计算方法丛书·典藏版——10

二维非定常流体力学数值方法

李德元 徐国荣 水鸿寿
何高玉 陈光南 袁国兴 著

科学出版社

计算方法丛书·典藏版 10

二维非定常流体力学数值方法

李德元 徐国荣 水鸿寿 何高玉 陈光南 袁国兴 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地论述了非定常流体力学问题的数值解法．内容包括：Euler方法，Lagrange 方法，质点网格法，以及这些方法的推广．本书中还包括作者自己的成果，在实际计算中这些方法已被广泛地应用了．

本书可供高等院校计算数学专业和流体力学专业的师生以及科研人员和工程技术人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

二维非定常流体力学数值方法 / 李德元等著．—北京：科学出版社，2005.11

(计算方法丛书)

ISBN 978-7-03-046415-6

Ⅰ．①二… Ⅱ．①李… Ⅲ．①二维流动-非定常流动-流体力学-数值方法 Ⅳ．①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 277029 号

责任编辑：林 鹏 张鸿林／责任校对：鲁 素
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1987 年 10 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
2016 年 1 月 印 刷 印张：12 3/4
字数：321 000

定价：89.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《计算方法丛书》编委会

序　　言

(一)

在四五十年代尖端武器的研制中，科学计算的需要促进了数字电子计算机的发明与发展．流体力学运动可以由非线性的偏微分方程组来描述．在实际计算中，由于方程组与模型几何结构等的复杂性，计算规模往往是很大的．对于如此大型的计算课题，以往任何计算工具都是不能适应的．这就促使人们不得不去创造与发明新的计算工具．数字电子计算机就是在大型科学计算课题的需求下，发明与发展起来的．

以往总是先对问题提法、解的性质、近似方法与误差分析都作了充分研究以后，才去作数学问题的数值求解的．数字电子计算机的出现使人们采用数值方法求解的数学问题范围得到了很大的扩展．科学技术研究的实际问题与理论问题对计算数学不断提出越来越复杂的数学模型问题，要求得到近似数值解．在这些数学问题中，出现的方程或方程组在理论上暂时还难于作比较完整与深入的研究．但是使用数字电子计算机，可以得出所要求精度的数值近似解来．从而可以利用数值方法来研究解决所面临的各种科学技术研究中出现的实际问题与理论问题．

科学技术研究的进展对数字电子计算机的计算能力提出越来越高的要求．三十余年来，国内外几乎每台最先进的数字电子计算机的研制都是为了满足科学计算的需要，也都是作科学计算使用的．科学计算课题是无限的．这种无限而迫切的要求促使电子计算技术的发展． 数字电子计算机前二三十年的发展是迅速的，机器运算速度增长了五个数量级，内存容量增长了三个数量级，研制成了运算速度每秒上亿次，内存容量数百万字的巨型数字电子

计算机．在更高速的数字电子计算机的研制中，会明显地感觉到电讯号传播受到光速的限制． 因此进一步发展数字电子计算机，一方面要使器件更小型化，另一方面也应该着重考虑到方法、算法与程序在解题中的作用．近些年来计算机的发展过程是：由巨型机、小型机、超级小型机、小型超级机而小型超级机的组合系统，还要使机器具有并行运算、多指令流与多数据流的性能以此来提高解题能力．电子器件小型化的进展使得近年来计算机的价格在下降而性能在提高． 计算技术与科学计算都是处于发展的高峰时期．

（二）

由于数字电子计算机的解题能力极大，它可以求解一些提法还不太清楚，解的特性也还不太了解的问题．要对这类问题作近似求解方法的研究，在研究方法上就不能只采用完全传统的数学方法，应该采用一些实际科学中所用的非标准的数学推理方法，例如类比、外推、内插、综合、试验等方法．人们采用这些途径才能对一些复杂的数学模型得到解的性质与近似解法的一些必要的了解．

科学研究的精确化使线性化与小参数展开等研究方法在有些场合上不甚适用，有必要直接研究非线性数学问题或非线性偏微分方程问题．这些问题或方程即使是相当复杂的，但仍可以采用数值方法来研究． 这样就形成众多的计算学科，例如：计算力学、计算物理学、计算化学、计算生物学、计算经济学等．这些计算学科是边缘性的学科，是数学或计算数学与实际学科之间的交错学科．各种计算学科的研究使得理论数学与计算数学有了生动丰富的新内容、新课题与新方法，对相应的实际学科提供了称作数值模拟的新的研究手段，来帮助揭示出新的图象与新的规律．

在五十年代以前，对于科学技术问题中所提出的数学模型问题，科学家们往往要作出一切努力来简化方程、定解条件与数值解

法，使得简化了的问题能保持需要研究的物理机制而且还要使得能用当时的计算工具求出近似数值解来.

现代计算技术的发展使得在实际问题的物理机制与数学问题类型的考虑上，受到少得多的限制. 但在这种复杂问题的计算过程中，计算机会“自动地”进行亿万次运算得到所需要的近似数值解来. 在利用所得到的数值解去分析与推断科学技术问题的结论以前，先要弄清楚计算所得到的结果是否正确，是否是数学模型问题的近似解，是否是实际问题的近似解. 在利用旧的计算工具计算简化问题的近似解时，这些问题是比较容易弄清楚的. 对于现在的问题，人们可以利用程序编制、机器操作检验与结果分析来监督计算机按照程序要求的过程来执行正确的运算，并且来防止与掌握可能发生的各种偶然与必然的计算错误. 但是要判断所得到的数值解是否逼近数学模型问题的解，近似于实际问题的解以及近似的程度等，就需要人们在数学、物理、算法、程序与试算等方面在理论与方法上做细致的分析研究.

这种需要使得在五十年代后期兴起对非线性分析与非线性偏微分方程等近代理论的研究. 这种需要与机器的发展使得各种各样学科加速了向数学化的发展. 科学计算推动了各种应用科学与理论科学的发展.

(三)

数值计算可以看作是一种数值模拟或数值实验. 在大型数字电子计算机上可以计算气体与流体运动过程、化学反应过程、中子光子输运过程、炸药起爆与爆震过程、电磁流体运动过程以及各种非线性波的相互作用等问题. 计算这些运动过程问题实际上就是要求解含有很多线性与非线性偏微分方程、常微分方程、积分方程、泛函方程以及代数方程等的耦合方程组的各种问题. 因此数值模拟使人们对实际运动过程的认识在广度与深度上都得了进展.

利用解析方法求解的数学问题的解析解与近似解的范围是极其有限的．一般只能考虑一些很简单的问题．利用实验方法来测量数据是有限得很而且来之不易的．因此数值模拟在某种意义上比理论与实验对运动过程认识得更为深刻，更为细致．不仅可以了解运动的结果，而且可以了解运动整体的与局部的细致过程．

因此数值模拟可以从理论上分析暂时还弄不清楚的问题，而且还可以替代一些危险的、昂贵的甚至于是难于实施的试验，例如：反应堆的爆炸事故，巨型水坝坍塌造成的后果，核爆炸的过程与效应，气象运动等．数值计算不仅可以模拟物理、力学过程，还可以模拟经济与生态等过程，例如：利用经济规律的数学模型来计算一定经济政策下经济发展进程，利用生态规律的数学模型来计算生态平衡的过程． 这些都是不能用实验方法来验证的现象．

在科学技术实际问题的研究中，可以用数值模拟来选择实验或设计的最佳方案．这样可以减少试验的次数，尽快做到最佳的试验与设计．对于尖端技术问题研究，试验往往是极其昂贵的，有些甚至是很危险的，因此数值模拟有很大的经济效益，是加速科学技术进程的重要手段．

科学计算再也不能仅仅看作是理论研究与实验研究的辅助手段，而是独立于理论与实验的一种基本科学活动．以往人们为了认识一种科学技术规律，可以在理论研究与实验研究这二类基本科学活动中去探索．而现在人们可以采用理论、实验与计算三类基本科学活动来进行科学技术的研究．因此科学计算是近代科学技术迅速发展极为重要的，不可忽视的因素．

科学计算的发展促进各种学科的数学化进程，也使各门学科从定性向定量化发展，使学科更为计算机化，更为计算数学化，能用各种现代物理方程的求解定性与定量地阐明各学科中的运动规律．

现在人们在预测最近的将来会研制出运算速度为每秒百亿次、千亿次以上的数字电子计算机来．这不仅可以使科学更计算

机化或更计算数学化，还会使生产也更计算机化或计算数学化，极大地提高社会生产力的发展.

(四)

在描写各种介质运动过程的数学模型中，流体力学运动方程组往往是基本的组成部分. 运动过程需要考虑的其他机制可以用在流体运动方程之外增加别的方程来表示：如电磁流体问题需要增加电磁方程，炸药的爆炸过程就要增加化学反应方程或反应率方程，核能反应运动要增加中子与介质粒子的输运方程等. 弹塑性介质的运动方程与流体运动方程是有些不同的，但其方程所属的类型仍是一致的.

流体运动方程组是拟线性双曲型方程组. 对于拟线性双曲型方程组不管初值如何光滑，解可以是有间断的. 对于间断的初值，解也还可以是光滑的. 拟线性双曲型方程组的解可以发生新的间断而且间断可以消失. 这种间断的产生与消失反映了流体运动中冲击波间断的产生与消失. 这种特性使求解流体力学运动方程组有它特殊的问题与困难.

因此对拟线性双曲型方程组的解应该在间断函数类中去寻找. 利用积分守恒的方式来定义的弱解往往不是唯一的，可以是有无穷多个的. 在这些弱解中适合所谓"熵条件"的解是唯一的物理解. 计算的目的是要作出这种物理解的近似.

计算流体运动问题，尤其是非定常的问题，有限差分法是一种主要的方法. 但是差分法是不适应于间断解的近似计算，因此在求解时，先要把问题的解光滑化. 例如在一阶双曲型方程组中，增加带小参数的起扩散作用的二阶或高阶导数项. 新方程组相应问题的解可以是光滑的. 如果这样处理得到的解近似于原始问题的解，那末原始问题的差分近似解就可以用新问题的差分近似解来代替了.

这种光滑化过程可以用在原始方程组中增加人为的光滑化项

来实现，这种光滑化项被称为人为粘性项；或者可以从原始方程组建立差分方程组时，引进适当的光滑化项来实现，这种光滑化项称为格式粘性项. 这些粘性项可以是退化的或非退化的扩散项，可以是二阶的或是高阶的.

因此在选取人为粘性与格式粘性时，除了计算过程的需要与方便的一些考虑以外，还应该注意到引进什么样人为粘性或格式粘性以后，新的方程组问题提法的适定性，注意到解是光滑的而且是唯一的；而且当粘性项消失时，光滑解逼近于原始问题的唯一物理解. 因为并不是所有起光滑化作用的附加项，在它消失时都能具有这样的逼近性质.

(五)

二维定常与非定常的流体运动是很复杂的运动，在流场上可以发生扭曲、涡流与滑移等现象. 在有多种介质时，这些机制会更显出复杂性来. 介质的分界面运动的不稳定性使介面犬牙交错，不同介质混淆起来. 一维流体运动因为流体介质前后按序不能相互超越而要简单得多. 这些情况使得流体力学运动数值求解时，一维问题与二维问题显示出很不相同的复杂性来.

对于一维流体力学问题的计算，往往一种有限差分格式可以计算各种各样的流动问题. 但是对于二维流体力学问题的计算，很难有一些统一的格式可以计算好各种问题. 往往对于一类问题在一定的变化范围中，需要有个专门的程序包，其中包括各种特殊的格式与各种特殊的处理.

对于一些扭曲不太严重的流体力学运动，可以采用 Lagrange 方法，计算结果对多种介质运动整体或局部的变化都能描写得比较细致. 对于有较大变形的流场，采用 Lagrange 方法进行计算时，要出现网格畸形与网格相交，使得计算不能进行下去. 对于这些网格要进行重新划分，重分是在 Euler 区域中进行的. 可以每计算一步或若干步将 Lagrange 网格重新划分，使得扭曲成畸形的

网格改换成为比较规整的网格．新网格上的物理量可以从原网格上的物理量利用守恒原则来进行分配．这样做法可以使计算继续进行下去，严格地说不再是纯粹追踪流体运动的 Lagrange 方法了．

对于有大变形的流体运动场的计算，Euler 方法比较合式，没有网格相交的问题．但是当流场中包含多种流体介质时，会出现同一网格中有一种以上的流体介质的混合网格．如何计算混合网格中的物理量，如何计算混合网格向周围网格的各种输运量，又如何来明确介质之间的分界面等问题，是二维非定常流体运动计算的一个重要研究课题．

在网格中的介质可以用若干个质点来表示．每个质点带有某种介质的质量．质量的输运可以用质点的输运来表示．类似地还可以处理动量与能量的输运．这样做法可以计算好具有多种介质的大扰动的流体运动．但是要得到具有相当精度的计算结果，需要有很多的网格与很多的质点．对于每个网格不仅要有介质的状态参数与运动参数，还要有质点的参数．这样计算量与存贮量都很大．这就对使用这种处理方法带来了限制．如果有高速度与大容量的超巨型计算机可供使用的话，那末这种方法是比较成功的办法，甚至于还可以在网格中取用比较多的质点，并且质点可以带有更多的参数，使混合网格的描述更为细致．但在通常的情况下，人们还得在减少计算量与存贮量上想办法．譬如，只在混合网格、自由面网格与尽量少的邻近网格内放些质点，或只用标记点来代替质点，这样就减少了数据存贮量．可以把在混合网格中不同介质的分界面归纳成若干种简单的情况，从而来设计混合网格的各种输运量的计算办法． 当然不同的处理会产生很不相同的效果的．

（六）

在本书中着重讨论以下几个方面的问题．

对扰动不是很大的流体运动过程，采用 Lagrange 坐标系是合适的. 对于大扰动的单介质流体运动，采用 Euler 坐标系是合适的. 但是在通常流体运动的实际问题中，扰动一般不会太小，而且往往是有多种介质的，所以实际上 Lagrange 与 Euler 坐标系的各种耦合才是经常使用的. 耦合的方式是多种多样的，例如：Lagrange 网格在 Euler 区域中的重新划分，不同流体区域或不同介质分别采用 Lagrange 坐标系或 Euler 坐标系，用网格与质点分别刻划 Euler 与 Lagrange 坐标系的特征等等.

差分格式的设计是与坐标系的选择、网格的形状以及运动特殊机制的限定(如滑移、断裂与碰撞等)有关的. 误差精度、稳定性质与守恒性质等在建立差分格式时应该着重考虑. 当然差分格式可以直接从流体力学 Lagrange 坐标系或 Euler 坐标系的运动方程组离散化得来的. 更多地可以从运动网格的积分守恒方程组离散化来设计. 这样做会有较好的守恒性质，较自然地来建立各种输运量的计算公式. 对于从守恒方程出发的差分格式，在计算过程中，差分质量、动量与总能量守恒会比较好的. 但有时动能与内能这些分能量守恒得不很理想，甚至于误差不小. 所以可以从能量微分方程出发来建立差分格式. 这样，动能与内能等这些分能量计算误差会小些，而差分总能量守恒只能是近似地保持了. 可以把总能量的守恒误差来作为计算过程有没有偶然性误差与精度不够而积累过大的检查标志量. 所谓完全守恒差分格式就是从能量微分方程出发建立的，而又使得差分总能量保持守恒的差分格式. 在二维运动问题中，完全守恒性也往往是只对部分计算过程而言的，有时还要考虑到二层以上的差分格式.

流体运动方程组的解是可以间断的，间断线或面是未知的，是依赖于解的. 因此近似光滑化间断解是流体力学有限差分方法研究中应考虑的一个基本问题. 像一维流体力学有限差分法一样，在二维非定常流体力学数值求解时，可以在运动方程组中，人为地增加一些起粘性作用的项. 这些项可以是线性或非线性的，可以是标量型、向量型或张量型的. 这些项的形式尽量接近于流体运

动真实粘性项的形式．也可以在对微分方程离散化时，从计算方便、扩散效应、熵的特性等甚至人们的意愿的考虑增加一些格式粘性项．

对于大扰动的多介质流体运动，重分网格、滑移、断裂与碰撞等的处理在计算方法设计中是不可避免的．混合网格计算是很需要着重研究的问题．所谓处理方法包括混合网格中介质之间分界面的处理，网格运动参量与状态参量的计算与平均以及各种输运量在不同情况的计算方法等．不同的处理方法，计算结果可以有不同的计算量与不同近似程度．混合网格的处理方法对于合并网格与分细网格的处理是有用的，因为流体流场有些部分是很平整的，可以采用大网格，有些部分变化激烈，采用小网格仍可以有混合网格出现．

由于二维非定常流体运动过程的复杂性与计算机性能的限制，二维非定常流体运动计算方法的研究实际上是针对有一定范围的特定流体运动过程的计算目的来设计一套计算方法与处理方法．前几节提到的几个方面是这种设计中需要研究的问题．它们之间是关联着的，因此在本书中对它们的讨论是交错着进行的．在各个章节中，讨论了在不同的情况下，可以采用的各种办法．这些分析与讨论为读者在研究与设计方法时提供依赖．

（七）

严格说来，在本书中讨论问题的方式不完全是传统的数学方法，而有启示性的类比、外推、内插等方法，类比于各种典型问题的知识与类比于相近的研究结果．因此这些讨论的确立应该有实际计算效应的验证．用一些具有解析解、近似解析解、近似特征量或近似数值解的典型问题的计算结果来验证方法的可靠程度．除了这些典型问题结果的比较外，还应把这些方法大量应用于实际模型计算，从而发现潜在的问题，作改进与研究．有过这些经历以后，计算方法与处理方法才算有了基础．

在本书中讨论的主要计算方法与处理方法大都有过典型问题的计算比较，而且在实际应用问题上使用过．因此这些计算方法与处理方法是有过验证的，是可以使用于实际问题的计算的．

由于篇幅的限制，本书中没有提供这些计算方法与处理方法的验证例子与应用例子．这应该算是本书的一个不足之处．

对于通常的二维非定常流体力学运动问题，即使几何结构不是太复杂的情况，计算工作量与数据存贮量都是很大的．对于有一定复杂性的结构，巨型计算机也不会是很宽余的．有些情况，可以不增加总计算量，只在算法上作些改进，就可以提高计算的并行度．但大部分的情况，还是要增加些总计算量，来提高计算的并行度．只有“得”多于“失”，就可以利用计算机中并行部件缩短总计算时间的作用．

在使用多机系统时，一个问题可以分成几块来计算．因此原始问题的计算变成了分块问题计算的一个迭代过程．这样的简单处理，反而会增加计算量与计算时间．如果分块问题本身计算的迭代过程与分块问题的迭代过程组合成一个原始问题的迭代过程，就有可能缩短计算时间．同样对于多指令流系统也需要在算法与程序上的考虑才能发挥机器系统的作用．

多重网格法与网格自动设置等处理方法的应用也可以缩短计算时间与提高程序自动处理的能力．

总之，对于像二维非定常流体力学运动计算，这种大型科学计算课题，应该研究缩短计算时间的问题．越是大型的计算课题，越有潜力发挥并行部件与多指令流系统的作用．

算法与程序的研究在二维非定常流体力学问题计算中的作用也是本书没有涉及到的课题．这是个极为重要的课题，有待来日讨论吧！

周毓麟

引　　言

二维非定常可压缩理想流体力学计算方法的研究开始于五十年代中期.到了六十年代,二维流体力学计算方法的研究进入了一个鼎盛的时期,人们发表了大量的关于计算格式的文章,并编制了许多计算程序. 在六十年代末期 Harlow (1969) 曾经编辑了一个二维流体力学计算方法评述性的目录,列举了一百多篇文献和几十种程序. 二维流体力学计算方法之所以出现这种百花齐放的局面,主要是由于二维流体力学中的运动图象极其复杂,很难构造出一种普遍适用的格式,能定量地(或至少是定性地)确定各种各样的图象来. 事实上,对于不同的模型往往需要采用不同的格式进行计算,有时甚至对于一个运动中的模型的不同发展阶段,还要采用不同的格式,才能把整个运动过程计算出来.

二维流体力学计算方法按其采用 Euler 坐标系还是 Lagrange 坐标系而分为 Euler 方法和 Lagrange 方法两大类.

由于在一维流体力学运动中质团是"有序"的,因而采用拉氏方法是十分有效的. 著名的 von Neumann-Richtmyer (1950) 方法就是 Lagrange 方法. 所以在二维方法研究初期也尝试用 Lagrange 方法来解二维流体力学问题. 五十年代中期 Kolsky(1955) 构造的第一个二维格式是采用了跟踪质团的 Lagrange 方法. Lagrange 方法有它的优点,Lagrange 坐标系中的流体力学方程的形式比较简单,不出现输运项,因而容易建立精确度较高而又稳定的格式. 由于 Lagrange 方法跟踪固定的质团,所以可以用来计算包含多种物质的系统,而且不同物质间的界面也能清晰地表示出来,自由面的处理也很方便. 此外 Lagrange 方法容许在局部区域加密网格,便于得到一些比较精细的物理力学图象. 但是由于二维流体运动中可能出现严重的扭曲现象,因而会造成拉氏网格

相交，以致于计算不能继续下去．尽管如此，对于一些扭曲不太严重的力学模型，Lagrange 方法仍不失为一种有效的方法．因此，在 Kolsky 以后，有不少作者，例如 Goad (1960), Schulz (1964), Wilkins (1964), Fritts, Boris (1979) 等人都对 Lagrange 方法作了进一步的研究，建立了一些格式，并编制了一些程序(例如：MAGEE、TENSOR、HEMP、TOODY 等)．

克服 Lagrange 方法网格相交的一个有效措施是重分网格(见 Browne (1966) 的报告)．这就是每一步(对时间步长而言)或相隔若干步，将 Lagrange 网格重新划分，把由于扭曲而显得畸形的网格换成尽可能规整的新网格．新网格的力学量根据旧网格上的力学量按照质量、动量、能量守恒的原则加以重新计算．当然，这样的 Lagrange 方法，严格说来，已经不再是跟踪流体质团的 Lagrange 方法，而是一种下面要提到的任意方法了．此外，Browne, Wallick (1971) 还对克服 Lagrange 网格相交提出了一系列其它的措施．Crowley (1970) 则把相邻点的概念和重分网格的处理结合起来，形成了"自由 Lagrange 方法"(FLAG方法)．

在 Lagrange 方法中速度离散化以后的值往往取在网格的角点处，这就意味着假定了在网格角点(包括位于接触间断面上的网格角点)处速度是连续的．因此如果不加特殊处理，这样构造的格式是不能表现出接触间断面处滑移现象的．解决这个问题的办法是在接触间断面两侧分别计算不同的切向速度．但是在数值计算中，由于把微分化为差分，曲线用折线近似，所以如果真的在滑移面两侧分别计算切向速度，从而定出角点的位置来，那么就会出现两侧界面合不拢，产生界面分离或渗透的现象．因而 Grandey (1961) 和 Wilkins (1964) 都建议采用"主从界面"的方法，即假定滑移面两侧的物质有一个为"主"，另一个为"从"．(一般以密度大的物质为"主"，密度小的为"从")．界面的运动根据主介质区的压力分布来进行计算，从介质看成是沿一个固定边界在运动．现在有不少 Lagrange 方法的程序，例如 HEMP, TOODY, TENSOR 都包含有滑移面的计算，其处理方法也不完全相同．

早期的 Euler 方法有 Русанов (1961) 的格式和 Rich (1963) 的格式，后者以后发展为 Geutry, Martin. Daly (1966) 的流体网格法 (FLIC 方法). 这种方法在苏联被 Белоцерковский, Давыдов (1971) 称之为“大质点法”. Euler 方法当然不出现网格相交的问题，它适宜于计算扭曲严重的问题. 但是当系统中包含多种物质(包括自由面)的时候，Euler 方法又碰到困难了. 这是因为在流体运动的过程中一定会出现在一个 Euler 网格中含有两种或两种以上物质(下面把这样的网格称为混合网格)的情形. 如果要计算混合网格中的力学量，以及混合网格向周围网格(可能是混合网格也可能不是混合网格)输运的量，就需要特别加以处理.

早期发表的在 Euler 矩形网格上计算多种介质的方法是质点网格法 (PIC 方法). 它的思想和做法对以后许多二维流体力学计算方法都有较深的影响. 关于 PIC 方法的比较完整、全面的总结可见 Harlow (1964) 和 Amsden (1966) 的文章. 在 PIC 方法中流体具有两重性，即一方面把流体看成是连续介质，从而在没有物质输运的情况下计算流场的变化；另一方面又把流体看成是若干个带有一定质量的质点，然后在固定的 Euler 矩形网格上研究这些质点的运动，以及质量、动量和能量的输运. PIC 方法具有一般 Euler 方法所具有的优点，能够计算扭曲比较严重的二维流体力学模型；同时由于引入了相当于 Lagrange 质量团的质点，又避免了一般 Euler 方法的缺点，具有计算多种物质和处理自由面运动的能力. 因而是一种比较成功的方法. 但是由于引进了质点，所以不仅要计算和存贮网格的参量，而且还要计算和存贮质点的参量，因而这种方法对机器的速度和存贮量的要求比较高. 到了六十年代中期，在最初由 Harlow, Welch (1965a) 发表的计算不可压粘性流体力学的标志网格法 (MAC 方法)中，把质点换成了无质量的标志，对计算多种物质的系统很有成效. 这种作法以后发展为只在两种物质界面两侧两三个网格内安放一批代表不同物质的不同的标志. 然后跟踪这些标志来计算混合网格的力学量及其向周围网格输运的量. Harlow, Amsden (1974) 在 GILA 方