同济大学本科教材出版基金资助

高等数学典型例题分析

同济大学数学科学学院 编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

高等数学典型例题分析

同济大学数学科学学院 编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是以同济版《高等数学》(第七版)为蓝本编写的学习辅导书，全书共分 11 章，内容包括：一元函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程及其应用、向量代数空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数. 每章内容包括内容提要、例题、思考题三部分. 内容提要给出相关的概念、定理和公式. 例题注重对解题思想、解题方法的分析和总结，培养学生的数学思维. 思考题帮助读者巩固、拓展所学数学知识.

本书例题典型，覆盖面广，解题方法清晰完整，解题思路分析透彻，归纳总结全面. 本书可作为高等学校大学数学课程的教学参考书、习题课教材，以及考研复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型例题分析 / 同济大学数学科学学院编. -- 上海：同济大学出版社，2018.1
ISBN 978-7-5608-7745-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①同… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 023828 号

高等数学典型例题分析

同济大学数学科学学院 编

策划编辑 张 莉 **责任编辑** 李小敏 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www. tongjipress. com. cn
(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 上海同济印刷厂有限公司
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 11.75
字 数 235 000
版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-7745-7

定 价 38.00 元

前　言

高等数学是各理工科专业的一门重要基础课，对于许多后续课程的学习乃至科学思维的训练都起到非凡的作用。在长期的教学实践中，我们深深地体会到：如何灵活运用所学的知识去分析问题、解决问题，对每个学生来说都至关重要，针对考研以及近年来热度越来越高的数学竞赛，我们在多年教学经验的基础上，选取了考研真题、国内外数学竞赛题以及一些综合性的例题、习题编写了这本书，目的是为了帮助学生巩固、加深、拓展所学数学知识，培养学生的数学思维，从而提高分析问题、解决问题的能力。我们力图使学生不仅知道这些题目怎样求解，而且要了解解题的思维过程。

本书以同济版《高等数学》教材为蓝本，借鉴了《高等数学习题精编》等教辅丛书，基本按照教材的内容展开。其中，方小春编写了第1，2，3章，项家樑编写了第4，5章，张弢编写了第6，7章，周朝晖编写了第8章，姚勤编写了第9，10章，黄长水编写了第11章，全书由周朝晖进行总纂定稿。

在编写过程中，得到了徐建平教授的大力支持，李少华、刘庆生和张华隆教授，做了大量的前期准备工作，提供了大量详实的资料，同济大学出版社张莉和李小敏老师在本书的出版过程中给予了极大的支持，对他们以及我们所选题目的作者，在此一并表示诚挚的感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不当或错误之处，恳请广大读者和同行批评指正！

编者

2018年1月

目 录

1　一元函数与极限

1.1　内容提要

1. 一元函数

（1）函数

设 $\mathbf{R}$ 是实数集. 一个数集 $D(D\subset\mathbf{R})$ 到实数集的映射称为数集 D 上的**函数**，即对每个 $x\in D$，有唯一的实数 y 与之对应.

（2）函数的单调性、奇偶性、有界性与周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对应区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2)\ \ (f(x_1)>f(x_2)),$$

称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**单调增加（减少）函数**. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

注　函数单调与否，既和表达式有关又与所给的区间有关.

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对于 D 中任意的 x，总有

$$f(-x)=-f(x)\ \ (f(-x)=f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 是定义域 D 上的**奇（偶）函数**.

注　奇（偶）函数的图形关于原点（y 轴）对称.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，集合 $D'\subset D$. 若存在正数 M，使得对于 D' 中的任意数 x，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 为 D' 上的**有界函数**,否则称 $f(x)$ 为 D' 上的**无界函数**.

注 无界函数的特征:对任意正数 $M>0$,一定存在 $x'\in D'$,使得

$$|f(x')|>M.$$

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意的 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 是函数 $f(x)$ 的**周期**.

注 函数的周期通常指的是最小正周期.但是,一个周期函数可能不存在最小正周期!

(3) 基本初等函数

基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

(4) 反函数与复合函数

设函数 $f(x)$ 是 D 到 $D'=f(D)$ 的 1-1 映射,即对于任意的 $y\in D' f(D)$,存在唯一的 $x\in D$,使得 $y=f(x)$,由此建立了数集 D' 到 D 的函数 $x=g(y)$,满足 $y=f(x)$. 这样的函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$.

注 习惯上我们总是将因变量记为 y,而以 x 表示自变量,相应的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$. 此时函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 关于 $y=x$ 对称.

设函数 $u=f(x)$ 是数集 D_1 到数集 D_2 的函数,而函数 $y=g(u)$ 是数集 D_3 到 D_4 的函数,又 $D_2\subset D_3$,通过变量 u(u 称为中间变量)确定了数集 D_1 到数集 D_4 的函数,该函数简记为

$$y=g[f(x)].$$

称此函数为由函数 $u=f(x)$ 与函数 $y=g(u)$ 构成的**复合函数**.

(5) 初等函数

把常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合步骤所构成的并可以用一个算式表示的函数称为**初等函数**.

(6) 隐函数

一个函数如果它的自变量 x 和因变量 y 的对应关系是由一个方程 $F(x, y)=0$(其中 $F(x, y)$ 是一个二元函数)所确定,称函数的这样表示为**隐性表示**,为方便起见,称这样表示的函数为**隐函数**.

(7) 分段函数

一个函数如果它的定义域被分解成互不相交的若干个子集之并，其对应关系分别在各个子集上给出，称函数的这种表示为**分段表示**. 为方便起见，称这样表示的函数为**分段函数**.

2. 极限

(1) 数列的极限

设数列 $\{x_n\}$，若有常数 a，使得对于任意的正数 ε，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有

$$| x_n - a | < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 以 a 为**极限**，或称数列 $\{x_n\}$ **收敛到常数** a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a;$$

若这样的常数 a 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 是**发散**的.

注 按定义证明数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限的基本方法是，对于给定的正数 ε，去寻找满足关系 $| x_n - a | < \varepsilon$ 的 n.

(2) 函数的极限

① 函数在有限点处的极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，使得对于任意的正数 ε，存在正整数 δ，当 $0 < | x - x_0 | < \delta$ 时，有

$$| f(x) - A | < \varepsilon,$$

则称**常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 的极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

② 自变量趋于无穷大时函数的极限

设函数 $f(x)$ 当 $| x |$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，使得对于任意的正数 ε，存在正整数 X，使得当 $| x | > X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足

$$| f(x) - A | < \varepsilon,$$

则称**常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 的极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

(3) 单侧极限

① 自变量趋于有限值时的单侧极限

在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 定义中，$x\to x_0$ 的要求改为当 $x\to x_0$ 且 $x<x_0$ 时，所得到的极限称为**函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

同样，定义**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的右极限** $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

② 自变量趋于无穷大时函数的单侧极限

在极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 定义中，将 $x\to\infty$ 的要求改为当 $x\to\infty$ 且 $x<0$，所得到的极限称为**函数 $y=f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的单侧极限**，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

同样，定义**函数 $y=f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时函数 $y=f(x)$ 的单侧极限** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

③ 关系

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

(4) 函数极限性质

① **极限的唯一性** 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，则极限唯一.

② **局部有界性** 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，则存在点 x_0 的某个去心邻域，函数在该邻域内有界.

③ **局部保号性** 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，且 $A>0$，则存在点 x_0 的某个去心邻域，函数在该邻域内总有 $f(x)>0$.

④ **归并性** 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，则对于任一收敛到点 x_0 且异于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，总有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

注意这些性质在数列极限中的表现形式.

3. 极限运算法则

极限的四则运算法则 设 $\lim\limits_{x} f(x)=A$，$\lim\limits_{x} g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x}[f(x)g(x)]=AB$;

(3) $\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

复合函数的极限运算法则 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=u_0$，且存在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有 $f(x)\neq u_0$；又 $\lim\limits_{u\to u_0}g(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}g[f(x)]=A.$$

结论 设 $f(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$，则

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

4. 两个重要法则与两个重要极限

(1) **夹逼准则**

设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域中满足：

① $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$；

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$.

注意该准则在数列中的表现形式.

重要极限 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

变形 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$.

(2) **单调有界准则**

设数列 $\{x_n\}$ 单调有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

重要极限 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

变形 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x+a}\right)^x=\mathrm{e}^k$.

针对类型 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{cx+d}$；$1^\infty$.

熟记下列极限：

① $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1$（$k$ 为任意常数）； ② $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$；

③ $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$； ④ $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln^\alpha x=0(\alpha>0)$；

⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^\alpha x}{x}=0$； ⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^x}=0$；

⑦ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$.

5. 无穷小与无穷小的阶

(1) 无穷小与无穷大

若 $\lim f(x)=0$，则称变量 $f(x)$ 是自变量 x 在某个变化过程中的**无穷小量**；若 $\lim f(x)=\infty$，则称变量 $f(x)$ 是自变量 x 在某个变化过程中的**无穷大量**.

(2) 无穷小的阶

设 α，β 为自变量 x 在某个变化过程中的无穷小，若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是 β 的**高阶无穷小**，记为 $\alpha=o(\beta)$；若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=k(\neq0)$，则称 α 是 β 的**同阶无穷小**，同阶无穷小又记为 $\alpha=O(\beta)$；若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是**等价无穷小**，记为 $\alpha\sim\beta$.

注 无穷小阶的比较是考试中的重要内容之一.

(3) 等价无穷小

等价无穷小有下列基本性质：

设 α，β，γ 均为自变量在某个变化过程中的无穷小量，则

① **自身性** $\alpha\sim\alpha$；

② **对称性** 若 $\alpha\sim\beta\Rightarrow\beta\sim\alpha$；

③ **传递性** 若 $\alpha\sim\beta$ 且 $\beta\sim\gamma\Rightarrow\alpha\sim\gamma$；

④ **等价无穷小替换准则** 若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$ 也存在，且 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

注 等价无穷小代换只能用于乘法与除法，在加减法过程中不能轻易使用.

熟记下列几组基本等价无穷小形式.

当 $x\to0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$；

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2;\quad a^x-1\sim x\ln a;\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x;$$

$$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3;\ x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3;\ \tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3.$$

注 上面极限中,可以将 x 改为任意的无穷小.

要点:使用等价无穷小简化极限计算.

6. 利用洛必达法则求极限

(1) 基本形式 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

法则:$\lim\limits_{x}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

注 该法则是充分条件.

(2) 变形 $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0

对于幂指函数类型,常用的方法是取对数后再求极限,最后还原.

尤其要注意 1^∞ 形式的极限及基本解法.

7. 利用带佩亚诺型余项的泰勒多项式求极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有 n 阶的导数,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n].$$

注 使用带佩亚诺型余项的泰勒展开式,要根据表达式确定展开式的阶数.

8. 利用定积分求极限

连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的定积分表现为和式的极限

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right),$$

此时,可以用定积分来求和式的极限.用此方法求极限的要点是寻找相应的函数.

9. 连续函数与间断点的分类

(1) 连续性的定义

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**;若函数 $f(x)$ 在定义域 D 中点点连续,称函数 $f(x)$ 是 D 上的**连续函数**.

结论 初等函数在定义区间内为连续函数.

(2) 间断点与间断点的分类

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续,则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**间断点**.

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**可去间断点**；若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**，可去间断点与跳跃间断点构成函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**，其他间断点称为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

10. 闭区间上连续函数的性质

(1) **有界性定理**

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(2) **最大值最小值定理**

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 可在区间 $[a, b]$ 上取到相应的最大值与最小值，即存在 x' 和 x'' $(x', x'' \in [a, b])$，使得

$$f(x') = \max_{x\in[a, b]} \{f(x)\}$$

及

$$f(x'') = \min_{x\in[a, b]} \{f(x)\}.$$

(3) **零点定理**

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数且 $f(a)f(b) < 0$，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f(\xi) = 0.$$

(4) **介值定理**

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，M 和 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值，任取 μ 且 $m \leqslant \mu \leqslant M$，则存在 $\xi \in [a, b]$，使得

$$f(\xi) = \mu.$$

***11. 实数理论**

(1) Cauchy 数列

设数列 $\{x_n\}$，若对于任意的正数 ε，存在正整数 N，当 $m, n > N$ 时，有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy **数列**.

Cauchy 收敛原理　Cauchy 数列是收敛的.

致密性定理 有界数列都有收敛的子列.

单调有界定理 单调有界数列必有极限.

(2) 确界原理

设 A 为一个实数集合,如果 β 是 A 的上界,即满足 $\beta \geqslant x(\forall x \in A)$,且对任意的正数 ε,如果都存在 A 中的元 y,使得 $y > \beta - \varepsilon$,那么称 β 为 A 的**上确界**.类似可以定义 A 的**下确界**.

确界原理 有上界的数集有上确界,有下界的数集有下确界.

(3) 区间套定理

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一闭区间序列.若满足条件

(i) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n = 1, 2, \cdots$,

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$,

则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 为**闭区间套**,简称为**区间套**.

区间套定理 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一闭区间套.则在实数系中存在唯一的点 ξ,使得

$$\xi \in [a_n, b_n], \ n = 1, 2, \cdots.$$

即

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n, \ n = 1, 2 \cdots.$$

(4) 有限覆盖定理

设 S 为数轴上的点集,H 为开区间的集合(即 H 的每一个元素都是形如 (α, β) 的开区间).若 S 中任何一点都含在 H 中至少一个开区间内,则称 H 为 S 的一个**开覆盖**,或称 H **覆盖** S.若 H 中开区间个数是有限(无限)的,则称 H 为 S 的**有限(无限)开覆盖**.

有限覆盖定理 设 H 为闭区间 $[a, b]$ 的一个(无限)开覆盖,则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a, b]$.

(5) 等价定理

下列事实等价:

(a) 确界原理;

(b) 单调有界定理;

(c) 区间套定理;

(d) 有限覆盖定理;

(e) 致密性定理;

(f) Cauchy 收敛原理.

(6) 实数定义的简介

下面先假设已经有了有理数,在此基础上定义实数.

设有理数数列 $x=\{r_n\}$,若对于任意的有理正数 ε,存在正整数 N,当 m, $n>N$ 时,有

$$|r_n-r_m|<\varepsilon,$$

则称数列 $x=\{r_n\}$ 为 Cauchy **有理数列**.

对 $x=\{r_n\}$, $y=\{s_n\}$,令

$$x\pm y=\{r_n\pm s_n\}(\forall n),$$

$$x\times y=\{r_n\times s_n\}(\forall n),$$

$$x\div y=\{r_n\div s_n\}(\forall n,\ |s_n|>\varepsilon>0),$$

易知上面定义的结果仍然是 Cauchy 有理数列.

设有理数数列 $z=\{r_n\}$,若对于任意的有理正数 ε,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有

$$|r_n|<\varepsilon,$$

则称数列 $z=\{r_n\}$ 是**极限为零的有理数列**,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$.

显然极限为零的有理数列是 Cauchy 有理数列.

令 $Z=\{z=\{r_n\}\mid \lim\limits_{n\to\infty}r_n=0\}$, $[x]=\{x+z\mid z\in Z\}$,

称 $[x]$ 为 Cauchy **有理数列** x **的等价类**.注意到 $[x]=[x+z]$,所以 $[x]$ 与数列 $x=\{r_n\}$ 的任意前有限项无关.

则**实数全体 R** 定义为所有 Cauchy 有理数列的等价类构成的集合.

进一步,定义 **R** 上的四则运算为:

$$[x]\pm[y]=[x\pm y],$$

$$[x]\times[y]=[x\times y],$$

$$[x]\div[y]=[x\div y],$$

等同有理数 r 与 $[x]$,其中 $x=\{r_n\}$, $r_n\equiv r$.

$\mathbf{R}^+=\{[x]\mid x=\{r_n\},\ r_n\geqslant 0\}\subseteq\mathbf{R}$ 且 $[x]\leqslant[y]$ 当且仅当 $[y]-[x]\in\mathbf{R}^+$,

$[x]<[y]$ 当且仅当 $[x]\leqslant[y]$ 且 $[x]\neq[y]$.

思考题:

(i) 上面的定义是合理的,即不依赖于集合 $[x]$ 和 $[y]$ 中有理数列的选取.

(ii) 在上面实数定义之下,我们熟知的运算法则(结合交换分配律)都成立.

(iii) 在上面实数定义之下,前述的 6 个有关实数的等价定理是成立的.

***12. 函数一致连续与闭区间上连续函数性质**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 若对于任意的正数 ε, 存在正数 δ, 当 $0<|x_1-x_2|<\delta$ 且 $x_1, x_2\in D$ 时,有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

称函数 $f(x)$ 在 D 上的**一致连续**.

开区间 $(0, 1)$ 上定义的函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上连续但不一致连续.

闭区间上连续函数一定在此闭区间上一致连续.

开区间上连续函数在此开区间上一致连续的充要条件是在这个开区间的两个端点的单侧极限存在.

***13. 函数列一致收敛**

设函数 $f(x)$ 和函数列 $f_n(x)$ 的定义域都为 D. 若对于任意的正数 ε, 存在正整数 N, 当 $n>N$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon(\forall x\in D), \text{等价地} \sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

称 $f_n(x)$ 在 D 上**一致收敛**到函数 $f(x)$.

函数列一致收敛性往往用于研究函数列关于 $n\to\infty$ 的极限运算,分别与关于 x 的极限运算、求积分运算、求导运算之间是否可以交换顺序.

***14. 数列的 stolz 定理等其他求数列与函数极限的技巧**

(1) **Stolz 定理**

设数列 $\{y_n\}$ 严格单调. $y_n\to+\infty$, 或者 $y_n\to 0$ 且 $x_n\to 0$,

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=a$ (其中 a 为有限, $+\infty$ 或者 $-\infty$).

(2) 求数列极限其他技巧方法

利用递推关系式和单调有界定理求数列极限:判断极限存在然后利用递推归纳式求出极限,或者利用递推归纳式求出可能的极限然后由此证明极限存在.

复合函数求极限定理.