

广东省“十三五”高等教育课程体系建设规划教材

XINBIAN JINGJI SHUXUE

新编经济数学

◎刘鹏林 编著

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} = Q'(t_0)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

新编经济数学

刘鹏林 编著

编委：刘鹏林 凌卫平 周 隼
彭雨明 刘忠志



广东高等教育出版社
Guangdong Higher Education Press

· 广州 ·

图书在版编目（CIP）数据

新编经济数学/刘鹏林编著. —广州：广东高等教育出版社，2017.8
ISBN 978-7-5361-5917-4

I. ①新… II. ①刘… III. ①经济数学 IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 128034 号

出版发行	广东高等教育出版社
	地址：广州市天河区林和西横路
	邮政编码：510500 电话：(020) 87553335
	http://www.gdgjs.com.cn
印 刷	佛山市浩文彩色印刷有限公司
开 本	787 毫米×1 092 毫米 1/16
印 张	15.25
字 数	315 千
版 次	2017 年 8 月第 1 版
印 次	2017 年 8 月第 1 次印刷
定 价	32.00 元

数学的贡献在于对整个科学技术（尤其是高新科技）水平的推进与提高，对科技人才的培养和滋润，对经济建设的繁荣，对全体人民的科学思维与文化素养的哺育，这四个方面的作用是极为巨大的，也是其他学科所不能全面比拟的。因此，数学给予人们的不只是知识，最重要的是能力，数学在提高民族的科学和文化水平中处于特殊重要的地位。

——科学家名言

前 言



随着应用型大学的普及和大学各专业的发展创新,经济和管理类专业对微积分的基础性和应用性要求越来越高,相关专业的学生对经济数学的学习需要也越来越迫切。为了适应这种发展的要求和学习的需要,围绕专业基础和专业应用所需要的数学知识、数学思想与方法,结合学生学习实际,我们编著了这本《新编经济数学》。

本教材是以微积分为中心、面向处理经济与管理等方面问题的教科书,是大学经济与管理等专业课程体系的基础。本教材创新了适于自学的知识结构和描述方法,概念清晰、用例巧妙、方法逐次递升、练习简练实用,知识的关联性更加清晰,抽象的数学概念得到淡化,可满足不同层次读者自我学习和深化提高的需要;改革了传统经济数学的物理化描述,在强调数学的思想性和方法性条件下,改微积分的“数学性”目标为“数学应用性”目标,使数学真正融于各专业学习之中。

本教材克服了如下不足:面向专业应用的思想、方法和知识严重不足,在知识的选取、内容的搭配、数学的应用等方面缺乏创新(许多经济数学教材是经典数学的浓缩本),一些过时的实例、烦琐的论证、抽象的概念以及知识结构的矛盾等普遍存在;有些实例及论证(如物理力学问题)远离了经济和管理类专业的需要,增加了学习难度;有的作业范围过泛、过难,没有突出重点,没有凸显应用性。

本教材具有如下特点:

1. 遴选并突出了经济问题或几何问题的实例。
 2. 每节末安排了练习,练习新颖,题量适当,针对性强。
 3. 每章末安排了“自我检测题”,供部分学生进一步深化,自测题中的“讨论题”满足了部分学有余力的学生的学习需要。
 4. 概念的叙述、命题的证明、问题的计算等充分考虑了非数学专业学生的学习实际,凸显了“以学生为中心”的宗旨。
 5. 精简了繁杂的计算步骤,注重解题的思路、计算方法和解题技巧;第十一章“数学实验”专门针对微积分的各种计算,介绍了计算的“语句命令”。
 6. 突出了函数关系(包括多元函数)在经济和管理等问题中的重要性。
 7. 凸显了微积分思想方法,强调了微积分在经济、管理中的有效应用。
- 教材共11章,第一至第十章以微积分为主线,重点突出了微积分的思想和方法,微



积分的知识、计算和原理,微积分在经济和管理等领域中的应用。第十一章介绍了数学软件 MATLAB 的应用——数学实验,全面解决了第一至第十章中微积分的各种运算。其内容包括:算术运算、数组运算、极限和微积分、常微分方程、级数的运算、函数的画图以及数据的简单处理等。在学习第一至第八章时,建议不要涉及第十一章的数学实验,以保障系统的学习和掌握数学的基本知识、基本思想和数学方法,为后续专业学习和终身学习打下良好的基础。相对于微积分,第十一章的内容较为简单,宜安排在微积分的学习结束以后,单独安排时间进行介绍并鼓励学生自学。

参加本教材编写的成员有:刘鹏林(第一至第六章、第八章、第十章)、凌卫平和周隽(第七章)、彭雨明(第九章)、刘忠志(第十一章)、彭莲芳(文字输入、编排、校对、制图),本教材由刘鹏林修改、统稿。

本教材的编写参考了 2010 年刘鹏林主编的《高等数学》(高等教育出版社出版),集中了同仁们多年来的教学研究成果;本教材是广东省教育厅“十三五”规划教材建设项目,得到了广东省教育研究院和广东高等教育出版社的大力支持。在此,一并表示衷心感谢。

刘鹏林
2017 年仲春于广州

目 录



第一章 集合、区间与函数	(1)
1.1 集合、区间及其运算	(2)
练习 1.1	(4)
1.2 函数的基本概念	(4)
练习 1.2	(6)
1.3 复合函数与初等函数	(6)
练习 1.3	(7)
1.4 具有某些特性的函数	(8)
练习 1.4	(9)
自我检测题	(9)
第二章 函数的极限与连续	(12)
2.1 函数极限的概念	(13)
练习 2.1	(15)
2.2 极限的四则运算	(15)
练习 2.2	(17)
2.3 极限的性质和两个重要极限	(17)
练习 2.3	(20)
2.4 无穷大量、无穷小量及其应用	(21)
练习 2.4	(23)
2.5 函数的连续与间断	(23)
练习 2.5	(27)
自我检测题	(28)



第三章 导数与微分	(31)
3.1 导数的概念	(32)
练习 3.1	(33)
3.2 基本初等函数的导数	(34)
练习 3.2	(35)
3.3 导数的几何意义	(35)
练习 3.3	(37)
3.4 函数的可导性与连续性的关系	(37)
练习 3.4	(38)
3.5 导数的运算	(39)
练习 3.5	(40)
3.6 复合函数的求导法则	(40)
练习 3.6	(41)
3.7 隐函数的求导	(41)
练习 3.7	(44)
3.8 初等函数的导数	(44)
练习 3.8	(45)
3.9 高阶导数	(46)
练习 3.9	(47)
3.10 微分的概念	(48)
练习 3.10	(50)
3.11 微分的基本公式及运算	(50)
练习 3.11	(53)
自我检测题	(54)
第四章 微分中值定理与导数的应用	(56)
4.1 微分中值定理及其应用	(57)
练习 4.1	(59)
4.2 洛必达法则	(59)
练习 4.2	(62)
4.3 函数的单调性与极值	(62)

练习 4.3	(66)
4.4 函数的最大值与最小值	(67)
练习 4.4	(69)
4.5 导数在经济分析中的应用	(69)
练习 4.5	(74)
自我检测题	(74)
 第五章 不定积分	(77)
5.1 不定积分的概念及简单运算	(78)
练习 5.1	(81)
5.2 换元积分法与分部积分法	(81)
练习 5.2	(87)
5.3* 有理函数的积分及积分的技巧	(88)
练习 5.3	(93)
自我检测题	(94)
 第六章 定积分	(95)
6.1 定积分的概念	(96)
练习 6.1	(99)
6.2 定积分的性质	(99)
练习 6.2	(102)
6.3 微积分基本公式	(102)
练习 6.3	(104)
6.4 定积分的换元法与分部积分法	(104)
练习 6.4	(107)
6.5 定积分在几何和经济方面的应用	(108)
练习 6.5	(113)
6.6 反常积分	(114)
练习 6.6	(116)
自我检测题	(117)



第七章 多元函数微分学	(119)
7.1 空间解析几何简介	(120)
练习 7.1	(122)
7.2 多元函数	(122)
练习 7.2	(124)
7.3 多元函数偏导数	(124)
练习 7.3	(125)
7.4 高阶偏导数	(126)
练习 7.4	(127)
7.5 偏导数在经济方面的应用	(127)
练习 7.5	(128)
7.6 多元函数求导法则	(129)
练习 7.6	(130)
7.7 全微分	(130)
练习 7.7	(132)
7.8 隐函数的求导公式	(132)
练习 7.8	(133)
7.9 二元函数的极值	(133)
练习 7.9	(135)
自我检测题	(135)
第八章 多元函数积分学	(137)
8.1 二重积分	(138)
练习 8.1	(140)
8.2 直角坐标系中二重积分的计算	(140)
练习 8.2	(144)
8.3 极坐标系中二重积分的计算	(145)
练习 8.3	(148)
自我检测题	(148)

第九章 无穷级数	(150)
9.1 常数项级数的概念及性质	(151)
练习 9.1	(154)
9.2 正项级数的概念、性质及审敛法	(154)
练习 9.2	(157)
9.3 任意项级数的敛散性	(158)
练习 9.3	(159)
9.4 幂级数	(160)
练习 9.4	(164)
9.5 函数展开成幂级数	(165)
练习 9.5	(167)
自我检测题	(168)
第十章 常微分方程	(170)
10.1 基本概念	(171)
练习 10.1	(172)
10.2 一阶微分方程	(172)
练习 10.2	(175)
10.3 可降阶的二阶微分方程	(176)
练习 10.3	(177)
10.4 二阶线性微分方程	(178)
练习 10.4	(185)
自我检测题	(185)
第十一章 数学实验	(187)
11.1 MATLAB 简介	(188)
练习 11.1	(189)
11.2 用 MATLAB 求极限	(190)
练习 11.2	(190)
11.3 用 MATLAB 求导数	(191)
练习 11.3	(192)



11.4	用 MATLAB 作一元函数图形	(192)
	练习 11.4	(195)
11.5	用 MATLAB 求解积分	(195)
	练习 11.5	(199)
11.6	用 MATLAB 求解普通方程、微分方程	(200)
	练习 11.6	(202)
11.7	用 MATLAB 作空间曲面图形	(202)
	练习 11.7	(208)
11.8	用 MATLAB 求偏导数	(208)
	练习 11.8	(211)
11.9	用 MATLAB 求二重积分	(211)
	练习 11.9	(212)
11.10	用 MATLAB 求解级数和	(212)
	练习 11.10	(213)
11.11	数组处理举例	(214)
	练习 11.11	(216)
参考答案		(217)

第一章



集合、区间与函数

函数是客观事物变化的模型，是微积分研究的主要对象，是各专业学习的基础。函数、极限、微积分的研究，都基于变量的变化和变化的范围，集合和区间就是基于这种变化的需要，成为函数、极限、微积分研究的重要组成部分。



1.1 集合、区间及其运算

集合和区间的重要功用是表示函数的变化范围,因此,学习好集合、区间及其运算是学好函数的前提。

1.1.1 集合及其运算

集合的描述性定义:集合是某些具有确定性质的对象构成的整体。即是说,集合是一个整体,这个整体内的对象是确定的。所谓“确定”,就是集合内的对象可以一一写出来,或可以明白地、无歧义地把对象的性质表示出来。

构成集合的对象称为元素,用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示,集合用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示,习惯上,用 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集。

元素与集合的关系:是“属于”或“不属于”的关系,用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”表示。例如:

$a \in A$, 表示 a 是集合 A 的元素; $a \notin B$, 表示 a 不是集合 B 的元素。

集合的描述有两种方法:列举法、描述法。

(1) 列举法:就是将集合的元素在大括号内不重复一一列举出来的方法。例如:

自然数集可以表为 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;

$\sin x$ 或 $\cos x$ 的最值构成的集合 $A = \{1, -1\}$;

方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的解集为 $F = \{-1\}$;

数轴上 -0.5 与 0.5 之间的整数集 $C = \{0\}$ 。

(2) 描述法:就是将集合的元素性质在大括号内表示出来的方法。例如:

方程 $x^2 + 2x + 2 = 0$ 的实数解为 $S = \{x | x^2 + 2x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$;

平面上单位圆内的点集为 $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$;

产品销售前所获的利润构成的集 $L = \{\text{某产品销售前所获的利润}\}$ 。

含有有限个元素的集合称为有限集,如: A, F, C, L ;

含有无限个元素的集合称为无限集,如: N, B ;

没有元素的集合称为空集,用“ $\emptyset$ ”表示,例如: $S = \emptyset$, 数轴上 -0.5 与 0.5 之间的正整数集是空集 $\emptyset$ 。

集合之间的关系有包含、包含于和相等,分别用 $\supseteq, \subseteq$ 和 $=$ 表示,例如: $A \supseteq F, C \subseteq N, C = L$, 称 F, C 分别是 A, N 的子集, C 和 L 互为子集。

约定:空集是任何集合的子集。

集合的运算包括并运算、交运算、差运算,运算符号分别为 $\cup, \cap, -$, 运算后分

别形成的集合称为并集 $A \cup B$ 、交集 $A \cap B$ 、差集 $A - B$ ，其中

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}, A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ ，若 I 是全集，则记 $I - A$ 为 $\bar{A}$ ，称为 A 的补集（也简称为 A 的补），集合的运算示意图（图 1-1，图中的阴影部分）为：



图 1-1 集合的运算示意图

集合运算的有关性质：

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- (2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- (3) 分配率 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,
 $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$.
- (4) 等幂律 $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
- (5) 吸收率 $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.
- (6) 摩根律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1.1.2 区间及其运算

区间是常见的数集，即数轴上某一段的实数集。

设 $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ ，则区间有如下几种形式：

数集 $\{x | a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$ 称为开区间，记为 (a, b) ；

数集 $\{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$ 称为闭区间，记为 $[a, b]$ ；

数集 $\{x | a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$ 和 $\{x | a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$ 称为半开半闭区间，分别记为 $(a, b]$ 和 $[a, b)$ 。

区间的始、终实数 a, b 称为端点值，由于 a, b 是有限值，上述区间均称为有限区间。

下面的区间为无限区间：

$$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}, (-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\},$$

$$(a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\}, [a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\},$$

$$(-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\}.$$

因为区间是集合，所以区间的运算就是集合的运算，例如：

$$(1, 3] \cup [2, 4] = (1, 4], (1, 3] \cap [2, 4] = [2, 3],$$

$$(1, 3] - [2, 4] = (1, 2), [1, 4] - (2, 3) = [1, 2] \cup [3, 4].$$



区间直观地反映了数集的范围和区间的长度 $(b-a)$. 在后续学习中, 用区间表示函数的定义域、值域和微积分变量的变化范围, 都给问题的分析与研究带来极大的方便.

练习 1.1

1. 下列集合中, 哪些集合是空集? 哪些集合相等? 哪些集合有包含关系?

(1) $A = \{x | x = 2y, y \in \mathbf{Z}\}$; (2) $B = \{2\}$; (3) $C = \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 = 1\}$;

(4) $D = \{x | x < 3 \text{ 且 } x \text{ 为素数}\}$; (5) $E = \{x | x \in \mathbf{Q} \text{ 且 } x^2 = 2\}$.

2. 试判断以下关系式的正确性.

$a \in \{a\}, A = \{A\}, \varphi = \{0\}, \varphi \subseteq \{a\}, \{1, 2\} \neq \{2, 1\}$

3. 小明、小李所购物品汇集为 A 、 B 两集, $A = \{\text{钢笔、笔记本、作业本、洗衣粉、毛巾、拖把、拖鞋}\}$, $B = \{\text{脸盆、牙刷、茶杯、洗衣粉、毛巾、拖把、拖鞋、雨伞}\}$, 试求 $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$.

4. 试将 $A = \{x | 0 < |x - 1| < 2\}$ 表示成区间形式.

1.2 函数的基本概念

函数是事物之间的一种数量关系, 若用符号 x, y 表示事物间的两个量, 则函数就是 x, y 之间的关系. 函数也称为数学模型, 关系即单值对应关系.

例 1 “表 1-1” 是某商店销售冰棒的“销售需求表”, 表中记录了冰棒的价格 y 与销售数量 (需求量) x 的对应关系. 根据表 1-1 可以画出“消费者对冰棒的需求示意图” (图 1-2), 其中 x, y 满足表达式 (或称解析式、公式) $y = \frac{30}{x}$. 这里的需求表、示意图、表达式都给出了 x, y 的对应法则 (反映了价格 y 与销售量 x 之间的相互关系), 因而都是函数. 图 1-2 的曲线在经济学上称为“需求曲线”或“需求函数”.

表 1-1 冰棒销售需求表

价格 y	0.5	0.75	1.5	2	3
需求量 x	60	40	20	15	10

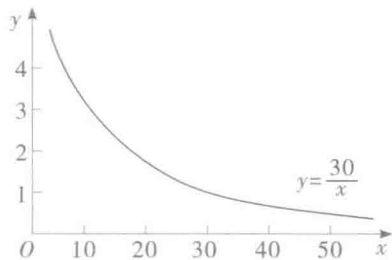


图 1-2 消费者对冰棒的需求示意图

例 1 中, 函数的三种表示方法分别称为列表法、图示法和解析法 (或公式法). 它们各有优点, 列表法数据可靠, 问题直观; 图示法反映了数量之间的变化趋势, 便于发现问题; 解析法逻辑性强, 便于数值运算和问题分析.

例1中,函数的两个量 x, y 的变化是有范围的(如 $x \neq 0$, 价格 y 是固定的几个数),这两个范围分别称为定义域和值域. 当对应法则或解析式给定后,值域就被定义域所确定. 定义域和值域由实数构成,如:区间、集合. 下面给出函数的一般定义:

函数的定义: 设 D 为非空实数集, 如果 D 内每一个 x , 通过对应法则 f , 都有唯一的一个实数 y 与之对应, 则称 f 为定义在数集 D 上的(一元)函数, 或称 y 是 x 的(一元)函数, 记作

$$y = f(x), x \in D$$

D 称为定义域, x, y 分别称为自变量和因变量. y 也称为函数值, 所有函数值构成的集合称为值域.

函数反映了量与量之间的对应关系, 其本质是单值对应.

根据定义, 定义域和对应法则是确定一个函数的两个要素. 因此, 两个函数相同, 则这两个函数的定义域和对应法则必须相同.

例2 下列各对函数中, 哪对函数是相同函数?

- (1) $y = \sqrt{x^2}, x \in [0, +\infty)$ 与 $P = Q, Q \in [0, +\infty)$;
- (2) $f(x) = \ln x^2, x \in (-\infty, 0)$ 与 $g(x) = 2 \ln x, x \in (0, +\infty)$;
- (3) $f(x) = 1, x \in (0, +\infty)$ 与 $g(x) = 1, x \in [0, +\infty)$.

解 (1) 中的两个函数, 定义域相同, 对应法则也相同, 是同一个函数; (2) 与 (3) 中的两个函数, 定义域不相同, 都不是同一个函数.

用解析法表示函数时, 函数的定义域可以不写, 这时, 函数的定义域就是使解析式有意义的自变量的集合.

有些函数在其定义域内的不同部分用不同的式子表达, 这类函数称为分段函数.

例3 将函数 $f(x) = |\sin x - \cos x|, x \in [0, \pi]$, 化为分段函数.

解 由正弦、余弦函数的图象(图1-3), 即得

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \sin x - \cos x, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right] \end{cases}$$

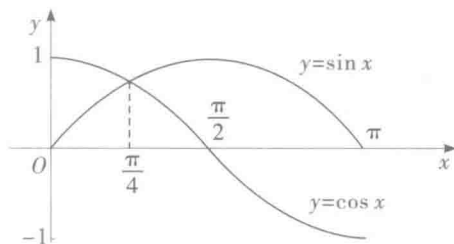


图1-3 正弦、余弦函数的图象