品牌专业

shuxuefen

数学分析

下册

王树泽　于兴江　主编

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

济南出版社

山东省成人高等教育系列教材

数学分析

（下册）

主编　王树泽　于兴江

编委（按姓氏笔画为序）

于兴江　王树泽　刘利英　伊继金

张凤霞　张兴芳　张兴秋　盛秀艳

济南出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析 / 于兴江,王树泽主编. —济南:济南出版社,2010.8

山东省成人高等教育系列教材

ISBN 978-7-5488-0083-5

Ⅰ.数… Ⅱ.①于… ②王… Ⅲ.数学分析—成人教育:高等教育—教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 156471 号

出版发行	济南出版社
地　　址	济南市二环南路 1 号
邮　　编	250002
印　　刷	聊城大学印务中心
开　　本	185 × 260 mm　16 开
印　　张	15.25
字　　数	320 千
版　　次	2010 年 8 月第 1 版
印　　次	2010 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	49.00 元

(济南版图书,如有印装错误,可随时调换)

前 言

聊城大学成人高等教育走过了近三十年的历程. 值此数学与应用数学专业建设成为山东省高等学校成人高等教育品牌专业之际,我们编写了本《数学分析》教材. 为该专业的健康发展提供必要的基础. 全书分上、下两册,上册内容包括极限与一元函数微积分理论,下册内容包括级数与多元函数微积分理论.

本书可作为成人高等教育数学专业数学分析课程的教学用书,以及其他高等院校有关专业的教学参考书.

数学分析课程作为数学专业最重要的基础课之一,在培养具有良好数学素养的人才方面,它所起的作用是任何其他课程无法相比的. 对后继课程和毕业生的进一步提高与深造有深刻影响.

在本书的编写过程中,为了体现成人教育的特点,便于自学,我们在以下几个方面有所重视.

1. 内容选取恰当,安排合理,达到一定的深度和广度. 尽量让读者把主要精力集中到那些最基本、最主要的内容上,而没有涉及后继课程的内容. 所选内容能够较好地适应数学专业数学分析课程应学知识的基本要求.

2. 加强"三基"(基础知识、基本理论、基本技能). 重视了基本概念和基本理论的学习,使读者一方面得到严格的训练,一方面扎实地学到知识,掌握一系列重要内容,再用知识去启发读者的智能,掌握一些较为典型的论证问题的方法.

3. 数学知识与数学思想有机结合,提升素质教育. 注重实际应用背景知识及几何直观的解释,强调概念与方法的来源,不同概念间的内在联系以及所讲内容在整个体系中的作用与地位,使抽象概念的引入具体生动. 在讲定理证明和公式推导时,尽量注重理论分析及思想的启发引导,有意识地进行逻辑推理能力和抽象思维能力的培养.

4. 数学教材的例题和习题是其重要组成部分,是实现教学要求,完成教学任务,提高教学质量的重要环节. 在本书编写过程中,我们尽量选取典型的、代表性强的例题. 加强"三基"(基础知识、基本理论、基本技能)训练及培养学生逻辑思维能力,使其切实掌握运用数学工具分析问题、转化问题、解决问题的思路和方法. 本书各节都精选了适量的习题,每个单元之后配置了两套自测题,包括概念复习题、计算题、证明题、应用题和综合题等,希望这些题目在读者检查学习效果以及复习方面能发挥一定的作用.

本书的总体框架和编写大纲由编写组讨论后确定.第一、十六章由王树泽执笔,第二、三、四、五、六章由于兴江执笔,第七、九章由盛秀艳执笔,第八、十章由张兴芳执笔,第十一、十二、十三、十四章由张凤霞执笔,第十五章由刘利英执笔,第十七、二十章由张兴秋执笔,第十八、十九、二十一章由伊继金执笔.初稿完成后,再经集体多次讨论修改定稿.最后由于兴江和王树泽对教材的整体格式和行文做了统一处理.

感谢聊城大学数学科学学院领导和成人教育学院领导的大力支持.

由于我们水平有限,编写时间也比较仓促,因而教材中可能存在错误和缺点,恳请读者批评指正.

编 者

2009 年 8 月

目 录

第十一章　数项级数

级数是数学分析三大组成部分之一，是逼近理论的基础，是研究函数、进行近似计算的一种有用的工具.在自然科学，工程技术和数学的许多分支中都有广泛的应用.无穷级数理论，像其他数学理论一样，也是在实践和科学技术的发展和推动下，逐渐形成和完善起来的.早在魏晋时期，刘徽已经用无穷级数的概念来计算圆的面积了.直到十九世纪初，随着极限理论的建立，才给无穷级数奠定了理论基础.

在这一章中，我们主要介绍数项级数的一些基本概念（级数的收敛与发散概念，级数的和等等），级数的基本性质，各种数项级数收敛或发散的判别法以及级数的一些代数运算的性质，为今后更详细地研究函数项级数，特别是幂级数，傅里叶级数做准备.

第一节　数项级数的概念与性质

一、数项级数的概念

对于有限个实数 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 相加后还是一个实数，这是在中学就知道的结果，那么"无限个实数相加"会有什么结果呢？请看下面的几个例子.如在第二章提到《庄子・天下篇》"一尺之棰，日取其半，万世不竭"的例中，将每天截下那一部分的长度"加"起来是：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

由于前 n 项相加的和是 $1-\frac{1}{2^n}$，可以推测这"无限个数相加"的结果应该是 1.又如下面由"无限个数相加"的表达式

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots,$$

中，如果将其写作

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots,$$

结果肯定是 0，而写作

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+0+0+0+\cdots,$$

则结果是 1.两个结果的不同向我们提出了两个基本问题："无限个数相加"是否存在"和"；如果存在，"和"等于什么？由此可见，"无限个数相加"不能与有限个数相加作简单的类比，需要建立新的理论.

定义 1　设已给数列 $\{u_n\}$，将数列 $\{u_n\}$ 的各项用加号连接起来，即

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \quad \text{或} \quad \sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

称为数项级数或无穷级数，简称级数，其中 u_n 叫做级数的通项，或一般项.

作常数项级数的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$，$S_n$ 称为级数的部分和. 从而得一个新的序列：

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots, S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n, \cdots,$$

定义 2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，这时极限 S 叫做这级数的和，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 称 $r_n = S - S_n$ 为级数第 n 项以后的余项.

如果 $\{S_n\}$ 没有极限，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

【例 1】 证明等比级数(几何级数) $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots (a \neq 0)$ 当 $|q| < 1$ 时收敛，当 $|q| \geqslant 1$ 时发散.

证明 当 $q \neq 1$ 时，其前 n 项和 $S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

若 $|q| < 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$，即当 $|q| < 1$ 时等比级数收敛，且其和为 $\dfrac{a}{1-q}$. 当 $|q| > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \infty$. $n \to \infty$ 时，S_n 是无穷大量，级数发散.

若 $q = 1$，则级数成为 $a + a + a + \cdots$，于是 $S_n = na$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，级数发散.

若 $q = -1$，则级数成为，$S_n = a - a + a - a + \cdots (-1)^{n+1} a = \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2} a$，因为数列 $\{S_n\}$ 发散，所以级数也发散.

【例 2】 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

证明 因为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时，$S_n \to 1$. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

【例 3】 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ 的敛散性.

解 设

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n},$$

则

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2}S_n = S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2$. 因此,该级数收敛.

二、收敛级数的性质

因为级数的敛散性等价于部分和数列的敛散性,由数列收敛的柯西准则,可以得到级数收敛的柯西准则:

定理 11.1(柯西准则) **级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是任给 $\varepsilon > 0$,存在正整数 N,当 $n > N$ 时对一切的正整数 p,成立**

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

根据定理 11.1,取 $p = 1$,有当 $n > N$ 时 $|u_{n+1}| < \varepsilon$,于是有下面结论:

推论 1 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

本推论可以方便地用来判断级数发散. 注意这只是级数收敛的必要条件,不是充分条件.

【例 4】 讨论调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 的敛散性.

解 调和级数显然满足 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,对任意的正整数 m,若取 $p = m$,

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{2m}| \geqslant \left|\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m}\right| = \frac{1}{2}.$$

由柯西准则,调和级数发散.

【例 5】 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

证明 显然满足收敛的必要条件. 令 $u_n = \frac{1}{n^2}$,则当 $n \geqslant 2$ 时有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},$$

于是对任给的 $\varepsilon > 0$,取 $N = \frac{1}{\varepsilon}$,当 $n > N$ 时,有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

由级数收敛的柯西准则知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

由定理 11.1,级数收敛与否,仅与充分远的项有关,与前面任意有限项的大小无关,

因此级数有如下性质：

定理 11.2　去掉、增加或改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的有限项，不影响级数的敛散性.

定理 11.3(线性性质)　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，其和分别为 S_1, S_2，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$ 也收敛，其和为 $\alpha S_1 + \beta S_2$.

定理 11.4　若级数收敛，其和为 S，则可对该级数任意加括号，不改变其收敛性，也不改变其和.

注：发散级数不可以随意加括号，否则会改变其发散性. 例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 发散，但加括号后：$(1-1)+(1-1)+\cdots = 0$.

习题 11.1

1. 讨论下列级数的收敛性. 收敛的话，试求出级数之和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1} + 4^{n+1}}{3^{2n}}$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$；　(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$.

2. 确定 x 的范围，使下列级数收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$.

3. 设 $x_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n dx$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的和.

4. 证明：若 $\lim_{n\to\infty} na_n = a > 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

5. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

第二节　正项级数

上一节中，我们从实际例子出发，抽象出无穷级数的收敛、发散以及无穷级数和的概

念.但是给了一个无穷级数,究竟如何具体来判断它是否收敛呢?以及在收敛情况下,如何来求出其和呢?这两个问题都不是容易解决的问题.在这一节中,我们考虑比较特殊的一类无穷级数,其每一项都是正的,称之为正项级数.对于这一类级数可以比较容易地解决上述第一个问题,而且研究这类级数,对于研究一般无穷级数也是有益的.

一、正项级数收敛的一般判别原则

现设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数,即$a_n>0,n=1,2,\cdots$.这时,级数的部分和$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$就成为一个严格递增的数列,即

$$0<S_1<S_2<\cdots S_n<\cdots.$$

利用数列的单调有界定理,我们就可以得出下述关于正项级数的收敛性判别准则.

定理 11.5　正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$有上界.

从定理 11.5 可以得出关于正项级数收敛或发散的比较判别法.

定理 11.6(比较原则)　设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是两个正项级数,如果存在某正数$N$,对一切$n>N$,都有

$$u_n\leqslant v_n, \tag{1}$$

则

(ⅰ)若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛;

(ⅱ)若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散.

证明　因为改变级数的有限项不改变级数的收敛性,因此不妨设$n\geqslant 1$时,就有$u_n\leqslant v_n$.现分别以$S_n{}'$和$S_n{}''$记级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的部分和,由(1),对一切正整数$n$,都有

$$S'_n\leqslant S''_n, \tag{2}$$

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n{}''$存在,则$\{S_n{}''\}$有界,则由(2)式得正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n{}'\}$有界,由定理 11.5 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.这就证明了(ⅰ);(ⅱ)为(ⅰ)的逆否命题,自然成立.

【例 1】考察$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-n+1}$的收敛性.

解　由于当$n\geqslant 2$时,有

$$\frac{1}{n^2-n+1}\leqslant\frac{1}{n^2-n}=\frac{1}{n(n-1)}\leqslant\frac{1}{(n-1)^2},$$

因正项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2}$收敛,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-n+1}$收敛.

推论 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$是两个正项级数，若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则

(ⅰ)当$0<l<\infty$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$同时收敛或同时发散；

(ⅱ)当$l=0$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

(ⅲ)当$l=\infty$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散.

证明 因为$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，所以对任给的正数$\varepsilon$，存在某正数$N$，当$n>N$时，恒有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon$$

或

$$(l-\varepsilon)v_n<u_n<(l+\varepsilon)v_n. \tag{3}$$

再由定理11.6，当$0<l<\infty$(这里设$\varepsilon<l$)时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$同时收敛或同时发散. 这就证得(ⅰ).

对于(ⅱ)当$l=0$时，由(3)右半部分及比较原则可得：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛.

对于(ⅲ)，若$l=\infty$，即对任给的正数M，存在相应的正数N，当$n>N$时，都有

$$\frac{u_n}{v_n}>M$$

或

$$u_n>Mv_n.$$

于是由比较原则知道，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散.

【例2】讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$的收敛性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n-n}\Big/\frac{1}{2^n}=1,$$

又等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$的收敛，由推论可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$收敛.

【例3】讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}=\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}+\cdots$$

的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1,$$

根据推论以及调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

二、比式判别法和根式判别法

比较判别法是一种有用的判别法，在使用时必须先要对所考虑的级数的敛散性有一个大致的估计，然后找一个敛散性已知的合适级数与之相比较. 但就绝大多数情况而言，这两个步骤具有相当的难度，甚至根本无法做到. 看来，理想的判别方法还是应该着眼于对级数自身元素的分析，下面介绍两种以等比级数作为比较对象的收敛性判别方法.

定理 11.7(达朗贝尔(d'Alembert)判别法，或称比式判别法)　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且存在某正整数 N_0 及常数 $q(0<q<1)$.

(ⅰ) 若对一切 $n>N_0$，成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q<1,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(ⅱ) 若对一切 $n>N_0$，成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证明　(1) 不妨设对一切 n，有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q$ 成立，于是有

$$\frac{u_2}{u_1}\leqslant q,\frac{u_3}{u_2}\leqslant q,\cdots,\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant q,\cdots.$$

故 $\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\cdots\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant q^{n-1}$，即 $u_n\leqslant u_1q^{n-1}$，由于当 $q\in(0,1)$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ 收敛，由比较原则，可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 由于 $n>N_0$ 时，$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$ 可得 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

推论(比式判别法的极限形式)　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q,\tag{4}$$

则

(ⅰ) 当 $q<1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(ⅱ) 当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证明 由(4)式,对任意取定的正数 $\varepsilon(<|1-q|)$,存在正数 N,当 $n>N$ 时,都有

$$q-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<q+\varepsilon.$$

当 $q<1$ 时,取 ε 使 $q+\varepsilon<1$,由上述不等式的右半部分及定理 11.7 的(ⅰ),推得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

若 $q>1$,则取 ε 使 $q-\varepsilon>1$,由上述不等式的左半部分及定理 11.7 的(ⅱ),推得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

若 $q=+\infty$,则存在 N,当 $n>N$ 时有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1,$$

所以这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

【例 4】讨论级数

$$\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\cdots+\frac{2\cdot5\cdot8\cdots[2+3(n-1)]}{1\cdot5\cdot9\cdots[1+4(n-1)]}+\cdots$$

的收敛性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3n}{1+4n}=\frac{3}{4}<1,$$

所以根据推论级数是收敛的.

注:当 $q=1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛,也可能发散.如:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.它们的比式极限都是 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$,但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

定理 11.8(柯西判别法,或称根式判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数,且存在某正整数 N_0 及正常数 l,

(ⅰ) 若对一切 $n>N_0$,成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant l<1, \tag{5}$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(ⅱ) 若对一切 $n>N_0$,成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1, \tag{6}$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证明　由(5)式有

$$u_n \leqslant l^n.$$

因为等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l^n$ 当 $0 < l < 1$ 时收敛，故由比较原则，这时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，对于情形(ⅱ)，由(6)可推得 $u_n \geqslant 1$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，由级数收敛的必要条件知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

推论(根式判别法的极限形式)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

则

(ⅰ) 当 $l < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(ⅱ) 当 $l > 1$(可为 $+\infty$) 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证明　(略)

【例 5】讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} = \frac{1}{2},$$

所以级数是收敛的.

注：(1) 若上述推论中 $l = 1$，则根式判别法仍无法对级数的敛散性作出判断. 例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

(2) 我们已经知道：若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$. 这就说明凡能用比式判别法判定收敛性的级数，也能用根式判别法来判断，即根式判别法较之比式判别法更有效. 但反之不能，如例 5.

三、积分判别法

积分判别法是利用非负函数的单调性和积分性质，并以反常积分为比较对象来判断正项级数的敛散性.

定理 11.9　**设 $f(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 上非负减函数，则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛或同时发散.**

证明　由假设 $f(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 上非负减函数，则对任何正数 A，$f(x)$ 在 $[1, A]$ 上

可积，从而有

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leqslant f(n-1), n = 2,3,\cdots.$$

依次相加，得

$$\sum_{n=2}^{m} f(n) \leqslant \int_{1}^{m} f(x)dx \leqslant \sum_{n=2}^{m} f(n-1) = \sum_{n=1}^{m-1} f(n).$$

若反常积分收敛，则对 $\forall m$，有

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} f(n) \leqslant f(1) + \int_{1}^{m} f(x)dx \leqslant f(1) + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx.$$

于是，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

反之，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛，则对任意正整数 $m(>1)$，有

$$\int_{1}^{m} f(x)dx \leqslant S_{m-1} = \sum_{n=1}^{m-1} f(n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = S.$$

又因 $f(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 上非负减函数，故对任何 $A > 1$，有

$$0 \leqslant \int_{1}^{A} f(x)dx \leqslant S_n \leqslant S, \quad n \leqslant A \leqslant n+1.$$

故反常积分 $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

同理可证它们同时发散.

【例 6】讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$；(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$；(3) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}$.

解 (1) 函数 $f(x) = \frac{1}{x^p}$，当 $p > 0$ 时，在 $[1, +\infty)$ 上是非负减函数. 反常积分 $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ 在 $p > 1$ 时收敛，$p \leqslant 1$ 时发散. 由定理 11.9 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛，$0 < p \leqslant 1$ 时发散. 至于 $p \leqslant 0$ 的情形，由级数收敛的必要条件知它也是发散的.（级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 称为 p 级数）

(2) 研究反常积分 $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$，由于

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{2}^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^p},$$

当 $p > 1$ 时收敛，$p \leqslant 1$ 时发散. 根据定理 11.9 知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛，$p \leqslant 1$ 时发散.

(3) 考察反常积分 $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)(\ln\ln x)^p}$，同样可推得级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}$ 在 $p > 1$ 时收敛，$p \leqslant 1$ 时发散.