华章数学译丛

HZ BOOKS
华章教育

63

WILEY

Mathematical Finance

数理金融

[美] M. J. 阿尔哈比（M. J. Alhabeeb）著

温建宁 译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

63

Mathematical Finance

数理金融

[美] M. J. 阿尔哈比 (M. J. Alhabeeb) 著

温建宁 译

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

数理金融 /（美）M. J. 阿尔哈比（M. J. Alhabeeb）著；温建宁译．—北京：机械工业出版社，2017.11

（华章数学译丛）

书名原文：Mathematical Finance

ISBN 978-7-111-58379-0

I. 数… II. ① M… ② 温… III. 金融学 – 数理经济学 IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 266217 号

本书版权登记号：图字 01-2012-7583

本书从对数、回归、统计测量等最基本的数学概念出发，通过介绍单利、银行贴现、复利、年金等知识来探索货币的时间价值．书中涵盖各种金融方案，包括抵押债券、租赁、信贷、资本预算、折旧、损耗、盈亏平衡分析、杠杆作用、收益与风险、资本资产定价模型、生存年金、意外保险．

本书偏重于金融数学，已经经过广泛的课堂检验，叙述通俗易懂，而且有大量的习题和示例，非常适合商务、经济、金融等专业的高年级本科生或研究生用作“数理金融”的入门教材，也适合那些想更好地理解金融问题、做出金融选择的消费者和企业家阅读参考．

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）

责任编辑：和 静	责任校对：李秋荣
印 刷：北京瑞德印刷有限公司	版 次：2018 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
开 本：186mm × 240mm 1/16	印 张：23
书 号：ISBN 978-7-111-58379-0	定 价：89.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：(010) 88378991 88361066　　投稿热线：(010) 88379604

购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译 者 序

这是一本面向金融、经济和统计专业的数学教材，主要定位为大二、大三学生学习高等数学、概率论、数理统计之后的提升，目的是引导学生掌握量化分析的思想和方法，培养金融背景和统计知识相融合的逻辑思维，进一步提高对宏观经济分析和资本市场预测的能力.

概括起来，本书有如下几个特点：(1) 让读者容易看懂、快速上手实践，符合循序渐进、由浅入深的认知原则；(2) 让学生方便模仿、举一反三，符合讲授结合、教学相长的教育原则；(3) 让教师便于教学、兼顾理论实践，平衡通识教育、专识教育的不同要求.

我要对 Alhabeeb 教授表示感谢，正是因为他杰出的学术成就以及严谨治学的态度，才有了这本优秀书籍，才有了这本译著. 我还要致谢孙萌、梅振、陈薇、吴范君、孔超、袁祎玮、魏永川、徐波樱、闫沐童、肖雨鸽、鲜佩伶、杨欣芸、曹涵琪、蔡立君、胡伟伟、顾媛媛等，正是因为他们一丝不苟的认真阅读和专心致志的细心校对，才保证了译著尽可能低的差错率. 我还要致谢自己的亲人们，正是老父亲和姐姐的热心鼓励以及爱人和女儿的不懈支持，才让我排除各种干扰，一心一意把翻译工作顺利完成，书稿最终出版发行最大的成就该归功于他们.

百密难免一疏. 纵使译者追求完美，但书中难免错漏，还望读者不吝赐教，把宝贵的意见和建议反馈给我，以便书稿更加完善.

温建宁　于上海立信会计金融学院

前 言

我教授大学金融学课程已有数十年的时间，这些从教经历使我亲眼看到大部分学生如何面对数学上的困难，又如何把自己不能熟练掌握数量分析视为他们求学生涯中的重大障碍. 他们惯常做出的努力恰恰证明了这一点，这既是他们学习过程中的一个阻碍因素，也是后来当他们步入职业生涯时变得更加难以弥补的差距. 面对通行的标准数学教材，我的学生常常表现出不自信，充满挫折感，这是因为这些教材通常聚焦于数学技巧，而金融学和金融主题却被搁置一边. 我希望这本书能颠覆那些书的写作方法，把焦点放在金融学和金融问题上——但是要采用计算意识和数学语言. 换句话说，我想把重点重新定位于以数学方法作为工具对主要金融问题的解答上. 我热切期望这种做法能满足学生的主要学习目的之一，帮助他们轻松地踏上较高水平的学术征程，为他们提供毕业后依然有帮助的基础能力. 这本书是长期课堂教学经验和课堂教学累积起来的知识体系的一种直接反映，并根据学生学习模式和教育需求的多样性进行了改进. 特别审慎地，我的主要注意力已经被导向数学公式扮演的角色，以证明和阐述问题求解背后的基本数理逻辑. 这给学生提供了额外的机会，以便于巩固他们对金融问题的理解，使其能够分析和解释金融问题的解. 另外，在这本书中对数学公式也采用了传统的表值.

当计算器和计算机变得日益精密和普及，而且每个学生都可以使用时，后退一步再次强调利用传统数学方法的必要性似乎是明显而又实际的. 不管计算机在我们的生活中如何重要，加强对理论的理解既是本质需要，也是一种基本学习能力，不应该在计算机水平提高时丧失. 正因为这个理由，本书中使用传统方法意味着寻求平衡，即在日益复杂的数字程序的广泛使用和问题求解的方法之间达成平衡. 每个学生可能都拥有的标准金融计算器也是技术进步的一方面. 尽管这些计算器对学生有巨大的帮助，但是也减少了解决复杂问题的基本方法的系统学习过程. 高级计算器的使用日益增加，意味着不需要了解问题的基础结构，或者不需要理解运算背后的科学逻辑，就能学会如何敲击正确的键. 为此，本书有意识地跳过金融计算器和计算机的使用，以切断对那些容易且盲目的解决方法的依赖，回归到公式和表格的应用上来. 和经典的金融数学书籍不同，本书几乎很少强调公式的推导和证明，若有涉及则是因为在某些情况下它们之间存在强相关性.

本书的目标读者主要是商学院、公共管理学院、经济学院以及其他相关专业的高年级本科生和一年级研究生. 本书也对准备参加精算师考试、CFP、ChFC、CPA、CLU、PFS 和 AFC 等职业考试的考生们大有帮助，同时是各领域的研究人员和市场分析人员的宝贵参考书. 书中内容都是一般性理解金融领域和所有与金融商业相关的领域所必不可少的.

多年来，我一直认为在一学期的金融学课程中不能覆盖大量议题，现有教材的特性通常也不允许授课老师在一般性的概念阐述和基本分析之外进行严密分析. 在每个金融话题中通常没有机会或者几乎很少有机会能深入到问题的数学处理和解决问题的细节层面. 本书的严谨论述为使用更加深奥的金融计算方法提供了机会，既可用于面向金融的数学方法的单独教程，也可用于现有常规金融教程的特定范畴. 而且，据我所知，本书是第一本全

面阐述数理金融的教材，覆盖公司金融、创业金融以及个人金融等主要话题，体现了我20年来教授诸多金融课程的顶尖水平. 本书包含充实、全面和均衡的教学内容，覆盖了金融应用的整个范围，包括许多已经给出解答的例题，所有的例题都是从现实生活问题中构造的应用题，用以强调教学内容的应用属性，与典型的数学方法强调探索和证明的技术细节截然不同. 因为内容的理论特性，书中的语言叙述和表达方法都能很好地推广. 我尽量用简练直观的语言写作本书，采用简易友好的写作方式使数学内容几乎不"吓人"，而且对书中主要的数学问题做了流畅的处理. 我选择的论述方式是首先展示基本的理论概念，接下来通过一步一步解答例题，把概念结构转变成数量形式. 因为我相信，在数学应用领域，要是没有解答过习题，没有实际的解题训练，仅仅通过阅读获得深厚的知识和稳固的技能是不可能的. 本书每一单元都以概念小结、公式列表和大量的练习结束.

本书的内容被划分成了8个单元. 单元一是唤醒读者基本概念记忆的数学介绍，这些数学基础概念与本书后续讨论的金融主题相关. 这个单元包括数、指数和对数，数列以及统计度量三个章节. 单元二讨论货币时间价值，包括单利、银行贴现、复利和年金四个章节. 单元三是债务和租赁，包括信用和贷款、抵押债券和租赁三个章节. 单元四是资本预算和折旧，包括资本预算、折旧和损耗两章. 单元五包括盈亏平衡分析和杠杆效应两章. 单元六是投资，用五章篇幅讨论了股票、债券、共同基金、期权、资本成本和比率分析. 单元七包括回报和风险的测量以及资本资产定价模型两章. 单元八是保险，包括生存年金、人寿保险、财产和意外保险三章. 附录包括完成例题和练习所需要的数学用表.

在本书完成之际，我要感谢许多人的帮助，他们对本书面世有建设性贡献. 书中可能遗留了不少错误和缺点，这些都由我独自负责. 首先，我真心实意地感谢我的学生，感谢他们的勤学、好问、乐善、奋斗和忧思，他们对我课堂教学中的疏漏予以更正，甚至他们在考试中所犯的致命错误都是本书写作的灵感，要是缺失了这些灵感，本书就不可能被写出来. 我还要对我的同事和朋友 Joe Moffitt 教授的支持致谢，对我的朋友 Sev Yates 真诚的支持和持续鼓励致谢. 特别要感谢 Wiley 公司从头到尾管理这个项目的编辑 Susanne Steitz-Filler，她工作起来非常专业，而且能力非凡. 还要感谢 Wiley 公司的 Jackie Palmieri 和 Rosalyn Farkas，以及 Laserwords 的项目经理 Romaine Heldt，感谢他们尽心的工作和奉献. 我也要感谢我系高级秘书 Peg Cialek 的专业支持，她不知疲倦地凭借能力和耐心以及对数学符号敏锐的眼力录入了全部书稿. 还要特别感谢我从前的研究生助理 Don Hedeman，因为他出色地绘制了所有精美的图表. 我也特别感谢我从前的本科生 Heather Sullivan，他现在是波士顿令人骄傲的高级金融分析师. Heather 把他的课堂笔记给了我，他做的课堂笔记比我自己的笔记更整洁、更有条理，被用作本书的手稿. 我深深感谢我的朋友——才华横溢的艺术家 Anna Kubaszewska，她根据我苛刻的要求绘制了漂亮的封面. 最后，我要感谢原稿的所有匿名审稿人，感谢他们有用的、建设性的评论和建议.

M. J. Alhabeeb

于马萨诸塞州贝勒塞屯

目　录

单元三 债务和租赁

单元四 资本预算和折旧

单元五 盈亏平衡点和杠杆作用

单元六 投资

单元七 回报和风险

单元八 保险

单元一 Unit 1

数学简介

第1章　数、指数和对数

1.1　数

在金融领域，理解好数、分数和小数是极其重要的．利率、时间、金融比率通常都用分数和小数表示，特别是进行计算题求解的时候，这里也是绝大多数常见错误发生的地方．我们常见的普通数，例如3，－5和0，称为**整数**(见图1-1)．整数连同分数就构成了**有理数**．相反，**无理数**则是无限而不循环的数，例如$\sqrt{3}$和e．有理数和无理数统称为**实数**，与实数相对的数则是非实数，或称为**虚数**，例如－1的平方根($\sqrt{-1}$)以及它的倍数(如$4\sqrt{-1}$)．

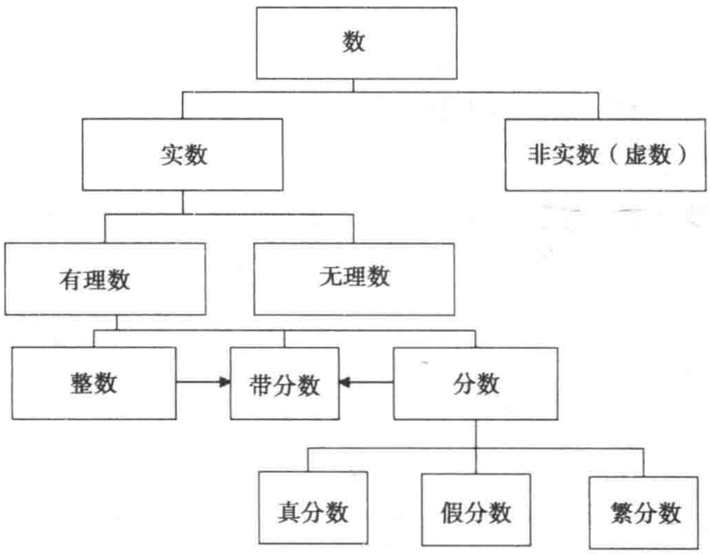

图　1-1

1.2　分数

分数指的是整数的一部分，表示为分子(分数线上面的数)被分母所除(分数线下面的数)．例如，分数$\frac{3}{8}$可以表示一个被切成八块的披萨饼，取其中三块．因此，没有用零做分母的分数，因为我们无法从什么都没有中取其部分，零做分子的分数也没有意义．一般来讲，分数的分子比分母要小，这样的分数称为**真分数**，例如$\frac{2}{5}$或者$\frac{13}{20}$．当分子比分母大的时候，这样的分数称为**假分数**，例如$\frac{10}{8}$或者$\frac{5}{4}$，表示一个超过整体的部分数，犹如10

块披萨饼，将构成一个披萨饼又多出四分之一：$\frac{10}{8}=\frac{8}{8}+\frac{2}{8}=1\frac{1}{4}$. 形如 $1\frac{1}{4}$ 的数称为**带分数**，可以看做一个整数(1)和一个真分数$\left(\frac{1}{4}\right)$的组合数. 要是分子和分母相等，它们将构成整数 1，这不是分数. 要么分子或者分母包含分数，要么二者都包含分数，这样的分数称为**繁分数**，例如

$$\frac{\frac{5}{8}}{9},\frac{2}{\frac{3}{7}},\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{8}}$$

分数最明显的特征之一就是分数值的不变性，即如果我们用相同的数去乘或除分子和分母两项，得到分子和分母被放大所构成的放大项分数，与二者被缩小所构成的缩小项分数相等，并等于原分数的值.

例 1.2.1　把$\frac{2}{3}$变成放大项的分数，并且把$\frac{9}{15}$变成缩小项的分数.

我们可以用 5 同乘以分子和分母，把第一个分数放大成为放大项的分数：

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 5}{3\times 5}=\frac{10}{15}$$

并且，我们可以将分子和分母同除以 3，把第二个分数缩小为缩小项的分数：

$$\frac{9}{15}=\frac{9\div 3}{15\div 3}=\frac{3}{5}$$

一个整数和一个分数的组合(即带分数)也可以记作一个假分数.

例 1.2.2　把带分数 $2\frac{5}{6}$ 转变为分数.

$$2\frac{5}{6}=\frac{(6\times 2)+5}{6}=\frac{17}{6}$$

例 1.2.3　把分数$\frac{14}{3}$转变为带分数.

$$\frac{14}{3}=14\div 3=4+\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$$

如果两个或者两个以上分数具有相同分母，它们的加或者减只通过加或减分子来进行.

$$\frac{7}{11}-\frac{5}{11}=\frac{2}{11}$$

$$\frac{9}{5}+\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$$

但是，如果分数的分母不同，就必须通过通分找出公共的分母.

$$\frac{3}{5}+2\frac{2}{3}=\frac{3}{5}+\frac{8}{3}=\frac{9+40}{15}=\frac{49}{15}=3\frac{4}{15}$$

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{3}=\frac{15-4}{12}=\frac{11}{12}$$

分数相乘，分子和分母分别相乘：

$$\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$$

分数相除可转变为乘法进行处理，被除数(首个分数)乘以除数(第二个分数)的倒数.

$$\frac{5}{8}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{8}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{16}$$

如果分数的分母相同，只把分子相除，分母相互抵消.

$$\frac{6}{7}\div\frac{4}{7}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

1.3 小数

小数是分数的分子除以分母所得的商. 因此，它是分数使用小数点的表达形式. 小数点右侧数字的个数，称为小数位数.

$$\frac{5}{21}=5\div 21=0.2381$$

在上例中，小数点右侧有许多数字，但四舍五入到四个小数位. 我们也可以把一个小数转变为一个普通分数：

$$0.125=\frac{125}{1000}$$

而且，可以将分子、分母同除以 125 化简：

$$\frac{125\div 125}{1000\div 125}=\frac{1}{8}$$

另一个例子：

$$3.4=3\,\frac{4}{10}=3\,\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$$

把利率表示成小数形式是学生最容易出现常见错误的地方.

例 1.3.1 年利率 $8\,\frac{1}{4}\%$的月利率是多少？

$$8\,\frac{1}{4}\%=0.0825$$

$$0.0825\div 12=0.006\,875$$

例 1.3.2 年利率 $7\,\frac{1}{3}\%$的周利率是多少？

$$7\,\frac{1}{3}\%=0.0733$$

$$0.0733\div 52=0.001\,41$$

1.4 循环数

循环数是无限小数，它的小数点后某个数字是无限重复的. 例如，分数$\frac{2}{3}$是一个循环数，因为用 3 除 2 结果是 0.6…，6 的小数位无穷无尽.

$$\frac{2}{3} = 0.666\,666\cdots$$

1.5　百分数

百分数是分母为 100 的分数．因此，所有的百分数表示所有可能的百分比，包括超出第 100 份的百分比，比如 250%．百分数用具有两个小数位的小数来表示，如 0.86，或者用百分号来表示，如 86%．

$$34\% = \frac{34}{100} = 0.34$$

$$9\frac{1}{4}\% = \frac{9\frac{1}{4}}{100} = \frac{\frac{37}{4}}{100} = \frac{37}{4} \times \frac{1}{100} = \frac{37}{400} = 0.0925$$

在金融领域，可以把利率从通常的分数转变为小数，或者转变为百分数，这是至关重要的．

在对小数进行加和减的时候，数字应该按列垂直排布，还应该把小数点对齐．

$$\begin{array}{r} 0.015 \\ +0.001\,67 \\ \hline 0.016\,67 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9.398 \\ -2.1 \\ \hline 7.298 \end{array}$$

在小数相乘的时候，先不计小数点，把数字相乘，然后把乘积数字的小数位整合起来，应用到最终答案．

$$0.52 \times 0.0039 \times 0.117 \Rightarrow 52 \times 39 \times 117 = 237\,276 \Rightarrow 0.000\,237\,276$$

因为我们有九个整合的小数位，最终答案应该在数字乘积左边加三个小数位；也就是说，小数点右侧有九个小数位．

在小数相除的时候，我们按照下面的步骤：

1. 把除数的小数点向右移动到末尾数．
2. 把被除数的小数点向右移动和除数相同的小数位．
3. 把商的小数点放在和被除数相同的位置．
4. 对改变后的数进行相除．

14.976÷2.4

2.4(除数)将变为 24

14.976(被除数)将变为 149.76

$$\begin{array}{r} 6.24 \\ 24\overline{)149.76} \\ \underline{144} \\ 57 \\ \underline{48} \\ 96 \\ \underline{96} \\ 0 \end{array}$$

1.6　基、百分率和百分量

百分数的使用是金融中最普遍的应用之一．为了更好地理解百分数，我们注意三个变量．

- 基(B)，它是总量．
- 百分量(P)，它是对总量应用百分率得到的部分量．
- 相对于基的百分率(R)，

$$P = B \cdot R$$

例 1.6.1　如果一个人为他 12 850 美元的额外收入支付 28%的税率，他将纳税 3598 美元．

B=12 850，R=0.28，P 是纳税额，即

$$P = 12\,850 \times (0.28) = 3598$$

我们也能变换公式求得 B 和 R：

$$B = \frac{P}{R}$$

例 1.6.2　如果某人在一家饭店支付了 12 美元作为 15%的小费，这顿晚餐花了多少钱？

饭店的账单是 B，小费是 P，比率 R 是 15%．

$$B = \frac{P}{R} = \frac{\$12}{0.15} = \$80$$

百分率(R)也能如下得到：

$$R = \frac{P}{B}$$

例 1.6.3　如果一个人存款 3580 美元，已经获得 196.90 美元的利息，则存款利率是多少？

$$R = \frac{P}{B} = \frac{196.90}{3580} = 0.055 = 5.5\%$$

1.7　比率

比率是在两个值之间相对比较的一种形式．从数学角度讲，比率表示了两个数的商，上面的数称为第一项，下面的数称为第二项．例如，如果房间长是 36 英尺[㊀]，宽是 12 英尺，长相对宽的比率是$\frac{36}{12}=\frac{3}{1}$(或者 3∶1)，表示房间长是宽的三倍这个事实，由此建立了在二维之间的相对比较．这种关系也能逆向表示，表明宽相对于长的程度如何，即$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$．我们可以说房间的宽是长的三分之一．比率在金融中应用广泛，特别是在财务比率、投资、贴现、利息、税收和保险费等方面．A 对 B 的比率是 A/B，或者A∶B，比率只用 A 表示是

㊀　1 英尺=0.3048 米。

可行的，这就意味着 B 的值只能是 1，就像上述房间测量的例子一样．当长度比率是 3，而宽度比率是 1 时，我们知道长对宽的关系是 3 倍，或者 3∶1．比率被表示为两个以上变量两两之间的序列也是可行的，例如 $A:B:C:D$，表示 A 相对于 B、B 相对于 C、C 相对于 D 的有顺序的比率．

例 1.7.1　一座建筑有如下的测量结果：

长度(L)：600 英尺

宽度(W)：200 英尺

高度(H)：100 英尺

周长(P)：1600 英尺

那么，可以得到 $L:W:H:P$ 的有顺序的比率为 $3:2:\frac{1}{16}$，或者 $3:2:0.0625$．

$$\frac{L}{W}=\frac{600}{200}=3$$

$$\frac{W}{H}=\frac{200}{100}=2$$

$$\frac{H}{P}=\frac{100}{1600}=\frac{1}{16}=0.0625$$

1.8　比例

比例定义了两个比率之间的等式，例如 $A:B=C:D$，读作"A 比 B 和 C 比 D 相等"．两个外项 A 和 D 称为**极值**，而两个内项 B 和 C 称为**均值**．把比例记作比率的等式，将导出另一个等式，它用项的交叉相乘的方式得到，极值的乘积等于均值的乘积．

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\quad 和 \quad AD=BC$$

另外，还将导出第一个极值与第二个均值的比率 A/C，等于第一个均值与第二个极值的比率B/D.

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$$

例 1.8.1

$$\frac{3}{7}=\frac{0.75}{1.75}\equiv\frac{3}{0.75}=\frac{7}{1.75}$$

并且，

$$3\times(1.75)=7\times(0.75)$$

$$5.25=5.25$$

1.9　整除数

整除数就是用这种除数去除被除数，只留下整数商而没有余数．例如，如果我们用 2 或 5 或 10 除 100，依次得到 50、20 和 10．如果我们再用 $11\frac{1}{9}$ 或 $6\frac{1}{4}$ 除 100，将依次得到