高等学校教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

第二版

下

清华大学应用数学系
盛祥耀 居余马
李欧 程紫明 编

高等学校教材

高等数学

（第二版）

下　册

清华大学应用数学系 盛祥耀　居余马　李　欧　程紫明 编

高等教育出版社

内容提要

本书(第二版)由编者参照全国高等工科数学教材编审委员会于1980年审订的“高等数学教学大纲”的要求. 在我社1964年版《高等数学》(基础部分)的基础上重新编写而成. 第二版吸取了清华大学有关教师在教学中积累的许多有益经验,在内容上作了较大修改和补充.

下册内容包括:多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、广义积分(续)与含参变量积分及常微分方程等.

本书下册经工科数学教材编审委员会于1984年11月召开的审稿会上审定作为高等工科院校教材.

本书论述清楚,例题类型多样,便于自学,可作为高等工业院校教材,也可作为工程技术人员及自学者用书.

高等学校教材

高等数学

(第二版)

下册

清华大学应用数学系 盛祥耀 居余马 李欧 程紫明 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 21.25 字数 488,000

1964年×月第1版 1985年10月第2版 1985年10月第1次印刷

印数 00,001--34,250

书号 13010·01133 定价 3.70 元

目　录

第八章　多元函数及其微分法

§1　多元函数的基本概念

I. 多元函数的定义

前面我们研究了一元函数（一个自变量的函数）及其微分法．但在自然科学与工程技术问题中，往往会遇到依赖于两个或更多个变量的函数，这种函数称为多元函数．多元函数所依赖的诸变量之间彼此无关，它们的值可以在一定范围内任意选取，因而都称之为自变量．

例 1. 直圆柱体的侧面积 S、底半径 R 和高 H 之间有关系式

$$S=2\pi RH \quad (R>0, H>0).$$

R 与 H 是两个独立的自变量，当它们分别取值时，S 的对应值就随之确定．称 S 是自变量 R 与 H 的二元函数．

例 2. 电流所产生的热量 Q 决定于电压 F、电流强度 I 以及时间 t，这些量之间的关系是

$$Q=0.24IE \quad (I>0, E>0, t>0).$$

I, E, t 是三个独立的自变量，当它们分别取值时，Q 的对应值就随之确定．称 Q 是自变量 I, E 与 t 的三元函数．

二元函数的定义．设有三个变量 x, y 和 z．如果对于 x, y 所能取的每一对值，z 按一定规则有一个确定的值与之对应，则称 z 是 x, y 的**二元函数**．记做

$$z=f(x, y) \quad 或 \quad z=z(x, y).$$

并称 x, y 为**自变量**，z 为因变量．

自变量 x, y 所能取的每对值的全体称为这个函数的**定义域**．

当自变量 x, y 分别取值 x_0, y_0 时，因变量 z 的对应值 z_0 记做 $z_0=f(x_0, y_0)$，称为二元函数 $z=f(x, y)$ 当 $x=x_0, y=y_0$ 时的**函数值**．

类似地，可以定义三元函数 $u=f(x, y, z)$，四元函数 $u=f(x, y, z, t)$ 以及 n 元函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 等．多于一个自变量的函数统称为**多元函数**．

从一元函数到二元函数，在内容和方法上都会出现一些新的实质性的差别，而从二元函数到三元或三元以上的函数，仅会产生一些技术性的困难．因此研究多元函数，应对二元函数做比较详尽的探讨．研究二元函数一方面要注意二元函数与一元函数形同实异之处；另一方面还要利用一元函数已有的结果来研究二元函数．譬如在二元函数 $z=f(x, y)$ 中，当 $y=y_k$（常数）时，$z=f(x, y_k)$ 成为自变量 x 的一元函数；同样当 $z=z_k$（常数）时，$z_k=f(x, y)$ 成为一元隐函数．将二元函数中的一个变量看成常量，使之成为一元函数而加以研究，从而得出二元函数的一些性质．这是以后我们常用的研究二元函数的方法．

每个二元函数都有定义域. 对直接从实际问题所提出的函数，往往从实际问题的具体情况就能指出函数的定义域. 如例 1 中，圆柱体的底半径 R、高 H；例 2 中的电压 E、电流强度 I、时间 t 一般都取正值. 对于单纯由数学式子表示的函数，它的定义域，就是通过这个数学式子能确定出对应实函数值的那些自变量值的全体.

例 3. 求函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域.

解 由已知函数的表达式可以看出，自变量所取的值，必须适合不等式 $1-x^2-y^2\geqslant 0$. 这就是说，已给函数的定义域由不等式

$$x^2+y^2\leqslant 1 \qquad ①$$

来表示.

例 4. 求函数

$$z=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

的定义域.

解 由已给函数的表达式可以看出，自变量所取的值必须同时适合下列不等式：

$$y-x>0, \quad x\geqslant 0 \quad 及 \quad x^2+y^2<1, \qquad ②$$

这些不等式表示了已给函数的定义域.

为了使二元函数的定义域更直观一些，我们将定义域用几何图形来表示. 首先，对于自变量取得的一对数值 (x, y)，用 xy 直角坐标平面上以 (x, y) 为坐标的点 P 来表示. 其次，如果对于这一对数值，已给函数具有对应值，我们称已给函数在点 P 处有定义，也可以记做 $z=f(x, y)=f(P)$. 函数的定义域一般形成 xy 平面上的一个平面域.

例 3 中所给函数的定义域由不等式①表示. 它在 xy 平面上表示以原点为圆心，包括边界的单位圆域(图 8.1).

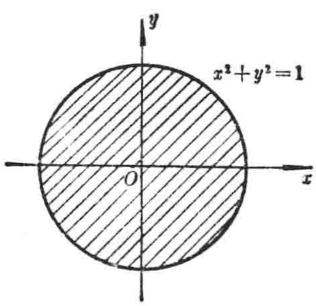

图 8.1

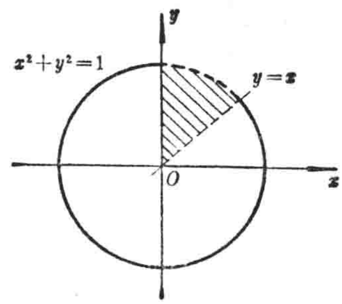

图 8.2

例 4 中所给函数的定义域由不等式②表示，不等式 $y-x>0$，即 $y>x$ 表示直线 $y=x$ 以上的平面部分，但不包括直线本身；不等式 $x\geqslant 0$ 表示包括 y 轴的右半平面；不等式 $x^2+y^2<1$ 表示以原点为圆心的单位圆内部，但不包括边界圆. ②所表示的平面域是上述三个平面域的公共部分(图 8.2).

同样，例 1 中所讨论的函数定义域 $R>0, H>0$ 是 RH 直角坐标平面上不包括坐标轴的第一象限部分(图 8.3).

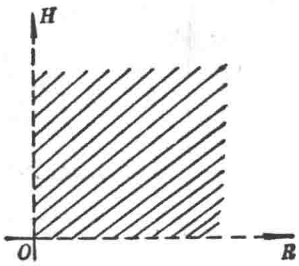

图 8.3

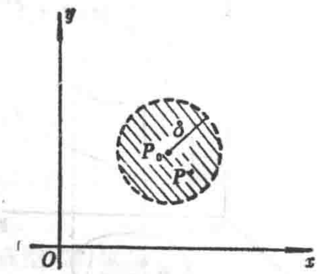

图 8.4

这里给出以后常用的两个名词：包括全部边界的平面域叫**闭域**，不包括边界上任何一点的平面域叫**开域**，图 8.1 中的平面域是闭域，图 8.3 中的平面域是开域，图 8.2 中的平面域既不是闭域也不是开域. 我们称以 $P_0(x_0, y_0)$ 点为中心，以某个正数 δ 为半径的圆形开域为 P_0 点的 **δ 邻域**(图 8.4).

若从 P_0 点的 δ 邻域中挖去 P_0 点，则所形成的域内任意一点 $P(x, y)$ 可以用下列不等式表示

$$0<|PP_0|<\delta$$

或

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,$$

其中 $|PP_0|$ 是 P 与 P_0 间的距离.

II. 二元函数的表示法

(1) 公式表示法. 前面诸例题中所讨论的函数都是用公式表示的.

(2) 表格表示法. 工程技术中常通过实验，测量出自变量的值及与它们对应的函数值，列成表格. 例如，螺旋传动的效率 η 作为摩擦系数 μ 及螺旋角 α 的函数，可列表如下：

μ \ η \ α	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{36}$
0.01	0.897	0.945	0.961	0.970	0.974
0.02	0.812	0.895	0.925	0.941	0.950
0.03	0.743	0.850	0.892	0.914	0.927
0.04	0.683	0.809	0.861	0.888	0.904
0.05	0.633	0.772	0.831	0.863	0.882

当 $\mu=0.03$, $\alpha=\frac{\pi}{18}$时，由表中的第四行、第三列的数据立即可知螺旋传动的效率 $\eta=0.850$.

(3) 几何表示法. 作出空间直角坐标系. 设已给函数为 $z=f(x, y)=f(P)$. 对于这个函数的定义域上的一点 $P_0(x_0, y_0)$，与它对应的函数值记为 $z_0=f(x_0, y_0)=f(P_0)$，我们就得到空间一

点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$．这样，定义域上每一点 P 都对应空间一点．这些点的全体，一般地说形成了一个曲面．这个曲面称为 $z=f(x, y)$ 的**图形**（图 8.5）．

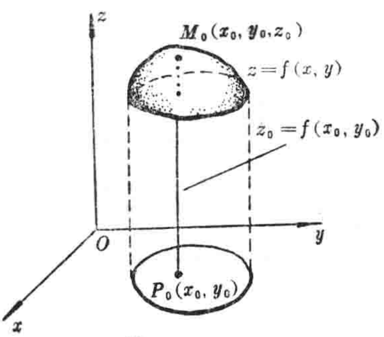

图 8.5

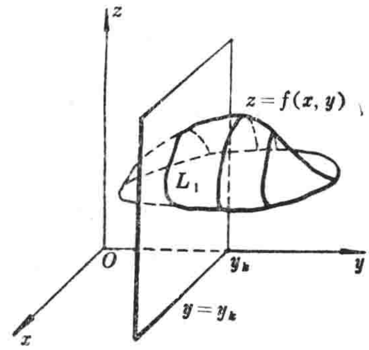

图 8.6

对于已给函数 $z=f(x, y)$，用描点法画出它的图形往往是比较困难的．前面在研究二次曲面图形时曾用一些平行坐标面的平面来截割曲面，这样截割出来的一系列曲线，能使我们了解这个曲面的轮廓．若用平面 $y=y_k$（常数）截割曲面，则得到曲线 L_1，它的方程是

$$L_1:\ \begin{cases} y=y_k, \\ z=f(x, y_k). \end{cases}$$

从曲线 L_1 可以看出曲面的轮廓（图8.6）．若用平面 $z=z_k$（常数）截割曲面，则得到曲线 L_2，它的方程是

$$L_2:\ \begin{cases} z=z_k, \\ z_k=f(x, y). \end{cases}$$

曲线 L_2 在 xy 平面上的投影是平面曲线 L^*，它在 xy 平面直角坐标系中的方程是 $z_k=f(x, y)$（图 8.7）．对于曲线 L^* 上的一切点，已给函数的函数值都是 z_k．曲线 L^* 称为已给函数的一条**等值线**或**等高线**．画出已给函数 $z=f(x, y)$ 的一系列等值线，也就容易想像出表示这个函数的曲面的大致轮廓了．

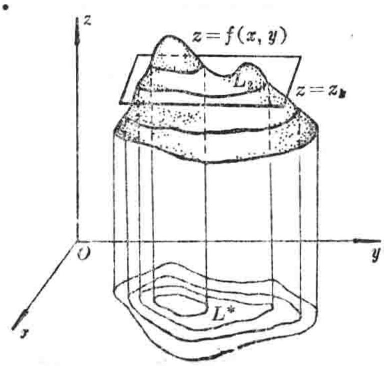

图 8.7

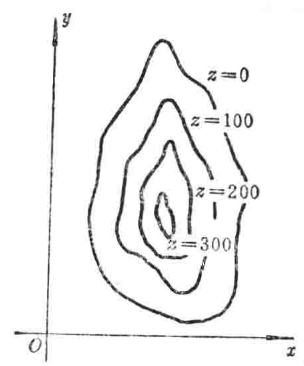

图 8.8

通常的地形图就是描绘在水平面上的某地形的一系列等高线．在每一条等高线上注明地形的高度，并且一般高度间隔都是相等的（图 8.8）．这一系列等高线形成了等高线网，由等高线网就能想像出地形的轮廓．在其他学科中，等值线网也很有用．例如气象学中用的"等温线网"、"等

压线网”就是把温度、气压看作点 $P(x, y)$ 的函数时的等值线网.

等值线的概念可以推广到三元函数中去. 例如静电学中，电位 V 是空间点 $P(x, y, z)$ 的函数. 电位同为 V_0 的点构成一曲面，这个曲面就是三元函数 $V(x, y, z)$ 的一个等值面或等位面 $V(x, y, z)=V_0$, 等位面的概念在场论中是很重要的.

§1 习 题

1. 将圆弧所对弦长 l 表示为：(1)半径 r 与圆心角 φ 的函数；(2)半径 r 与圆心到弦的距离 d 的函数(圆弧所对的圆心角不超过 π 弧度).

2. 质量为 M 的质点在空间的位置是 (a, b, c), 质量为 m 的质点在空间的位置是 (x, y, z), 将质点 M 所受的引力在三个坐标轴上的投影 P_x、P_y, P_z 表示为 x, y, z 的函数.

3. 将圆锥体的体积 Z 表示为其斜高 x 和高 y 的函数.

4. 在半径为 R 的球内, 内接一个以矩形为底的正棱锥体, 试将正棱锥体体积 V 表示成底的两边 x 及 y 的函数, 这个函数是单值的吗?

5. 已知函数 $F(x, y)=\dfrac{\varphi(x)\psi(y)-\psi(x)\varphi(y)}{\varphi(xy)\psi(xy)}$,

求 $F\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$; 设 $\varphi(u)=u^3$, $\psi(v)=v^2$ 再计算 $F\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$.

6. 若 $f(x, y)=\sqrt{x^4+y^4}-2xy$. 求证：$f(tx, ty)=t^2 f(x, y)$.

7. 若 $f\left(x+y, \dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 求 $f(x, y)$.

8. 已给函数 $z=\dfrac{(u-x)(v-y)}{(u-y)(v-x)}$, 设自变量 x, y, u, v 的值(按所指次序)形成一个算术级数, 试证：在这种情况下函数值等于 $\dfrac{4}{3}$.

9. 设 $z=x+y+f(x-y)$, 若当 $y=0$ 时, $z=x^2$. 求函数 f 及 z.

求 10—14 题函数的定义域，并在 xy 平面上画出其图形.

10. $z=\sqrt{4x^2+y^2-1}$.

11. $z=\ln(xy)$.

12. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

13. $z=\ln(y^2-4x+8)$.

14. $z=\dfrac{1}{R^2-x^2-y^2}$.

§2 二元函数的极限和连续

I. 二元函数的极限

与一元函数一样, 我们首先讨论二元函数 $z=f(x, y)$ 的极限问题.

定义. 设有常数 A, 如果对于任意给定的正数 ε, 总存在一个正数 δ, 当 $0<|PP_0|<\delta$ 或 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时[注], 不等式

$$|f(P)-A|<\varepsilon \quad \text{或} \quad |f(x, y)-A|<\varepsilon$$

[注] 1. 这里的 P_0 点是指这样的点：在点 P_0 的任意正数 δ 邻域内(除 P_0 点外), 总有使函数 $f(P)$ 有定义的点. 2. 式子 $0<|PP_0|<\delta$ 或 $0<\sqrt{(x-x_0)^2(y-y_0)^2}<\delta$ 内的 P 点或 (x, y) 是只考虑使函数 $f(P)$ 或 $f(x, y)$ 有定义的点.

恒成立. 则称当 P 趋于 P_0(或 (x, y) 趋于 (x_0, y_0))时, 函数 $f(x, y)$ 以 A 为**极限**, 记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A.$$

二元函数极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$ 的几何意义是: 任给正数 ε, 总存在 P_0 点的一个 δ 邻域, 在此邻域内(除 P_0 点外), 函数 $z=f(x, y)$ 的图形总在平面 $z=A+\varepsilon$ 及 $z=A-\varepsilon$ 之间.

例 1. 用极限定义叙述 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5}$.

解 对于任意给定的正数 ε, 总存在着一个正数 δ, 当 $0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$ 时,

$$\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}-\frac{4}{5}\right|<\varepsilon$$

恒成立. 此即 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5}$ 的定义.

显然, 通过定义验证这样的极限是比较困难的. 和一元函数一样, 后面我们讲到连续性问题时, 这类极限是比较容易求得的.

值得注意的是, 虽然二元函数极限的定义与一元函数极限的定义极为类似, 但它们之间有本质的差别, 我们已经知道, 对于一元函数的极限, 只要 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 成立, 即能得出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 成立. 其逆也真. 也就是说, 函数的左右极限存在且相等是函数极限存在的充要条件. 但对二元函数的极限来说, 情况要复杂得多. 如已知二元函数 $z=f(x, y)$, 若 $P(x, y)$ 沿平行 x 轴方向趋向于 $P_0(x_0, y_0)$, 及沿平行 y 轴方向趋向于 $P(x_0, y_0)$ 时, $z=f(x, y)$ 的极限均存在且相等, 则还不能保证 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ 存在. 也就是说当 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}} f(x, y_0)=A$, $\lim\limits_{\substack{x=x_0\\ y\to y_0}} f(x_0, y)=A$ 时, 不一定能得出 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ 存在的结论. 即使 $P(x, y)$ 沿任意直线方向趋向于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, $z=f(x, y)$ 的极限均存在且相等, 还是不能保证 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ 的存在. 下面举两个例子说明这个问题.

例 2. 已给二元函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

试证明: 当 $(x, y)\to(0, 0)$ 时, 这个函数没有极限.

证 因为在 x 轴及 y 轴上的点, 函数值都为 0. 所以 (x, y) 沿 x 轴趋向于 $(0, 0)$ 及沿 y 轴趋向于 $(0, 0)$ 时, $f(x, y)$ 的极限值都是 0. 但在直线 $y=x$ 上的点(除去原点外)函数值都为 1. 因此不论 δ 多么小, 以原点为圆心, 以 δ 为半径的圆内, 必然包含 x 轴上的点, 且包含直线 $y=x$ 上的点. 换句话说, 不论 δ 多么小, 在该圆内总可以找到使函数值取得 0 的点, 也可以找到使函数值取得 1 的点. 这样, $(0, 0)$ 点的极限就不可能存在. 事实上, 0 和 1 这两个数不可能同时和任何常量

A 的差的绝对值都小于任意正数 ε.

例 3. 已给二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

试证明：当 $(x,y)\to(0,0)$，这个函数没有极限.

证 当点 P 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时，显然 $f(x,y)\to 0$，因为 $f(0,y)=0(y\neq 0)$. 若点 P 沿斜率为 k 的直线 $y=kx$ 趋向点 $(0,0)$，则由于在这条直线上

$$f(x,y)=\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2},$$

而 $x\neq 0$，故

$$f(x,y)=\frac{kx}{x^2+k^2}.$$

于是当 $P\to(0,0)$ 时，$f(x,y)\to 0$. 这说明 $P(x,y)$ 沿任意直线方向趋向于 $(0,0)$，这个函数的极限均为 0，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 仍不存在. 因为若 $P(x,y)$ 沿抛物线 $y=x^2$（除去原点）趋向 $(0,0)$ 时，则函数

$$f(x,y)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}.$$

因此，不论 δ 多么小，在以原点为圆心，以 δ 为半径的圆内，恒有使函数值取得 $\frac{1}{2}$ 的点，也有使函数值取得 0 的点，这样，这个二元函数在原点处的极限，必不存在.

下面我们举一个极限存在的例子.

例 4. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$ 存在.

证 因为 $0\leqslant\left|\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|x|\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}|x|$（$x,y$ 不同时为零），

而
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{2}|x|=0,$$

所以
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$$

存在，且其值为 0.

从以上的例题可以看出，讨论二元函数的极限比一元函数的极限要复杂得多，研究起来往往比较困难，不过，在实际问题中大多是初等函数，和一元函数一样，初等函数在其定义区域内不但有极限，而且极限值就等于函数值，下面我们就来讨论它.

II. 二元函数的连续性

定义. 如果 (i) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域上有定义；(ii) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，(iii)

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是**连续的**.

函数在一点处的连续定义，也可以用增量形式表示，若在点 (x_0,y_0) 处，自变量 x，y 各取得增量 $\Delta x,\Delta y$，函数随之取得增量 Δz，则

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

这个增量称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 处的**全增量**. 现在我们用函数的全增量来表述函数在一点处连续的定义. 记 $x=x_0+\Delta x,y=y_0+\Delta y$，定义中的等式

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

就相当于

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0,$$

也就是

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\Delta z=0.$$

关于间断性问题，二元函数与一元函数不同的是：二元函数除有时有间断点以外，有时还有间断线. 如 $z=\dfrac{xy}{y-x^2}$ 不仅有间断点 $(0,0)$，还有间断线 $y=x^2$. 同样三元函数如 $u=\dfrac{xyz}{x+y+z}$ 还有间断面 $x+y+z=0$.

和一元函数一样，我们可以研究二元函数在一个域上的连续性，在闭域上连续函数的性质及连续函数的运算等问题.

所谓二元初等函数是指：可用 x,y 的一个数学式子来表示的函数，这个式子分别由 x,y 的基本初等函数经过有限次四则运算与复合步骤所构成. 可以证明，二元初等函数 $z=f(x,y)$ 在它的定义区域上是连续的(不证). 即当点 $P_0(x_0,y_0)$ 属于这函数的定义区域时，我们有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

这就提供了对许多常见二元函数求极限的方法. §1 的例 1 就是因为

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

在点 $(1,2)$ 处连续(它在这个函数的定义区域内，而这个函数又是初等函数)，所以

$$\lim_{\substack{x\to 1\\y\to 2}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 1\\y\to 2}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=f(1,2)=\frac{4}{5}.$$

同样

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 3}} e^{-xy}\cos\frac{x}{y}=1,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\arcsin\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}.$$

对于在有界闭域上的连续函数，我们有下述的定理(不证).

定理(最大值和最小值定理). 如果函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续, 则

(i) 在 D 上至少存在一点 (ξ_1,η_1), 恒有 $f(x,y)\leqslant f(\xi_1,\eta_1)$, $(x,y)\in D$;

(ii) 在 D 上至少存在一点 (ξ_2,η_2), 恒有 $f(x,y)\geqslant f(\xi_2,\eta_2)$, $(x,y)\in D$.

综上所述, 可知函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处有无函数值, 与当 $P\to P_0$ 时函数有无极限值是彼此无关的. 但函数在 P_0 点处连续时, 则保证在 P_0 点处有函数值, 且当 $P\to P_0$ 时, 它以此函数值为其极限值.

§2 习 题

15. 证明: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

16. 证明: $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=0$.

17. 判断 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin\pi x\sin\pi y}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$ 存在否?

下列 18—20 题中的函数在点 $(0,0)$ 处是否连续?

18. $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0,\\ 0, & xy\neq 0.\end{cases}$

19. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

20. $f(x,y)=\sin(x^2+y)$.

21. 问函数 $\sin(y+\sqrt{x})$ 在什么域上连续?

22. 问函数 $x^2\ln(x^2+y^2-2)$ 在什么域上连续?

23. 从 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x,\dfrac{1}{2}x\right)=\dfrac{2}{5}$, 能否断定 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在?

§3 偏导数 高阶偏导数

I. 偏导数概念

多元函数的偏导数是指这个函数对其中一个自变量的变化率, 而其他自变量保持不变. 如在二元函数 $z=f(x,y)$ 中, 当自变量 y 不变时, z 对 x 的变化率称为 z 对 x 的偏导数; 当自变量 x 不变时, z 对 y 的变化率称为 z 对 y 的偏导数. 因此多元函数的偏导数也是一个一元函 数的导数. 所谓"偏"是指对其中某一个自变量而言.

若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处, 自变量 x 取得增量 Δx, 而自变量 $y=y_0$ 不变时, 这函数取得增量.

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

这个增量称为 z 在 P_0 处对 x 的**偏增量**.

定义. 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的**偏导数**. 记作

$$f'_x(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,\,y_0)},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,\,y_0)}\quad 或\quad \left.z'_x\right|_{(x_0,\,y_0)},$$

即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,\,y_0)}=f'_x(x_0,y_0).$$

记号"z'_x"或"$\frac{\partial z}{\partial x}$"都是指对 x 求导数,而 y 保持不变的意思,与过去一元函数 $y=f(x)$ 的导函数记号"y'"或"$\frac{dy}{dx}$"是有区别的.

如果在平面域 D 上每一点 $P(x,y)$ 处,$f'_x(x,y)$ 都存在,则对于 D 上每一点 $P(x,y)$,都有一个偏导数的值与它对应,这种对应关系所形成的函数,称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的**偏导函数**(或简称为**偏导数**). 记作 $f'_x(x,y)$ 或 $\frac{\partial z}{\partial x}$,

即
$$f'_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

应当注意两点: (1) 一个二元函数 $f(x,y)$ 在域 D 上的偏导函数 $f'_x(x,y)$ 也是一个二元函数;(2) $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的偏导数值 $f'_x(x_0,y_0)$, 就是偏导函数 $f'_x(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的函数值.

同样地, 我们可以定义 $f'_y(x_0,y_0)$ 和 $f'_y(x,y)$, 也可以定义 n 元函数 $w=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 $\frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial w}{\partial x_n}$ 等.

采用 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x_n}$ 等记号时,要将它们看成一个整体, 不能将它们看作 ∂z 与 ∂x、∂z 与 ∂y 或 ∂w 与 ∂x_n 的商, 这也是与一元函数中, $\frac{dy}{dx}$ 可以看成 dy 与 dx 的商有所区别的地方. 但 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 可以分别记做 $\frac{\partial}{\partial x}z$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}z$. 求偏导数用不到新的运算方法, 只需注意求导时将自变量中哪一个看成变量,哪些看成常量而已.

例 1. 求 $z=x^2y+y^2$ 在点 $P_0(2,3)$ 处的偏导数值.

解 先求出 z 在 (x,y) 处的偏导数: 将 y 看作常量,就得到 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy$; 将 x 看作常量, 就得到 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$, 由此即得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\,3)}=12,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,\,3)}=10.$$

例 2. 求 $z=x^y\,(x>0)$ 的偏导数.

解 将 y 看作常量,已给函数成为 x 的幂函数,故得$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$;将 x 看作常量,已给函数成为 y 的指数函数,故得$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

例 3. 对于关系式 $PV=RT$(R 为常量),求证

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证明 对于 $P=\frac{RT}{V}$,则$\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$;对于 $V=\frac{RT}{P}$,则$\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P}$;对于 $T=\frac{1}{R}PV$,则$\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{1}{R}V$,故得

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{PV}=-1.$$

这是热力学中一个重要关系式. 这里也可以看出$\frac{\partial P}{\partial V}$, $\frac{\partial V}{\partial T}$, $\frac{\partial T}{\partial P}$等不能看作是 ∂P 与 ∂V, ∂V 与 ∂T 等的商,否则关系式的右端将是 1 而不是 -1.

例 4. 已知 $w=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}$,

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数,求$\frac{\partial w}{\partial x_1}$, $\frac{\partial w}{\partial x_2}$, $\cdots$, $\frac{\partial w}{\partial x_n}$.

解
$$\frac{\partial w}{\partial x_1}=\frac{x_1-a_1}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}},\cdots,$$
$$\frac{\partial w}{\partial x_n}=\frac{x_n-a_n}{\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}}.$$

例 5. 有一并联电阻如图 8.9 所示,设其总电阻为 R, $R_1>R_2>R_3>0$. 如果改变电阻 R_1, R_2 或 R_3 中的某一个,问改变哪一个电阻,使总电阻 R 的改变量为最大.

解 函数对某一个变量的偏导数,就是函数对于该变量的变化率. 因此,要确定改变哪一个电阻,能使总电阻 R 的改变量为最大,只要看一下它们各自的偏导数就行了,偏导数最大的一个,就是使 R 改变量为最大的那一个.

由电学中知道,并联的电阻有如下的关系

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}.$$

可以求得, $\frac{\partial R}{\partial R_1}=\frac{R^2}{R_1^2}$, $\frac{\partial R}{\partial R_2}=\frac{R^2}{R_2^2}$, $\frac{\partial R}{\partial R_3}=\frac{R^2}{R_3^2}$,因 R_3 为最小,所以$\frac{\partial R}{\partial R_3}$为最大. 即改变 R_3, 能使总电阻 R 改变量为最大.

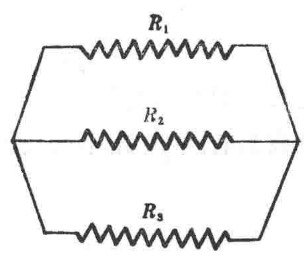

图 8.9

II. 二元函数偏导数的几何意义

函数 $z=f(x, y)$的图形是一个空间曲面(图 8.10),当自变量 y 取定值 y_0 时,方程

$$\begin{cases} y=y_0, \\ z=f(x, y_0) \end{cases}$$

代表一条平面曲线, 它是曲面 $z=f(x, y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线. 图 8.10 中的曲线弧 $\overset{\frown}{M_0M_1}$ 就是它的一部份. 自变量 x 的增量 Δx 与函数的偏增量 $\Delta_x z$ 在图中分别为 $\Delta x=M_0N_1$, $\Delta_x z=N_1M_1$. 偏导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$ 就是一元函数 $z=f(x, y_0)$ 在点 x_0 处的导数, 它在几何图形上表示曲线 $\overset{\frown}{M_0M_1}$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_1 关于 x 轴的斜率, 也就是切线对 x 轴的倾斜角 α 的正切 $\mathrm{tg}\alpha$. 即

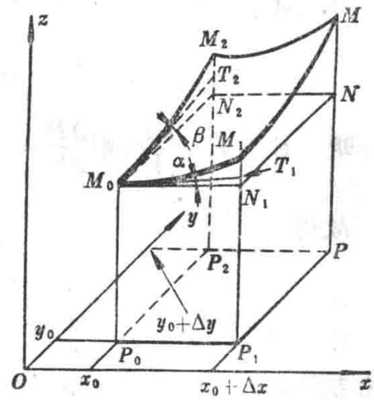

图 8.10

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}=\mathrm{tg}\alpha \qquad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right).$$

同理, 图中 $\Delta y=M_0N_2$, $\Delta_y z=N_2M_2$ 且

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}=\mathrm{tg}\,\beta \qquad \left(\beta \neq \frac{\pi}{2}\right).$$

因此, $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$ 的几何意义是曲线 $\begin{cases} y=y_0, \\ z=f(x, y_0) \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线 M_0T_1 对 x 轴的倾斜角 α 的正切; $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$ 的几何意义是曲线 $\begin{cases} x=x_0, \\ z=f(x_0, y) \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线 M_0T_2 对 y 轴的倾斜角 β 的正切.

和一元函数类似, 记 $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$, 且称

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x=\frac{\partial z}{\partial x}dx=d_x z, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial z}{\partial y}dy=d_y z$$

分别是函数 $z=f(x, y)$ 对 x 和对 y 的**偏微分**. 它们的几何意义是: $d_x z=N_1T_1$, $d_y z=N_2T_2$.

III. 高阶偏导数

设二元函数 $z=f(x, y)$ 具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y).$$

这两个偏导数也是在某个域上的 x 和 y 的二元函数. 设这两个偏导数也具有偏导数, 这样的偏导数共有四个, 用下列记号来表示:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x, y)=z''_{x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x, y)=z''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x, y)=z''_{yx},$$