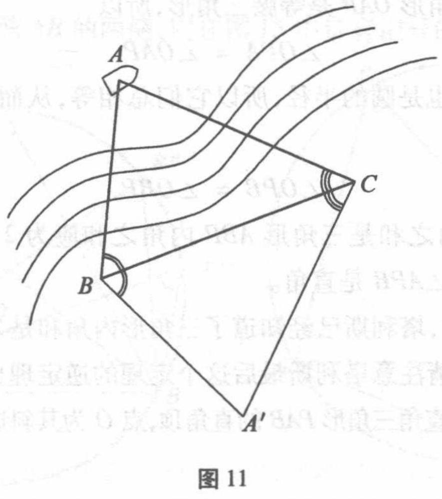

图11

塔利斯用下面的方法测量了从岸上一点 B 到水面上船 A 的距离。塔利斯首先在岸上取一点 C,测量了 $\angle CBA$ 和 $\angle BCA$,并且在 BC 与 A 的反侧作 $\angle CBA'$ 等于 $\angle CBA$,作 $\angle BCA'$ 等于 $\angle BCA$,从而得出 BA' 与 CA' 的交点 A'。

于是,根据全等定理,三角形 ABC 与三角形 $A'BC$ 全等,从而 AB 与 $A'B$ 等长,所以测量 $A'B$ 就知道了 AB 的距离。

还有一个称为塔利斯定理的如下定理。

定理 5 设点 O 为圆的中心,AB 为圆的一个直径。如果在圆周上于 A,B 以外任取一点 P,则 $\angle APB$ 是直角(图 12)。

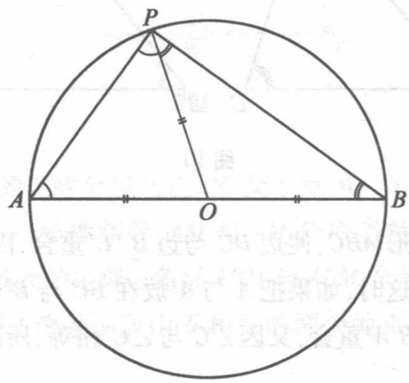

图 12

塔利斯作了如下证明,首先联结点 P 与点 O,因为 OA 与 OP 是半径,所以它们总相等,从而三角形 OAP 是等腰三角形,所以

$$\angle OPA = \angle OAP$$

又因 OB 与 OP 也是圆的半径,所以它们总相等,从而三角形 OBP 也是等腰三角形,所以

$$\angle OPB = \angle OBP$$

因为上述四个角之和是三角形 ABP 内角之和应为 2 个直角,所以 $\angle OPA$ 加 $\angle OPB$ 是直角,即 $\angle APB$ 是直角。

从这个定理来看,塔利斯已经知道了三角形内角和是 2 个直角。

因为以后需要,请注意塔利斯最后这个定理的逆定理也成立,即

定理 6 设 P 是直角三角形 PAB 的直角顶,点 O 为其斜边的中点,则点 O 与三个顶点 P,A,B 等距。

为了证明这一定理,只要证明以 O 为圆心,以 OA 为半径的圆通过点 P 即

可(图 13)。

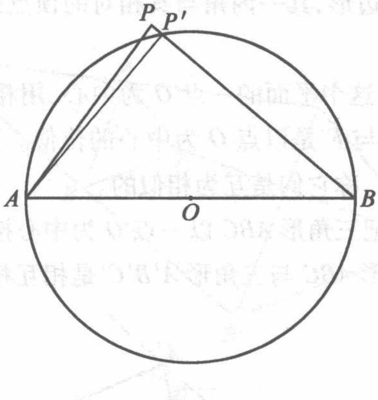

图 13

如果假定此圆不通过 P 点,则圆必与 PB 交于与 P 不同的点 P',但是,由假定 AP 与 PB 垂直,又根据塔利斯定理 AP' 与 PB 垂直,因此从点 A 就可向 PB 引出两条垂线,这是矛盾的,由此可知以 O 为中心,以 OA 为半径的圆必通过 P 点,而且 OA,OB,OP 长度相等。

根据塔利斯定理可以推知下面的更一般的定理也成立。

定理 7 在一圆内位于同弧上的圆周角相等。

这个定理的意思是说,在圆 O(图 14)内取一弦 AB,在 AB 同侧的圆周上取点 $P,P',P'',P''',\cdots$,则 $\angle APB=\angle AP'B=\angle AP''B=\angle AP'''B=\cdots$

特别情形,当 AB 是直径时,这些圆周角都是直角。

若 P 与 P' 取在弦 AB 的两侧,则在图 15 中带有记号的角相等。

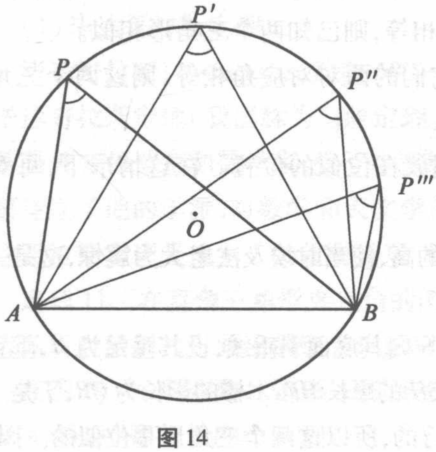

图 14

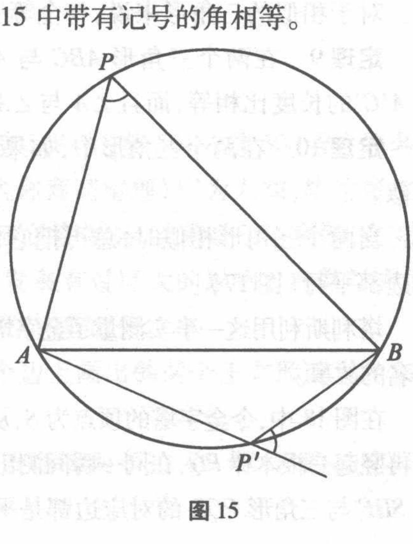

图 15

在这种情形下，考虑到 $PAP'B$ 是圆内接四边形，则下列定理成立。

定理 8 圆内接四边形，其一内角与其相对的顶点处的外角相等。

(3)相似及其应用

把平面上一图形以这个平面的一点 O 为中心，用相同的比例扩大或缩小，得到图形 F'，这时称 F 与 F' 是以点 O 为中心的位似。而且当两个图形能够以一点为中心构成位似时，称它们是互为相似的。

例如，在图 16 中，把三角形 ABC 以一点 O 为中心按同一比例扩大，得出三角形 $A'B'C'$，那么三角形 ABC 与三角形 $A'B'C'$ 是相互相似的。

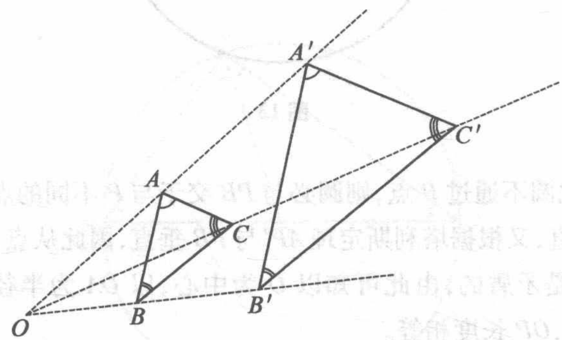

图 16

在这种情形下，在三角形 ABC 与三角形 $A'B'C'$ 中，边 BC 与 $B'C'$，边 CA 与 $C'A'$，边 AB 与 $A'B'$ 是平行的，而且 $\angle A$ 与 $\angle A'$，$\angle B$ 与 $\angle B'$，$\angle C$ 与 $\angle C'$ 是相等的。

对于相似的三角形来说，与全等三角形类似的两个定理也成立。

定理 9 在两个三角形 ABC 与 $A'B'C'$ 中，如果 AB 与 $A'B'$ 的长度比和 AC 与 $A'C'$ 的长度比相等，而且 $\angle A$ 与 $\angle A'$ 相等，则已知两个三角形相似。

定理 10 在两个三角形中，如果它们的两对对应角相等，则这两个三角形相似。

当两个三角形相似时，总可把它们放在位似的位置。在这情形下，每对对应边都平行(图 17)。

塔利斯利用这一事实测量了金字塔的高，使当时埃及法老大为震惊，这是一个有名的故事。

在图 18 中，令金字塔的顶点为 S，从 S 向其底面引垂线，设其垂足为 H，垂直地面再竖起一根木棒 PQ，在同一瞬间测出 SH 的影长 HF，木棒的影长为 QR，于是三角形 SHF 与三角形 PQR 的对应边都是平行的，所以这两个三角形是位似的。因此，