"十三五"职业教育规划教材

Yixue Gaodeng Shuxue

医学高等数学

潘传中　沈　波　王　丽◎编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

医学高等数学

潘传中　沈　波　王　丽　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

医学高等数学 / 潘传中，沈波，王丽编著 . —北京：北京理工大学出版社，2016.8
ISBN 978-7-5682-3025-4

Ⅰ.①医…　Ⅱ.①潘…②沈…③王…　Ⅲ.①医用数学-高等学校-教材　Ⅳ.①R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 207280 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
　　　　　（010）82562903（教材售后服务热线）
　　　　　（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京富达印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 16
字　　数 / 377 千字
版　　次 / 2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 38.00 元

责任编辑 / 李慧智
文案编辑 / 孟祥雪
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 李志强

前言 Preface

随着现代医学的数量化、精确化，以及电子技术和计算机在医学领域中的广泛应用，医学检测手段也越来越先进，以定性描述为主的医药科学已逐步迈向定量化，临床检验和临床治疗正在发生深刻的变化，这就对医药院校学生和医务工作者的数学知识提出了新的更高的要求．

自 1953 年沃森（J. D. Watson）等建立了 DNA 双螺旋结构分子模型以来，医学和生物学的数学化进展迅猛．耗散结构理论、免疫网络理论，以及用微分方程组研究神经纤维的行为与神经冲动的传导分别荣获诺贝尔奖；借助电子计算机快速计算，按一定数学方法，由 X 射线的投影函数重建人体断层数字图像的 X—CT 成为医学影像的一次革命；20 世纪 70 年代，磁共振（MR）成像的临床应用是医学影像学中继 CT、B 超等影像检验手段后的又一次革命．为反映医药学上一些事物数量的变化特征，需要用函数表示法分析事物间的客观规律，从而得到正确的结论，如分析发病规律，解释致病原因，研究细胞分裂、细菌繁殖、药物的药理作用、卫生统计、pH 值与氢离子浓度的关系、疾病的防治措施、血液的流速与血管的收缩、肌肉力量与肌肉组织、临床决策分析、化验方法的确定、数学模型的建立等都要用到数学知识．这足以表明数学是现代医学研究中必不可少的工具．本书就是基于这一目的，经作者多年与医务工作者的共同探讨、研究，将数学与医学有机结合后编著而成的．力图通过本书的学习，医学类院校学生和医务工作者能够获得必要的数学理论知识和常用的计算方法，增强数据处理能力、逻辑思维能力及分析解决实际问题的能力，为后继课程的学习提供必要的数学基础，为今后阅读国内外有关的医学文献、处理科研数据、总结科研成果、撰写论文提供必要的数学知识储备．

本书内容丰富，覆盖了医学类院校各专业学生和医务工作者必须学习的数学内容．在保持数学系统的完整性和逻辑的合理性的前提下，适当地与医学、影像、药学、检验、护理实际相结合，既从现代医药研究的需要出发选编了新的内容，又根据专业的需要保持必要的深度和广度．本书注重基础理论，删除了冗长的理论推导，例题尽量体现医药应用和检验应用的特点．内容由浅入深、前后呼应，尽可能达到医务工作者好学、教师好教、学生易懂这一目标．

本教材的宗旨是提供教学内容公共平台，供高职高专医药、护理类专业学生使用．教材内容的设置分为必学内容和选学内容．选学内容由各校根据专业、学时、学分等实际情况选

择使用．对选学内容教材目录中加注“*”，以示区别和选择．全书共8章，总共90学时，其中必学内容54学时，选学内容36学时．

教材力求体现岗位需求，融入知识、技能、态度三项目标，在每章内容之前列出相应的学习目标，以便学生学习时目标明确、重点突出．围绕学习目标，设计了内容精致的链接插入相关正文，通过链接等介绍有关人物和在日常生活中与本专业相关的知识，拓展和深化有关的专业知识和能力．这部分内容仅供学生阅读，不属于考核内容．每节后有同步训练，每章后有小结和目标检测，有助于学生自己复习和测评，也可供教师考核时参照．

在编写本书的过程中，得到了达州职业技术学院领导、老师的大力支持，也得到了达州市中心医院的很多专家和四川文理学院数学与财经学院陈顺清教授的大力支持和帮助，在此一并致谢！

本书由达州职业技术学院教授潘传中、副教授沈波、讲师王丽、助教王可、副教授周英、讲师曹晓阳、讲师周黎等编著，由四川文理学院何聪教授任主审．

由于作者水平有限，书中难免存在错误缺漏，敬请读者批评指正．

潘传中

2016.3

目录 Contents

第一章

函数与极限

函数在医学卫生工作和医学研究中的应用非常广泛．为反映医药上的一些事物数量的变化特征，需要用函数表示法来分析事物间的客观规律，从而得出正确的结论．如分析发病规律，解释致病原因，研究细胞分裂、细菌繁殖、药物的药理作用、疾病的防治措施、卫生统计、人体血液 pH 值与血液氢离子浓度的关系等，都要用到函数的知识．

学习目标

（1）掌握初等函数的概念、数列极限存在的准则以及函数极限的运算方法．

（2）理解数列极限的性质、两个重要极限以及连续函数的概念．

（3）了解函数、数列极限、无穷小量等概念，以及闭区间上连续函数的性质．

（4）会计算数列、函数的极限，求函数的间断点，用初等函数的连续性求极限．

（5）能将初等函数分解成基本初等函数，并将函数应用于医学中．

第一节　函　　数

一、函数的概念与性质

1. 映射与函数

定义 1　设 A 和 B 是两个非空集合，如果对于 A 中的每一个元素 a，按照某种对应法则 f，在 B 中都有唯一确定的元素 b 与之对应，则称 f 是集合 A 到集合 B 的映射，记作 f：$A \to B$，其中 b 称为 a 在 f 下的像，a 称为 b 的原像．

定义 2　设 A 和 B 是实数集 $\mathbf{R}$ 的两个子集，我们把集合 A 到集合 B 的映射 f：$A \to B$ 称为函数，记作 $y=f(x)$，$x(x \in A)$ 称为函数的自变量，$y(y \in B)$ 称为函数值，A 称为定义

域，$\{y|y=f(x),\ x\in A\}$ 称为值域．

在学习函数的过程中要注意：函数的本质是对应关系，所以 $y=3x+1$，$x=3y+1$，$s=3t+1$ 表示同一个函数，因为它们的对应关系是相同的，定义域、值域也相同．

2. 函数的表示法及其在医学上的应用

函数常用的表示方法有解析法、列表法和图像法 3 种．

1）解析法（又称公式法）

用一个表达式来表示函数的方法叫解析法．函数的解析法在医学上应用十分广泛．

（1）婴儿的月龄与体重：出生 7～12 月的婴儿体重 y(kg) 与月龄 x(月) 的关系可近似表示为 $y=0.5x+3$.

如果一个婴儿刚满 10 个月，则其体重约为 8 kg.

（2）肿瘤生长：关于肿瘤生长动力学的研究表明，在早期阶段，大多数肿瘤都呈指数生长，可用指数函数 $V=V_0e^{kt}$ 描述，其中 V 表示在时刻 t 时肿瘤的大小，V_0 表示初始观察（$t=0$）时肿瘤的大小，k 称为生长速率（为常数），而能够比较好地描述肿瘤生长全过程（而不是早期阶段）的一个函数是 $V=V_0e^{\frac{k_0}{a}(1-e^{-at})}$，其中 k_0、a 为常数，其余同上．这个函数称为高姆拍茨（Gompetz）函数．

（3）细菌繁殖：如果细菌繁殖率为 k，那么 A 个细菌经过 x 次繁殖的细菌总数为 $y=A(1+k)^x$.

（4）药物的衰变规律：药物在人体内的吸收、代谢过程或在常温下放置的衰减规律为 $M=M_0e^{-kt}$（M_0 为最高浓度，k 为衰减常数，t 为时间）．该公式在医药学上称为药代动力学一级反应公式．

（5）人体血液的 pH 值：溶液的酸碱性是由氢离子和氢氧根离子的相对浓度决定的，常用 pH 表示溶液的酸碱性，pH<7 时，溶液呈酸性；pH>7 时，溶液呈碱性；pH=7 时，溶液呈中性．人体血液的酸碱性对人的生命极为重要，正常人血液的 pH 为 7.35～7.45，若 pH<7.35，则称为酸中毒；若 pH>7.45，则称为碱中毒，而人体血液的 pH 与血液中氢离子浓度用 $[H^+]$ 表示，其关系式为 $pH=-\lg[H^+]$．

2）列表法

列出表格表示一个变量是另一个变量的函数的方法叫列表法．例如，护士记录某一入院病人 5 天内的体温情况，如表 1-1 所示。

表 1-1　某病人的体温情况

时间/天	1	2	3	4	5
体温/℃	39.0	37.0	39.2	36.8	40.0

医生根据病人的体温是间歇发热的情况并结合其他症状，考虑病人可能患间日疟，再进一步做血液检查进行诊断．

3）图像法

用图形表示函数的方法叫图像法．

（1）若知道函数的解析式，要作出其图像，一般分为列表、描点、连线三个步骤．在医学上，由于很少遇到负值，所以采取特殊的坐标结构，即只取直角坐标系下的第一象限，根

据需要，横轴、纵轴可以取不同的单位长度，并取合适的起点，标明横轴、纵轴所表示的变量名称及单位．如上例病人入院后时间与体温的函数关系可以用图 1－1 表示．在医学工作中经常使用图像法，如放射、CT、磁共振 B 超、彩超、心电图、脑电图等都用到了函数的图像法．又如，护理人员每天必须测量住院病人的体温、脉搏、呼吸、血压等，并将测得的数据作为点的坐标，描到医院的“体温表”中，最后把有关点连成曲线，如图 1－2 所示．

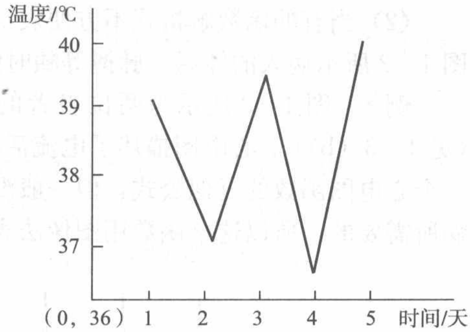

图 1－1

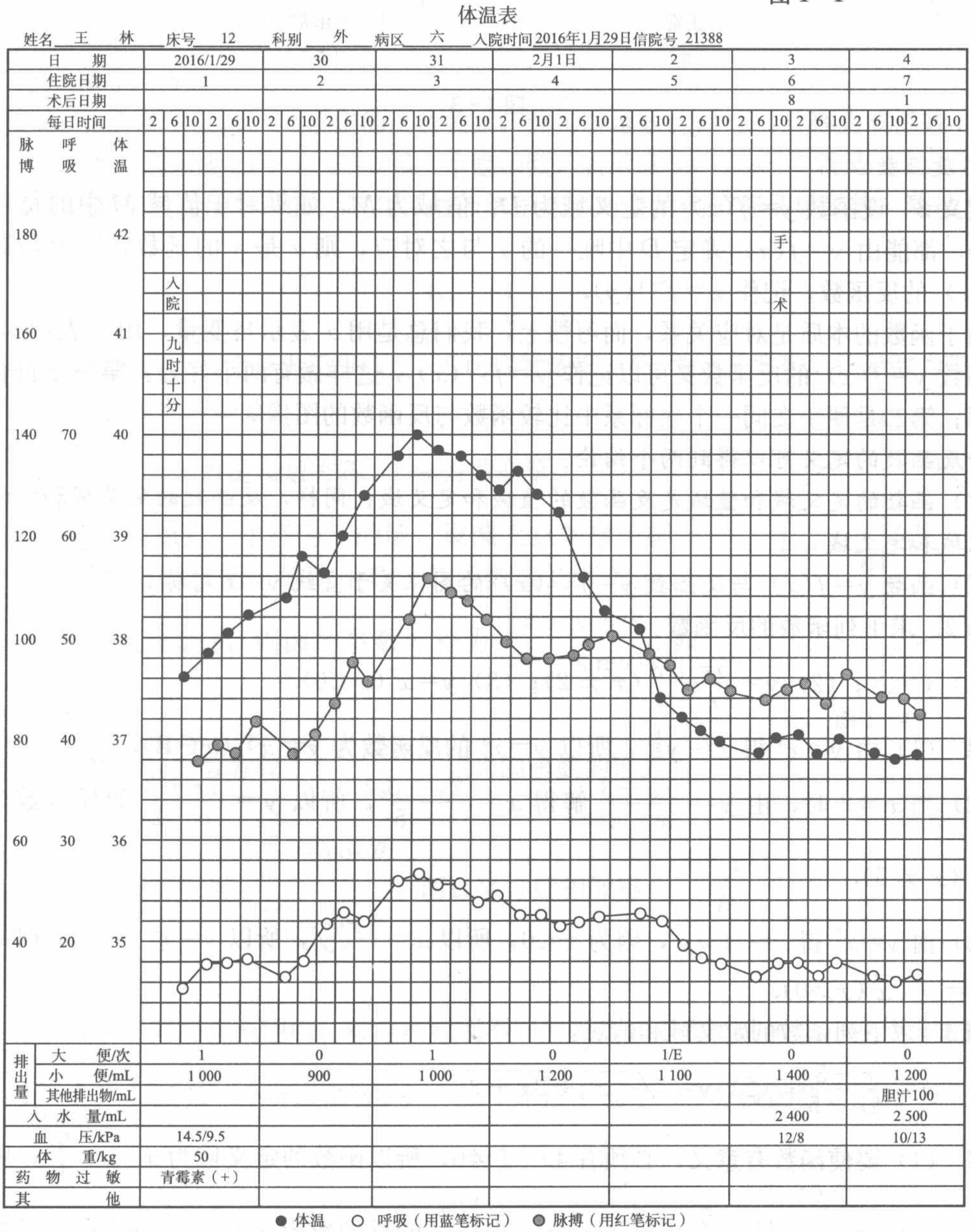

图 1－2

(2) 当有的函数解析式不方便表示或者不能用解析式表示时，用图像表示更为直观，如图 1－2 所示病人的体温、脉搏等随时间变化的函数关系．

例 1 图 1－3 所示为两位患者的心电图，一位正常（见 1－3 (a)），另一位不正常（见 1－3 (b)）．心电图描述了电流活动随时间变化的情况，是时间的函数．虽然可以构造一个心电图函数的近似公式，但一般没有必要这样做，因为重复出现的图形正是医生诊断疾病所需要的，所以这个函数用图像法表示更好些．

图 1－3

3. 反函数

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M，如果对于值域 M 中的每一个函数值 y，都能由 $y=f(x)$ 确定 D 中唯一的 x 与之对应，则 x 是 y 的函数，这个函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

由于函数的本质是对应关系，而习惯上，我们总是用 x 表示自变量，用 y 表示函数值，所以函数 $y=f(x)$ 的反函数又可以记作 $y=f^{-1}(x)$．这样做有两个好处：第一是符合我们的习惯；第二是便于在同一个坐标系中比较函数与反函数的图像．

由反函数的定义可以得到两个结论：

(1) 函数的定义域和值域是反函数的值域和定义域；同样，反函数的定义域和值域是函数的值域和定义域．

(2) 函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称．

例 2 求下列函数的反函数：

(1) $y=x^3$；(2) $y=\dfrac{5x+3}{x-2}\,(x\neq 2)$；(3) $y=x^2\,(x<0)$.

解 (1) 由 $y=x^3$ 得 $x=y^{\frac{1}{3}}$，所以 $y=x^3$ 的反函数为 $y=x^{\frac{1}{3}}\,(x\in\mathbf{R})$.

(2) 当 $x\neq 2$ 时，由 $y=\dfrac{5x+3}{x-2}$ 解得 $x=\dfrac{2y+3}{y-5}$，所以 $y=\dfrac{5x+3}{x-2}$ 的反函数为 $y=\dfrac{2x+3}{x-5}\,(x\neq 5)$.

(3) 由 $y=x^2$ 得 $x=\pm\sqrt{y}$，因为 $x<0$，所以 $x=-\sqrt{y}$，所以 $y=x^2$ 当 $x<0$ 时的反函数为 $y=-\sqrt{x}\,(x>0)$.

例 3 求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=\dfrac{x-3}{4x+5}$；(2) $y=\sqrt{-x^2+2x+3}$.

解 (1) 要使函数有意义，必须有 $4x+5\neq 0$，所以函数的定义域为 $x\neq -\dfrac{5}{4}$，用区间表示为 $\left(-\infty,\ -\dfrac{5}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{5}{4},\ +\infty\right)$，$y=\dfrac{x-3}{4x+5}$ 的反函数为 $x=-\dfrac{5y+3}{1-4y}$，反函数的定

义域是 $\{y \mid y\pm 1/4\}$，所以函数的值域为 $\{y \mid y\neq 1/4\}$，用区间表示为$\left(-\infty,\ \frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},\ +\infty\right)$.

(2) 要使函数有意义，必须有$-x^2+2x+3\geqslant 0$，解不等式$-x^2+2x+3\geqslant 0$得$-1\leqslant x\leqslant 3$，所以函数的定义域用区间表示为$[-1,\ 3]$，又因为$-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4\leqslant 4$，所以$0\leqslant\sqrt{-x^2+2x+3}\leqslant 2$，所以函数的值域为$0\leqslant y\leqslant 2$，用区间表示为$[0,\ 2]$.

练习

求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=\dfrac{2x-3}{5x+4}$；(2) $y=\sqrt{2x+3}$.

4. 隐函数与显函数

定义 4　由方程$F(x,y)=0$确定的函数关系，称为隐函数，$y=f(x)$称为显函数．例如，对于同一个函数，表示成$2x+y-1=0$是一个隐函数，表示成$y=-2x+1$就是一个显函数．

显函数和隐函数在医学中经常用到，前面解析法中所举的例子都是显函数．酶动力学中著名的米氏方程

$$\frac{1}{v}=\frac{K_m}{v_{\max}}\cdot\frac{1}{S}+\frac{1}{V_{\max}}$$

式中，v为反应速度，$v_{\max}$为最大反应速度，S为底物浓度，K_m为米氏常数．该函数为隐函数．

5. 参数方程确定的函数

$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$称为函数的参数方程，$t$称为参变量．

例如，圆心在原点，半径为 1 的圆，设圆上点的横坐标x为自变量，则纵坐标y是x的隐函数，其函数表达式为$x^2+y^2=1$，如果引入参数θ，则圆的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$，如图 1-4 所示．

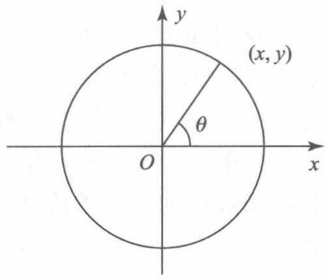

图 1-4

例 4　将椭圆的参数方程$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$化为隐函数的形式．

解　参数方程可变为$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\cos\theta\\[2mm]\dfrac{y}{b}=\sin\theta\end{cases}$，两式平方后相加得$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

6. 分段函数

在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同的表达式来表示的函数称为分段函数，例如$y=\begin{cases}x^2 & x>0\\2x & x\leqslant 0\end{cases}$就是一个分段函数．$y=|x|$本质上也是一个分段函数，因为

$$y=|x|=\begin{cases}x & x>0\\0 & x=0\\-x & x<0.\end{cases}$$

例 5 根据实验测得血液中胰岛素浓度 $C(t)$（Unit/mL）随时间 t 的变化数据，可建立如下经验公式（为分段函数）：$C(t)=\begin{cases} t(10-t) & 0\leqslant t\leqslant 5 \\ 25e^{-k(t-5)} & t>5 \end{cases}$，其中 $k=\dfrac{\ln 2}{20}$.

例 6 求狄利克雷函数 $y=\begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 的函数值 $f(0)$，$f(\pi)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

解 因为 0 是有理数，所以 $f(0)=1$；因为 π 是无理数，所以 $f(\pi)=0$；因为 $\dfrac{1}{2}$ 是有理数，所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$；因为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 是无理数，所以 $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$.

例 7 已知直线 l 满足两个条件：(1) 直线 l 的斜率 $k=2$；(2) 直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 的交点的横坐标 $x=0$. 求直线 l 的方程.

解 将 $x=0$ 代入 $x^2+y^2=1$，解得 $y=\pm 1$；将斜率 $k=2$ 和点（0，1）代入点斜式，得 $y-1=2(x-0)$，即得 $y=2x+1$. 将斜率 $k=2$ 和点（0，−1）代入点斜式，得 $y+1=2(x-0)$，即得 $y=2x-1$，所以所求直线的方程为 $y=2x+1$ 和 $y=2x-1$.

练习

1. 判断点 $M(2,2)$，$N(1,0)$ 是否在圆 $x^2+y^2=1$ 上.
2. 当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，求函数 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ 图像上所对应的点.

7. 单值函数与多值函数

我们知道，函数是一种特殊的映射，在本节定义 1 中，映射要求对于 A 中的每一个元素 a，按照某种对应法则 f，在 B 中都有唯一确定的元素 b 与之对应；从函数的角度，对于每一个自变量 x，按照某种对应法则 f，都有唯一确定的函数值 y 与之对应. 这样定义的函数称为单值函数. 在单值函数中，一个自变量只能对应一个函数值. 一般情况下，我们所研究的函数指的都是单值函数. 如果把定义 1 中的唯一去掉，则可以定义多值函数. 在多值函数中，一个自变量可以对应多个函数值. 虽然目前我们只承认单值函数，但在实际计算中还是会用到多值函数，例如隐函数 $x^2+y^2=1$ 就是一个多值函数. 在这个函数中，−1，1 都是自变量 $x=0$ 时所对应的函数值.

8. 函数的性质

1）函数的有界性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，A 是 D 的一个子集，如果存在一个数 M，使得对于 A 中的任何一个 x 都有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 A 中有上界，称 M 是函数 $f(x)$ 在 A 中的一个上界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 A 中无上界. 如果存在一个数 m，使得对于 A 中的任何一个 x 都有 $f(x)\geqslant m$，则称函数 $f(x)$ 在 A 中有下界，称 m 是函数 $f(x)$ 在 A 中的一个下界；如果这样的 m 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 A 中无下界. 如果存在一个正数 K，使得对于 A 中的任何一个 x 都有 $|f(x)|\leqslant K$，则称函数 $f(x)$ 在 A 中有界；如果这样的 K 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 A 中无界.

2）函数的单调性

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 I 是 D 的一个子集，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加

的，为增函数；当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的，为减函数；单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，该区间 I 称为函数的单调区间．

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的；在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调减少的，如图 1-5 所示；函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的，如图 1-6 所示．

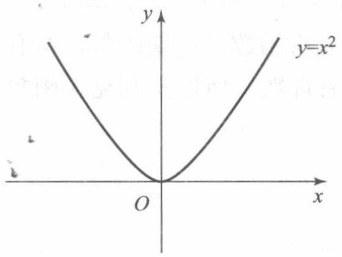

图 1-5

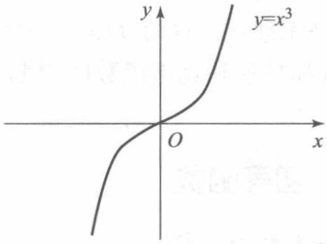

图 1-6

3）函数的奇偶性

定义 7　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，必有 $-x\in D$），如果对于任意 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数．偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-7 所示；奇函数的图像关于原点对称，如图 1-8 所示．

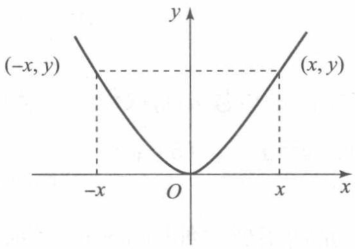

图 1-7

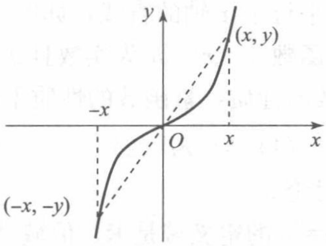

图 1-8

例 8　判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^2-2$；（2）$f(x)=x^3-2x$；（3）$f(x)=x^2+x$；（4）$f(x)=0$.

解　（1）因为 $f(-x)=(-x)^2-2=x^2-2=f(x)$，所以 $f(x)=x^2-2$ 是偶函数．

（2）因为 $f(-x)=(-x)^3-2(-x)=-(x^3-2x)=-f(x)$，所以 $f(x)=x^3-2x$ 是奇函数．

（3）因为 $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$，$-f(x)=-(x^2+x)=-x^2-x$，所以 $f(x)=x^2+x$ 既不是奇函数也不是偶函数．

（4）因为 $f(-x)=0$，$f(x)=0$，$-f(x)=-0=0$，所以函数 $f(x)=0$ 既是奇函数又是偶函数．

4）函数的周期性

定义 8　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的常数 T，使得对于任意 $x\in D$ 必有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们所说周期函数的周期是指最小正周期．例如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的

周期是 2π，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的周期是 π.

例 9 讨论狄利克雷函数 $y=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 的周期性.

解 设 a 是任意一个不等于零的有理数，因为狄利克雷函数的定义域是全体实数，对于任意 x，当 x 是有理数时，$x+a$ 也是有理数，这时 $f(x)=1=f(x+a)$；当 x 是无理数时，$x+a$ 也是无理数，这时 $f(x)=0=f(x+a)$，所以狄利克雷函数是周期函数，所有不等于零的有理数都是狄利克雷函数的周期，由于没有最小的正有理数，所以狄利克雷函数没有最小正周期.

二、初等函数

1. 基本初等函数

下面 6 类函数称为基本初等函数，这些函数大家在中学都见过，现在我们来复习一下.

1) **常函数** $y=C$(C 为任意常数)

常函数的性质：定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $\{C\}$，$C\neq 0$ 时是偶函数，$C=0$ 时既是奇函数，又是偶函数；因为任给常数 T $(T\neq 0)$，都有 $f(x+T)=f(x)=C$，所以常函数是周期函数，但没有最小正周期；常函数 $y=C$ 的图像是一条经过点 $(0, C)$ 且平行于 x 轴的直线. 例如 $y=2$ 就是一条经过点 $(0, 2)$ 且平行于 x 轴的直线，如图 1-9 所示.

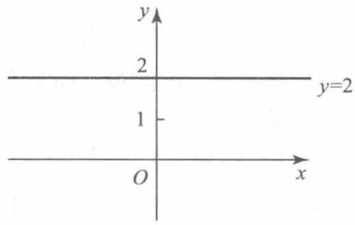

图 1-9

2) **幂函数** $y=x^a$（a 为实数且 a 为常数）

幂函数的性质：幂函数的性质不能一概而论，需要针对指数 a 的取值，具体问题具体分析，下面以 (1) $y=x$；(2) $y=x^2$；(3) $y=x^{-1}$；(4) $y=x^{-2}$；(5) $y=x^{\frac{1}{2}}$；(6) $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 为例加以讨论.

(1) $y=x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $\mathbf{R}$，是奇函数，是增函数，如图 1-10 所示.

(2) $y=x^2$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $[0, +\infty)$，是偶函数，如图 1-11 所示.

(3) $y=x^{-1}$ 的定义域是 $\{x \mid x\neq 0, x\in\mathbf{R}\}$，值域是 $\{y \mid y\neq 0, y\in\mathbf{R}\}$，是奇函数，如图 1-12 所示.

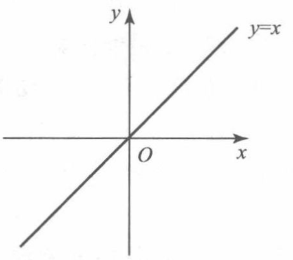

图 1-10

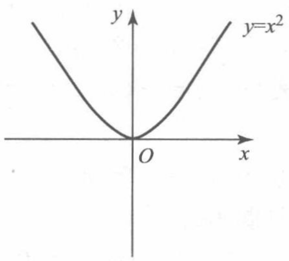

图 1-11

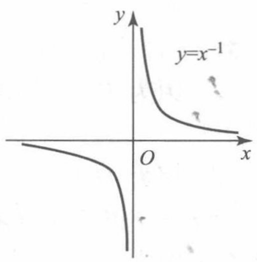

图 1-12

(4) $y=x^{-2}$ 的定义域是 $\{x \mid x\neq 0, x\in\mathbf{R}\}$，值域是 $(0, +\infty)$，是偶函数，如图 1-13 所示.

(5) $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是 $[0, +\infty)$，值域是 $[0, +\infty)$，是增函数，如图 1-14 所示.

(6) $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(0,+\infty)$，是减函数，如图 1-15 所示．

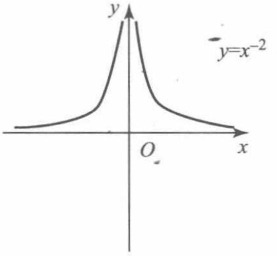

图 1-13

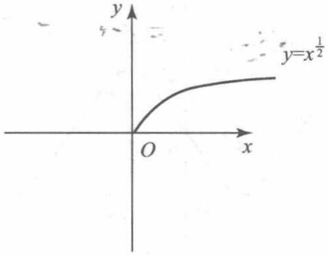

图 1-14

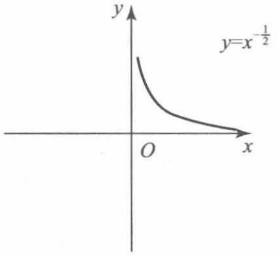

图 1-15

3) **指数函数** $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$，a 是常数)

指数函数的性质：定义域是 **R**，值域是 $(0,+\infty)$，当 $a>1$ 时，是增函数，如图 1-16 所示；当 $0<a<1$ 时，是减函数，如图 1-17 所示．

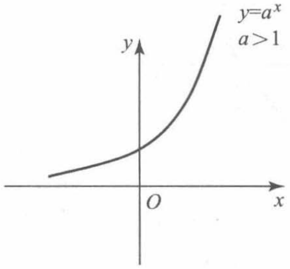

图 1-16

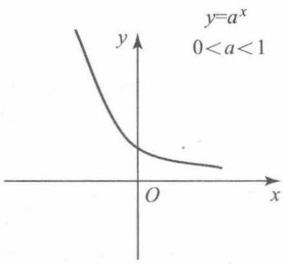

图 1-17

4) **对数函数** $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$，a 是常数)

对数函数的性质：定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 **R**，当 $a>1$ 时，是增函数，如图 1-18 所示；当 $0<a<1$ 时，是减函数，如图 1-19 所示．

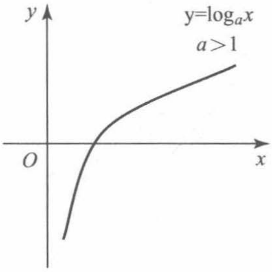

图 1-18

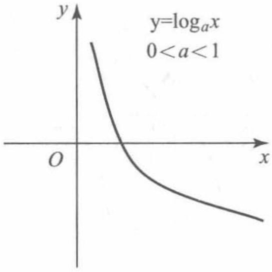

图 1-19

当底数相同时，指数函数与对数函数互为反函数．

5) **三角函数**

三角函数包括下列 6 个函数：正弦函数 $y=\sin x$；余弦函数 $y=\cos x$；正切函数 $y=\tan x$；余切函数 $y=\cot x$；正割函数 $y=\sec x$；余割函数 $y=\csc x$. 下面分别讨论它们的性质．

(1) 正弦函数 $y=\sin x$ 的性质：定义域是 **R**，值域是 $[-1,1]$，是奇函数，是周期函

数，周期是 2π，如图 1－20 所示．

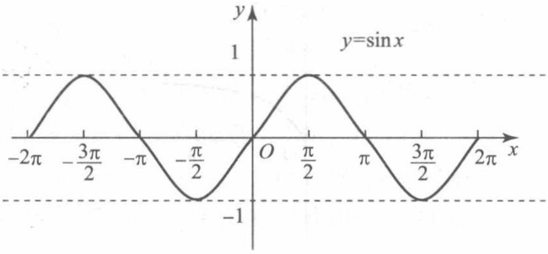

图 1－20

（2）余弦函数 $y=\cos x$ 的性质：定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $[-1, 1]$，是偶函数，是周期函数，周期是 2π，如图 1－21 所示．

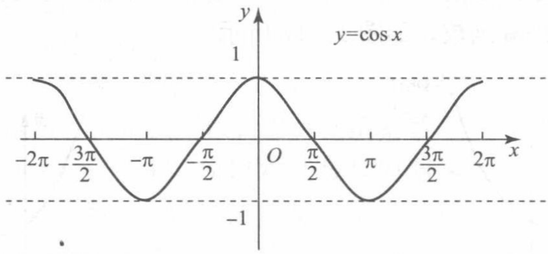

图 1－21

（3）正切函数 $y=\tan x$ 的性质：定义域是 $\left\{x \middle| x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$，值域是 $\mathbf{R}$，是奇函数，是周期函数，周期是 π，如图 1－22 所示．

（4）余切函数 $y=\cot x$ 的性质：定义域是 $\{x | x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq k\pi, k \in \mathrm{Z}\}$，值域是 $\mathbf{R}$，是奇函数，是周期函数，周期是 π，如图 1－23 所示．

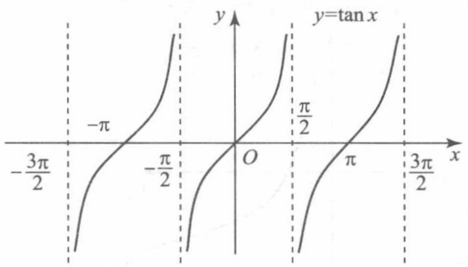

图 1－22

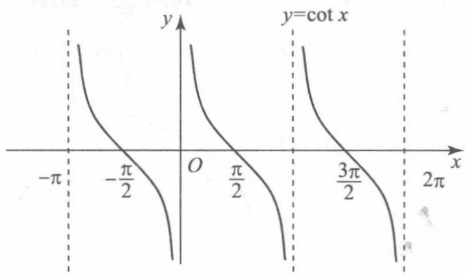

图 1－23

（5）正割函数 $y=\sec x$ 的性质：定义域是 $\left\{x \middle| x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$，值域是 $\{y | y \in \mathbf{R}, \text{且} |y| \geqslant 1\}$，是偶函数，是周期函数，周期是 2π，如图 1－24 所示．

（6）余割函数 $y=\csc x$ 的性质：定义域是 $\{x | x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$，值域是 $\{y | y \in \mathbf{R}, \text{且} |y| \geqslant 1\}$，是奇函数，是周期函数，周期是 2π，如图 1－25 所示．