



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

NEWTON FORMULA

Newton公式

刘培杰数学工作室 编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

NEWTON FORMULA

Newton 公式

刘培杰数学工作室 编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

如果使用题中所给的对称条件,许多初等数学问题解起来都很简单.本书应用牛顿公式,介绍了怎样利用对称条件解方程组及不等式.

本书适合于准备参加竞赛的学生、数学教师及数学爱好者参考阅读与收藏.

图书在版编目(CIP)数据

Newton 公式/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2017.8

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6543-5

I. ①N… II. ①刘… III. ①牛顿定律
IV. ①O301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 073144 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 刘立娟

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 牡丹江邮电印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 29 字数 318 千字

版 次 2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6543-5

定 价 128.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题 and 我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，始于一次非常偶然的的机会。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:“康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也.”可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即“涉猎”)相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即“始于精于一,返于精于博”.正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”.

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”.唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

◎
目
录

第 1 编

- 第 0 章 引言 // 3
- 第 1 章 应用举例 // 7
- 第 2 章 一元三次方程的一种
解法 // 41
- 第 3 章 吴大任教授藏书中的
因式分解公式 // 44
- 第 4 章 公式在解方程及方程组
中的几个应用 // 61
- 第 5 章 对称多项式 // 74
- 第 6 章 一元三次方程判别式的
推导 // 83
- 第 7 章 利用牛顿公式解一个
问题 // 85
- 第 8 章 有关对称多项式的两个
竞赛题目 // 90

第 9 章 三个不等式的另类证明 //95

第 10 章 赫尔德不等式 //99

第 2 编

第 11 章 牛顿定理 //109

11.1 引言 //112

11.2 牛顿定理 //116

11.3 几个例子 //121

第 12 章 关于 x 和 y 的对称多项式 // 129

12.1 对称多项式的例子 // 129

12.2 含两个变量的对称多项式的基本定理 // 131

12.3 用 σ_1 和 σ_2 表示的等次之和的表达式 // 132

12.4 基本定理的证明 //134

12.5 定理的唯一性 //135

12.6 华林公式(I) //138

第 13 章 初等代数的应用(I) //142

13.1 解方程组 //142

13.2 引用辅助未知量 //150

13.3 关于二次方程的问题 //155

13.4 不等式 //158

13.5 递推方程 //162

13.6 对称多项式因式分解 //168

13.7 不同的题型 //172

第 14 章 关于 3 个变量的对称多项式 //175

- 14.1 定义和例题 //175
- 14.2 关于含 3 个变量的初等对称多项式的基本定理 //177
- 14.3 单项式轨道 //180
- 14.4 基本定理的证明 //185
- 14.5 华林公式(II) //187

第 15 章 初等代数的应用(II) //188

- 15.1 解三元方程组 //188
- 15.2 因式分解 //197
- 15.3 恒等式的证明 //201
- 15.4 不等式 //209
- 15.5 分母有理化 //213

第 16 章 含有 3 个变量的反对称多项式 //221

- 16.1 定义和例题 //221
- 16.2 关于反对称多项式的基本定理 //222
- 16.3 判别式及讨论方程根的应用 //225
- 16.4 应用判别式证明不等式 //231
- 16.5 偶置换和奇置换 //234
- 16.6 偶对称多项式 //237

第 17 章 基础代数的应用 //239

- 17.1 因式分解 //239
- 17.2 证明恒等式和化简代数式 //243
- 17.3 含 3 个变量的对称多项式的因式分解 //247

第 18 章 关于含任意个变量的对称 多项式 //251

18.1 关于含任意个变量的基本对称
多项式 //251

18.2 关于含任意个变量的对称多项式的基本定理 //255

18.3 用基本对称多项式表示的等次之和的
表达式 //257

18.4 含 n 个变量的初等对称多项式和 n 次
代数方程的韦达定理 //260

18.5 待定系数法 //264

附录 关于高次代数方程的一些资料 //269

1. 余数定理 //269

2. 寻找整系数多项式的整根 //270

3. 寻找复整根 //274

4. 代数基本定理和分解多项式成一次因式乘积
定理 //277

5. 答案 //281

编辑手记 //427

第 1 编



引言

第

0

章

初等数学和高等数学历来泾渭分明,各自在不同的圈子里展开研究.但对于数学爱好者来说非常喜欢见到能够“顶天”的初等数学公式,因为这样才有进一步学习的动力,而对于研究者来讲也希望能将高等领域的东西让它“立地”,这样便于普及.

先让我们从一个基本公式谈起.

我们先来看一道 2008 年复旦大学的自主招生试题.

试题 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 + x + 2 = 0$ 的三个根,则行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (\quad).$$

- A. -4 B. -1
C. 0 D. 2

解 由三次方程的韦达定理有

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 &= 1 \\x_1 x_2 x_3 &= -2\end{aligned}$$

由行列式的定义

$$D = 3x_1 x_2 x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$$

为了计算这个值,我们来回忆一下初中因式分解中的一个公式:

公式

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= \\(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) &= \\ \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] &\end{aligned}$$

由此我们可得出以下三个推论:

推论 1 若 $x + y + z = 0$, 则

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

推论 2 若 $x, y, z \in \mathbf{R}_+$, 则

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

推论 3 设 ω 是 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根, 则

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \\(a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c) &\end{aligned}$$

证法 1

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \\(a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc &= \\(a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c) &= \\(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) &= \\(a + b + c)[(a - b)^2 + (a - b)(b - c) + (b - c)^2] &= \\(a + b + c)[(a - b) - \omega(b - c)] \cdot &\end{aligned}$$

