品牌专业

shuxuefen

数学分析

上册

于兴江　王树泽　主编

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

济南出版社

山东省成人高等教育系列教材

数学分析

（上册）

主编　于兴江　王树泽
编委（按姓氏笔画为序）
于兴江　王树泽　刘利英　伊继金
张凤霞　张兴芳　张兴秋　盛秀艳

济南出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析／于兴江,王树泽主编.—济南:济南出版社,2010.8

山东省成人高等教育系列教材

ISBN 978-7-5488-0083-5

Ⅰ.数… Ⅱ.①于… ②王… Ⅲ.数学分析—成人教育:高等教育—教材 Ⅳ.①017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 156471 号

出版发行 济南出版社
地　　址 济南市二环南路 1 号
邮　　编 250002
印　　刷 聊城大学印务中心
开　　本 185×260 mm 16 开
印　　张 17
字　　数 350 千
版　　次 2010 年 8 月第 1 版
印　　次 2010 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 49.00 元

前 言

聊城大学成人高等教育走过了近三十年的历程. 值此数学与应用数学专业建设成为山东省高等学校成人高等教育品牌专业之际,我们编写了本《数学分析》教材. 为该专业的健康发展提供必要的基础. 全书分上、下两册,上册内容包括极限与一元函数微积分理论,下册内容包括级数与多元函数微积分理论.

本书可作为成人高等教育数学专业数学分析课程的教学用书,以及其他高等院校有关专业的教学参考书.

数学分析课程作为数学专业最重要的基础课之一,在培养具有良好数学素养的人才方面,它所起的作用是任何其他课程无法相比的. 对后继课程和毕业生的进一步提高与深造有深刻影响.

在本书的编写过程中,为了体现成人教育的特点,便于自学,我们在以下几个方面有所重视.

1. 内容选取恰当,安排合理,达到一定的深度和广度. 尽量让读者把主要精力集中到那些最基本、最主要的内容上,而没有涉及后继课程的内容. 所选内容能够较好地适应数学专业数学分析课程应学知识的基本要求.

2. 加强"三基"(基础知识、基本理论、基本技能). 重视了基本概念和基本理论的学习,使读者一方面得到严格的训练,一方面扎实地学到知识,掌握一系列重要内容,再用知识去启发读者的智能,掌握一些较为典型的论证问题的方法.

3. 数学知识与数学思想有机结合,提升素质教育. 注重实际应用背景知识及几何直观的解释,强调概念与方法的来源,不同概念间的内在联系以及所讲内容在整个体系中的作用与地位,使抽象概念的引入具体生动. 在讲定理证明和公式推导时,尽量注重理论分析及思想的启发引导,有意识地进行逻辑推理能力和抽象思维能力的培养.

4. 数学教材的例题和习题是其重要组成部分,是实现教学要求,完成教学任务,提高教学质量的重要环节. 在本书编写过程中,我们尽量选取典型的、代表性强的例题. 加强"三基"(基础知识、基本理论、基本技能)训练及培养学生逻辑思维能力,使其切实掌握运用数学工具分析问题、转化问题、解决问题的思路和方法. 本书各节都精选了适量的习题,每个单元之后配置了两套自测题,包括概念复习题、计算题、证明题、应用题和综合题等,希望这些题目在读者检查学习效果以及复习方面能发挥一定的作用.

本书的总体框架和编写大纲由编写组讨论后确定. 第一、十六章由王树泽执笔，第二、三、四、五、六章由于兴江执笔，第七、九章由盛秀艳执笔，第八、十章由张兴芳执笔，第十一、十二、十三、十四章由张凤霞执笔，第十五章由刘利英执笔，第十七、二十章由张兴秋执笔，第十八、十九、二十一章由伊继金执笔. 初稿完成后，再经集体多次讨论修改定稿. 最后由于兴江和王树泽对教材的整体格式和行文做了统一处理.

感谢聊城大学数学科学学院领导和成人教育学院领导的大力支持.

由于我们水平有限，编写时间也比较仓促，因而教材中可能存在错误和缺点，恳请读者批评指正.

编　者

2009 年 8 月

目 录

第一章 一元函数

数学分析课程研究的基本对象是函数，核心内容是函数的微分、积分理论. 分为一元函数微积分和多元函数微积分. 我们先学习一元函数微积分学理论. 为此，本章介绍一元函数的基本概念.

事物的变化，事物之间的相互制约与联系，往往呈现出变量与变量之间的某种依赖关系，也就是函数关系. 在数学分析中，函数中的变量依数的形态出现.

在本书中，除非特别说明，变量的取值是实数，变量的变化范围是实数集.

第一节 实数集

实数是大家在中学时期就已经熟悉的概念.

有理数可用分数形式$\frac{p}{q}$(p,q为整数，$q\neq0$)表示，也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示；而无限十进不循环小数则称为无理数，有理数和无理数统称为实数.

实数的全体也称为实数系，记为 $\mathbf{R}$ 或$(-\infty,+\infty)$.

注：$+\infty$读作正无穷大；$-\infty$读作负无穷大.

一、实数的性质

1. 封闭性　实数集 R 对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算是封闭的，即任意两个实数的和、差、积、商(除数不为 0)仍然是实数.

2. 有序性　实数集是有序的，即任意两实数 a,b 必满足下述三个关系之一(三岐性)：

$$a>b, a=b, a<b.$$

3. 传递性　实数的大小关系具有传递性，即若 $a>b,b>c$，则有 $a>c$.

4. 阿基米德(Archimedes)性　即对任何 $a,b\in\mathbf{R}$，若 $b>a>0$，则存在正整数 n，使得 $na>b$.

5. 稠密性　即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数，也有无理数.

6. 连续性　如果在一直线(通常画成水平直线)上确定一点 O 作为原点，指定一个方向为正向(通常把指向右方的方向规定为正向)，并规定一个单位长度，则称此直线为数轴. 任一实数都对应数轴上唯一的一点；反之，数轴上的每一点也都唯一地代表一个实数. 于是，实数集 R 与数轴上的点有着一一对应关系. 在本书以后的叙述中，常把“实数 a”

与“数轴上的点 a”这两种说法看做具有相同的含义.

二、绝对值

实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

它的几何意义:从数轴上看,数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.认识到这一点非常有用.与此相应,$|x-a|$ 表示的是数轴上点 x 与 a 之间的距离.

实数的绝对值有以下性质:

1. $|a|=|-a|\geqslant 0$; $|a|=0\Leftrightarrow a=0$(非负性);
2. $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$;
3. $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$, $|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h$. $(h>0)$;
4. 对任何 $a,b\in\mathbf{R}$ 有(三角不等式):

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|;$$

5. $|ab|=|a|\cdot|b|$;
6. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$.

下面只证明性质 4,其余自证.

因为

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,-|b|\leqslant b\leqslant|b|.$$

两式相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

也就是

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

再将 b 换成 $-b$ 即得 $|a-b|\leqslant|a|+|b|$.于是证明了性质 4 的右半部分.

由 $|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|$,所以

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|.$$

将 b 换成 $-b$ 即得性质 4 的左半部分 $|a|-|b|\leqslant|a+b|$.性质 4 证毕.

以后我们会看到,对于整个数学领域,三角不等式可以说是无处不在.

三、区间

在数学分析课程中,最常遇到的实数系 $\mathbf{R}$ 的子集是区间,下面简单介绍几类常见的区间.

设 $a,b(a<b)$ 是两个实数,则满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的开区间,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\};$$

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的闭区间,记为 $[a,b]$,即

$$[a,b]\equiv\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\};$$

满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的半开半闭区间，分别记为 $(a,b]$ 和 $[a,b)$，即有

$$(a,b]\equiv\{x\mid a<x\leqslant b\}\text{和}[a,b)\equiv\{x\mid a\leqslant x<b\}.$$

上述区间中的 a、b 分别叫做区间的左端点、右端点. 在数轴上，上述区间分别表示开线段、闭线段及半开半闭线段. 两个端点之间的距离 $b-a$ 叫做区间的长度，为有限长度. 所以都叫做有限区间.

除了有限区间外，还有长度无限的无限区间. 它们的符号及意义规定如下：

$$(-\infty,a)\equiv\{x\mid -\infty<x<a\};$$
$$(-\infty,a]\equiv\{x\mid -\infty<x\leqslant a\};$$
$$(a,+\infty)\equiv\{x\mid a<x<+\infty\};$$
$$[a,+\infty)\equiv\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$$

以及

$$(-\infty,+\infty)\equiv\{x\mid x\in\mathbf{R}\}.$$

有限区间和无限区间统称为区间.

四、邻域

对于全体实数组成的集合，我们不仅要考虑一个个的实数，而且要度量彼此间的距离，距离确定一种结构，有了两点之间的距离，就可以构成区间，定义邻域，有了邻域，我们就可以描述极限. 以后我们还可以定义聚点，内点，界点等.

因此首先我们给出邻域的定义.

对于 $\delta>0$，a 为实数，集合

$$U(a;\delta)=\{x\,\|\,x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

叫做点 a 的 δ 邻域. δ 称为半径.

若 $a<b$，则对于任何 $x_0\in(a,b)$，存在 $\varepsilon>0$，使得 $U(x_0;\varepsilon)\subset(a,b)$.

在定义函数极限时，我们还用到以下几种邻域，它们的记号和意义如下：

点 a 的空心 δ 邻域：$U^\circ(a;\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

点 a 的 δ 右邻域和点 a 的空心 δ 右邻域：

$$U_+(a;\delta)=\{x\mid a\leqslant x<a+\delta\}=[a,a+\delta),$$
$$U^\circ{}_+(a;\delta)=\{x\mid a<x<a+\delta\}=(a,a+\delta);$$

点 a 的 δ 左邻域和点 a 的空心 δ 左邻域：

$$U_-(a;\delta)=\{x\mid a-\delta<x\leqslant a\}=(a-\delta,a],$$
$$U^\circ{}_-(a;\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a\}=(a-\delta,a).$$

以后在没有必要指出邻域半径 δ 的大小时，以上领域我们可以分别简记为：

$$U(a),U^\circ(a),U_+(a),U^\circ{}_+(a),U_-(a),U^\circ{}_-(a).$$

五、两个常用不等式

数学分析的大量问题涉及到不等式，例如论证极限问题主要是处理不等式. 下面强

调的两个不等式使用频繁，而且在其他数学分支中也有广泛用途.

1.(三角不等式)对任何实数 a 和 b，都有

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

这个不等式前面已证明.重复叙述以示其重要性.

2.(平均值不等式)对任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

证明 先证明右边的不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

当 $n=1,2$ 时，不等式显然成立.

当 $n>2$ 且 $n=2^k$(k 为正整数)时，不等式是 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的直接推论.

当 $n>2,n\neq 2^k$ 时，取正整数 s，使 $2^{s-1}<n<2^s$，记

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\bar{a},$$

在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 后面加上 2^s-n 个 $\bar{a}$，将其扩充成 2^s 个正数.对这 2^s 个正数应用不等式，得到

$$\frac{1}{2^s}[a_1+a_2+\cdots+a_n+(2^s-n)\bar{a}]\geqslant(a_1a_2\cdots a_n\bar{a}^{2^s-n})^{\frac{1}{2^s}}=\bar{a},$$

整理后即有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

对 $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}$ 使用上面的结论，便得到左边的不等式.

不等式中

$$M(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,$$

$$G(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{1}{n}},$$

$$H(a_i)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$$

分别叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均值，几何平均值和调和平均值.这就是说，算术平均值不小于几何平均值，几何平均值不小于调和平均值.等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

我们看几个例题

【例 1】证明贝努里(Bernoulli)不等式

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh,n\in\mathbf{N}_+,h>-1.$$

证明 由于$1+h>0$，用平均值不等式得

$$(1+h)^n+n-1=(1+h)^n+1+1+\cdots+1\geqslant n\sqrt[n]{(1+h)^n}=n(1+h),$$

从而

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh.$$

注：当$h>0$时，由二项展开式

$$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3+\cdots+h^n,$$

右边$n+1$项全是正数，所以$(1+h)^n$不小于上式右端任何一项或几项之和.

【例2】(1)设实数$a>1$，n为正整数，证明

$$1<\sqrt[n]{a}<1+\frac{a}{n};$$

(2)设n为正整数，证明

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}};$$

(3)设n为正整数，证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

证明 (1)、(2)中只需证明右边不等式. 用平均值不等式得

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{1^{n-1}a}<\frac{n-1+a}{n}<1+\frac{a}{n};$$

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{1^{n-2}\sqrt{n}\sqrt{n}}\leqslant\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

(1)、(2)得证.

对于(3)，仍由平均值不等式得

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}<\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

两边$n+1$次方即可.

【例3】(根差不等式)$\left|\sqrt[n]{|a|}-\sqrt[n]{|b|}\right|\leqslant\sqrt[n]{|a-b|}$.

证明 因为$|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|$，所以

$$\left(\sqrt[n]{|a-b|}+\sqrt[n]{|b|}\right)^n\geqslant|a-b|+|b|\geqslant|a|=\left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n,$$

于是$\sqrt[n]{|a-b|}+\sqrt[n]{|b|}\geqslant\sqrt[n]{|a|}$，即$\sqrt[n]{|a-b|}\geqslant\sqrt[n]{|a|}-\sqrt[n]{|b|}$. a与b相互交换得

$$\sqrt[n]{|a-b|}\geqslant\sqrt[n]{|b|}-\sqrt[n]{|a|}=-\left(\sqrt[n]{|a|}-\sqrt[n]{|b|}\right).$$

所以$\left|\sqrt[n]{|a|}-\sqrt[n]{|b|}\right|\leqslant\sqrt[n]{|a-b|}$.

习题 1.1

1. 设a为有理数，x为无理数，证明：

(1)$a+x$ 是无理数;(2)当 $a\neq 0$ 时,ax 是无理数.

2. 证明$\sqrt{2}$是无理数.

3. 证明下列不等式.

(1)$|x-y|\geqslant \|x|-|y\|$;(2)$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$.

4. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,证明:若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$.

5. 证明:对任何实数 x 有.

(1)$|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;(2)$|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

6. 求证$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

7. 设 a,b,c 都是正数,证明

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|.$$

第二节　有界数集与确界

一、有界集

定义 1　设 S 为 R 中的一个数集.若存在数 $M(L)$,使得对一切 $x\in S$,都有 $x\leqslant M(x\geqslant L)$,则称 S 为有上界(下界)的数集,数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界(下界).

若数集 S 既有上界又有下界,则称 S 为有界集.若 S 不是有界集,则称 S 为无界集.

数集 S 有界的充分必要条件是:存在正数 M,使得一切 $x\in S$,都有 $|x|\leqslant M$.

从数轴上看,数集 S 有上界 M,是指 S 中的点都位于点 M 的左侧(可能包括 M);若 S 有下界 L,是指 S 中的点都位于点 L 的右侧(可能包括 L);数集 S 有界,那么它就一定是一个有限区间的子集.

若数集 S 有上(下)界,那么,它的上(下)界不唯一.

读者可自行证明:任何有限区间都是有界集,无限区间都是无界集;由有限个数组成的数集是有界集.

数集 S 无上界的正面叙述是:对任何正数 M,总存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>M$.其实,数集 S 中大于 M 的数有无限多个,这可用反证法证明.

有上界与无上界这一对矛盾概念的叙述方式恰好是:把量词"任意"与"存在"互相对换,把不等号换成它的对立不等号.这种否定命题的逻辑陈述方式今后经常用到.

请读者自己正面叙述数集 S 无下界和无界的概念.

如果 S 为无界集,它可以既无上界亦无下界,也可以只是无上界或者只是无下界.

【例 1】$S=\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$是有界数集,1(或大于 1 的任一实数)是它的一个上界,0(或小于 0 的任一实数)是它的一个下界.

【例 2】证明数集 $N_+=\{n|n$ 为正整数$\}$有下界而无上界.

证明 任取 $n_0\in\mathbf{N}_+$，显然有 $n_0\geqslant 1$，所以 N_+ 有下界 1；但 N_+ 无上界. 证明如下：假设 N_+ 有上界 M，则 $M>0$，按定义，对任意 $n_0\in\mathbf{N}_+$，都有 $n_0\leqslant M$，这是不可能的，如取 $n_0=[M]+1$，则 $n_0\in\mathbf{N}_+$，且 $n_0>M$.

综上所述知，N_+ 是有下界无上界的数集，因而是无界集.

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如：$[2.5]=2$，$[5]=5$，$[-2.5]=-3$，$[-5]=-5$.

如果数集 S 中有一个数 b，它不小于 S 中其他的数，即 $b\in S$，且对任意 $x\in S$ 有 $x\leqslant b$. 则称数 b 是 S 的最大数，记为 $b=\max S$.

类似地，S 的最小数 a 的含义是：$a\in S$，且对任意 $x\in S$ 都有 $x\geqslant a$. 记做 $a=\min S$.

显然，如果数集 S 有最大数，则最大数只有一个，且是 S 的最小上界.

例 1 的数集 S 有最大数 1，但没有最小数；例 2 的数集 N_+ 有最小数 1，而没有最大数.

【例 3】设 $S=\{x\mid x$ 为区间 $(0,1)$ 中的有理数$\}$，则 S 既没有最大数，也没有最小数.

证明 用反证法假设 S 有最大数 b. 则 b 是有理数且 $0<b<1$. 取 $r=\dfrac{b+1}{2}$，则 r 是有理数且 $r>b$，$0<r<1$. 因此 $r\in S$，$r>b$. 这就与 b 是 S 的最大数矛盾. 所以 S 没有最大数. 同理 S 没有最小数.

任何闭区间 $[a,b]$ 的左端点 a 是 $[a,b]$ 的最小数，右端点 b 是 $[a,b]$ 的最大数. 而任何开区间 (a,b) 既没有最大数，也没有最小数.

二、确界

我们看到，若数集 S 有上界，则显然它有无穷多个上界（其实，S 的全体上界构成一个无限区间），而其中最小的一个上界常常具有重要的作用，称它为数集 S 的上确界. 同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界.

所谓数集 S 的最小上界是这样一个数：首先它是 S 的一个上界；其次任意一个比它小的数就不是 S 的上界了. 用定量描述就是下面的

定义 2 设 S 是 R 中的一个数集. 若数 η 满足：

(ⅰ)对一切 $x\in S$，有 $x\leqslant\eta$，即 η 是 S 的上界；

(ⅱ)对任何 $\alpha<\eta$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\alpha$，即 η 又是 S 的最小上界，

则称数 η 为数集 S 的上确界，记作

$$\eta=\sup S.$$

类似地，下确界的定义是

定义 3 设 S 是 R 中的一个数集. 若数 ξ 满足：

(ⅰ)对一切 $x\in S$，有 $x\geqslant\xi$，即 ξ 是 S 的下界；

(ⅱ)对任何 $\beta>\xi$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0<\beta$，即 ξ 又是 S 的最大下界，

则称数 ξ 为数集 S 的下确界，记作

$$\xi=\inf S.$$

上确界与下确界统称为确界.

注：(1)由上(下)确界的定义可见，若数集 S 存在上(下)确界，则一定是唯一的. 又若

数集 S 存在上、下确界，则有 $\inf S\leqslant \sup S$.

(2)数集 S 的确界可能属于 S，也可能不属于 S.

为了使用上的方便，上、下确界常用下面的定义

定义2′ 设 S 是 R 中的一个数集. 若数 η 满足：

(ⅰ)对一切 $x\in S$，有 $x\leqslant\eta$，即 η 是 S 的上界；

(ⅱ)对任意给定的正数 ε(相当于任给一个比 η 小的 $\alpha=\eta-\varepsilon$)，存在 $x_0\in S$ 使得 $x_0>\eta-\varepsilon$. 则称数 η 为数集 S 的上确界，记作

$$\eta=\sup S.$$

定义2′中的条件(ⅱ)也是说比 η 小的数都不是 S 的上界. 即 η 是 S 的最小上界.

定义3′ 设 S 是 R 中的一个数集. 若数 ξ 满足：

(ⅰ)对一切 $x\in S$，有 $x\geqslant\xi$，即 ξ 是 S 的下界；

(ⅱ)对任意给定的正数 ε(相当于任给一个比 ξ 大的 $\beta=\xi+\varepsilon$)，存在 $x_0\in S$ 使得 $x_0<\xi+\varepsilon$. 则称数 ξ 为数集 S 的下确界，记作

$$\xi=\inf S.$$

【例 4】设 $S=\{x\mid x$ 为区间$(0,1)$中的有理数$\}$. 试按上、下确界的定义验证：$\sup S=1,\inf S=0$.

证明　先证 $\sup S=1$.

(ⅰ)对一切 $x\in S$，显然有 $x\leqslant 1$，即 1 是 S 的上界.

(ⅱ)对任何 $\alpha<1$，若 $\alpha\leqslant 0$，则任取 $x_0\in S$ 都有 $x_0>\alpha$；若 $\alpha>0$，则由有理数集在实数集中的稠密性，在$(\alpha,1)$中必有有理数 x_0，即存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\alpha$. 所以 $\sup S=1$.

类似可证 $\inf S=0$.

请读者自己验证闭区间$[0,1]$的上、下确界分别为 1 和 0；对于数集 $E=\{\frac{(-1)^n}{n}\mid n=1,2,\cdots\}$ 的上、下确界分别为 $\sup E=\frac{1}{2}$，$\inf E=-1$；正整数集 N_+ 有下确界 $\inf N_+=1$，而没有上确界.

【例 5】设数集 S 有上确界. 证明

$$\eta=\sup S\in S\Leftrightarrow\eta=\max S.$$

证明　[必要性]因为 $\eta=\sup S$，所以对一切 $x\in S$ 有 $x\leqslant\eta$，又 $\eta\in S$，故 η 是数集 S 的最大数. 即 $\eta=\max S$.

[充分性]设 $\eta=\max S$，则对一切 $x\in S$，有 $x\leqslant\eta$；对任何 $\alpha<\eta$，只需取 $x_0=\eta\in S$，则 $x_0>\alpha$，故 $\eta=\sup S$.

一般地，如果数集 S 有最大数，则最大数是上确界；如果有最小数，则最小数是下确界. 前面我们看到，即使有界数集也不一定存在最大、最小数. 而关于数集确界的存在性，我们有如下确界原理.

定理 1.1(确界原理)　设 S 为非空数集，则有

(ⅰ)若 S 有上界，则 S 必有上确界；

(ⅱ)若 S 有下界，则 S 必有下确界.

证明　我们先证明(ⅰ). 为叙述方便，不妨设 S 含有非负数. 由于 S 有上界，故可找

到非负整数 n，使得

(1)对于任何 $x\in S$，有 $x\leqslant n+1$；

(2)存在 $a_0\in S$，使 $a_0>n$.

对半开区间 $[n,n+1)$ 作 10 等分，分点为 $n.1,n.2,n.3,\cdots,n.9$，则存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_1，使得

(1)对于任何 $x\in S$，有 $x\leqslant n\cdot n_1+\frac{1}{10}$；

(2)存在 $a_1\in S$，使 $a_1>n\cdot n_1$.

再对半开区间 $[n\cdot n_1,n\cdot n_1+\frac{1}{10})$ 作 10 等分，则存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_2，使得

(1)对于任何 $x\in S$，有 $x\leqslant n.n_1n_2+\frac{1}{10^2}$；

(2)存在 $a_2\in S$，使 $a_2>n.n_1n_2$.

继续不断地 10 等分在前一步骤中所得到的半开区间，可知对任何 $k=1,2,\cdots$，存在 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个数 n_k，使得

(1)对于任何 $x\in S$，有 $x\leqslant n.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k}$；

(2)存在 $a_k\in S$，使 $a_k>n.n_1n_2\cdots n_k$.

将上述步骤无限地进行下去，得到实数 $\eta=n.n_1n_2\cdots n_k\cdots$. 以下证明 $\eta=\sup S$. 为此，只需证明：

(1)对一切 $x\in S$，有 $x\leqslant\eta$；(2)对任何 $\alpha<\eta$，存在 $\alpha'\in S$，使得 $\alpha<\alpha'$.

倘若结论(1)不成立，即存在 $x\in S$ 使 $x>\eta$，若记 $x=n.x_1x_2\cdots x_k\cdots$，称 $x_k=n.x_1x_2\cdots x_k$ 为 x 的 k 位不足近似值，则可找到 x 的 k 位不足近似 x_k，使

$$x\geqslant x_k>\eta_k=n.n_1n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k},$$

但这与不等式(1)相矛盾，于是(1)得证.

现设 $\alpha<\eta$，则存在 k，使 η 的 k 位不足近似 $\eta_k>\bar{\alpha}_k$（这里 $\bar{\alpha}_k=\alpha_k+\frac{1}{10^k}$，$\alpha_k$ 为 α 的 k 位不足近似值)，即

$$\eta_k=n.n_1n_2\cdots n_k>\bar{\alpha}_k.$$

根据数 η 的构造，存在 $\alpha'\in S$，使得 $\alpha'\geqslant\eta_k$，从而有：

$$\alpha'\geqslant\eta_k>\bar{\alpha}_k\geqslant\alpha,$$

即得到 $\alpha<\alpha'$. 这说明(2)成立. 从而证明了结论(ⅰ).

为了证明结论(ⅱ)，可令

$$T=\{-x\,|\,x\in S\},$$

那么，若 L 是 S 的下界，则 $-L$ 是 T 的上界. T 为有上界的非空数集，由已证明的结论(ⅰ)，$\sup T$ 存在. 可以验证(留作习题)

$$\inf S=-\sup T$$

也存在. 定理证毕.

注意在上面的证明中，上确界 η 的小数表示可能是用 9 循环的无限小数. 例如 $\eta=1.5$

的表示是 $\eta=1.4\,999\cdots999\cdots$. 但这并不影响我们的证明,因为我们关心的是上确界存在性,而不强调它的表示方式.

确界原理反映了实数系连续性这一基本性质.从几何上理解就是实数全体布满了整条数轴,而没有留有"空隙".假若实数全体在数轴上留有"空隙"的话,则"空隙"左边的全体数构成的数集就有上界而没有上确界了.比如,有理数系 Q 在数轴上有"空隙",Q 中有上界的集合在 Q 内未必有它的上确界.有理数系 Q 不具备实数系 R 所具有的"确界原理".

在本书中确界原理是极限理论的基础,读者应该给予充分的重视.

【例 6】设 A,B 为非空数集,满足:对一切 $x\in A$ 和 $y\in B$ 有 $x\leqslant y$. 证明:数集 A 有上确界,数集 B 有下确界,且

$$\sup A\leqslant \inf B.$$

证明 由假设,数集 B 中任一数 y 都是数集 A 的上界,A 中任一数 x 都是 B 的下界,故由确界原理推知数集 A 有上确界,数集 B 有下确界.

对任何 $y\in B$,y 是数集 A 的一个上界,而由上确界的定义知,$\sup A$ 是数集 A 的最小上界,故有 $\sup A\leqslant y$. 而此式又表明 $\sup A$ 是数集 B 的一个下界,故由下确界定义证得 $\sup A\leqslant \inf B$.

若把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 补充到实数集中,并规定任一实数 a 与 $+\infty$, $-\infty$ 的大小关系为:$a<+\infty$, $a>-\infty$, $-\infty<+\infty$,则确界概念可扩充为:若数集 S 无上界,则定义 $+\infty$ 为 S 的非正常上确界,记作 $\sup S=+\infty$;若 S 无下界,则定义 $-\infty$ 为 S 的非正常下确界,记作 $\inf S=-\infty$. 相应地,前面定义 1.2 和定义 1.3 中所定义的确界分别称为正常上,下确界.

在上述扩充意义下,我们有

推广的确界原理 任一非空数集必有上,下确界(正常的或非正常的).

例如,对于正整数集 N_+,有 $\inf N_+=1$, $\sup N_+=+\infty$;对于数集

$$S=\{y\,|\,y=2-x^2, x\in\mathbf{R}\}$$

有 $\inf S=-\infty$, $\sup S=2$.

习题 1.2

1. 设 S 为非空数集,试对下列概念给出定义:

(1)S 无下界;(2)S 无界.

2. 试证明数集 $S=\{y\,|\,y=2-x^2, x\in\mathbf{R}\}$ 有上界而无下界.

3. 求下列数集的上、下确界,并依定义加以验证.

(1)$S=\{x\,|\,x^2<2, x\in\mathbf{R}\}$; (2)$S=\{x\,|\,x=n!, n\in\mathbf{N}_+\}$;

(3)$S=\{x\,|\,x$ 为 $(0,1)$ 内的无理数$\}$; (4)$S=\{x\,|\,x=1-\frac{1}{2^n}, n\in\mathbf{N}_+\}$.

4. 设 S 为非空有下界数集,证明:$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S$.

5. 设 S 为非空数集,定义 $S^-=\{x\,|\,-x\in S\}$. 证明:

(1)$\inf S^-=-\sup S$; (2)$\sup S^-=-\inf S$.