国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

RAMSEY THEOREM

# Ramsey定理

刘培杰数学工作室　编译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

RAMSEY THEOREM

# Ramsey定理

刘培杰数学工作室 编译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

本书主要介绍了拉姆塞的基本理论，拉姆塞数，并论述了组合学家、图论学家、概率学家、计算机专家眼中的拉姆塞定理及拉姆塞数，最后讨论了拉姆塞定理的应用与未来.

本书可供从事这一数学分支相关学科的数学工作者、大学生以及数学爱好者研读.


**图书在版编目(CIP)数据**

Ramsey定理/刘培杰数学工作室编译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.1
(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)
ISBN 978－7－5603－6688－3

Ⅰ.①R… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①组合数学
Ⅳ.①O157

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第136901号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘立娟
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张24.25 字数269千字
版　　次 2018年1月第1版 2018年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978－7－5603－6688－3
定　　价 88.00元


---

## 代序

### 读书的乐趣

**你最喜爱什么——书籍.**

**你经常去哪里——书店.**

**你最大的乐趣是什么——读书.**

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量．书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉．失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理．浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭．吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主．

## 潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会．大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工．一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了．屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看．封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》．管它呢，且往下看．第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪．

三岁孩童千两价，保主跨海去征东．

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）．那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字．这是我有生以来独立看的第一本书．尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

## 抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

## 始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

## 丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

## 读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物. 涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此. 曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人. 他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

# 目录

# 第1章 问题的提出

## §1 从一道冬令营试题的背景谈起

1986年年初全国冬令营的竞赛试题中有下题：

用任意方式给平面上每点染上黑色或白色，求证：一定存在一个边长为1或$\sqrt{3}$的正三角形，它的三个顶点是同色的.

试题及解答均见《数学通讯》1986年第5期.

武汉大学数学系的樊恽教授介绍了与此题有关的问题及背景.

**1. 直线上的问题**

为简单起见，当用$r$种颜色对集合$A$中的每点着上$r$种颜色之一时，称$A$为$r$－着色.

给直线 2－着色，那么当然总存在两点同色. 这太容易了. 因而对所求两点无任何其他要求. 考察直线上顺次相距 1 的三点 $A,B,C$(图 1)，会发现，2－着色直线上可找到相距 1 或 2 的两点同色. 如果限制更强，在 2－着色直线上是否总能找到相距 1 的两点同色呢？答案是否定的(图 2). 我们给出一种着色法如下：在坐标直线上给任意点 $x$，当$[x]$为偶数时，着上黑色；当$[x]$为奇数时，着上白色. 这里$[x]$表示数 $x$ 的整数部分. 那么任意两个相距 1 的点必落在不同色的区间. 我们得到了下述命题：

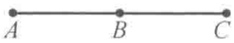


图 1

**命题 1**　在 2－着色直线上恒存在相距 1 或 2 的同色两点；但有这样的 2－着色直线，其上不存在相距 1 的同色两点.

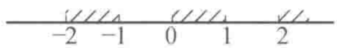


图 2

考虑三点时则有：

**命题 2**　在 2－着色直线上恒存在成等差数列的三点同色.

**证明**　如图 3，取 $A,B$ 同色，不妨设为黑. 若 $AB$ 的中点为黑，则已获证. 不妨设 $C$ 为白，取 $D,E$ 使 $DA=AB=BE$. 若 $D,E$ 中有黑，比如 $D$，则 $D,A,B$ 同为黑；若 $D,E$ 均为白，则 $D,C,E$ 同为白.


图 3

与命题 2 有关的一个惊人的近代结果是：

**范·德·瓦尔登(van der Waerden)定理**　设 $r,l$ 是任意自然数. 若对整数集 $r$－着色，则恒可找到 $l$ 个同色的整数构成等差数列.

2. **平面上的问题**

在 2－着色平面上任取边长为 1 的正 $\triangle ABC$，由抽屉原理马上知 $A,B,C$ 三点中至少有两点同色.

进一步可给出更强的命题如下：

**命题 3**　在 3－着色平面上，必有相距 1 的两点同色.

**证明**　如图 4，取共一边的两个边长为 1 的正 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC$，再绕点 $A$ 将两个三角形旋转成四边形 $AB'A''C'$，使 $A'A''=1$. 若 $A,B,C$ 中无两点同色，则不妨设三点分别着 $a$ 色、$b$ 色及 $c$ 色. 若 $A'$ 着 $b$ 色或 $c$ 色，则相距 1 的同色两点已找到，故可设 $A'$ 着 $a$ 色. 同理，若 $A''$ 不着 $a$ 色，则相距 1 的同色两点已找到. 若 $A''$ 着 $a$ 色，则 $A'$，$A''$ 即是相距 1 的同色两点.

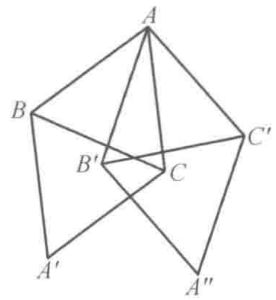

图 4

**习题 1**　有这样的 7－着色平面，其上不存在相距 1 的同色两点.（提示：用直径为 1 的正六边形覆盖平面.）

对 4，5，6－着色平面，类似问题的答案尚不知.

以下为简便，称三顶点同色的三角形为单色三角形.

**命题 4**　在 2－着色平面上存在边长为 1 或$\sqrt{3}$ 的单色三角形；但有这样的 2－着色平面，其上不存在边长为 1 的单色三角形.

**证明**　前一断言即是本节开头引的试题，已指出查找其证明的地方. 对后一断言，我们类似于命题 1，构造一

个 2－着色坐标平面如下(图 5). 对平面上任意点$(x,y)$，若$\left[\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]$为偶数，则着上黑色；若$\left[\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]$为奇数，则着上白色. 那么任意边长为1的正三角形的三顶点不会同落入同色区域(为什么？请读者证明，这是一个很好的几何练习).

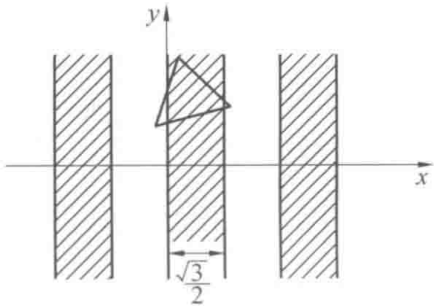

图 5

现在可以给出一个很强的也很有意思的结果.

**命题 5** 设 $T_1$，$T_2$ 是两个三角形，$T_1$ 有一边长为 1，$T_2$ 有一边长为$\sqrt{3}$. 将平面 2－着色，则恒可找到一个全等于 $T_1$ 或 $T_2$ 的单色三角形.

**证明** 按命题 4 可找到边长为 1 或$\sqrt{3}$ 的正 $\triangle ABC$，其顶点同色，不妨设为黑色. 如 $AB=1$，构造如图 6 的图形使四边形 $BCEF$ 是平行四边形，$\triangle ABC$，$\triangle CDE$，$\triangle EFG$，$\triangle BFH$ 都是正三角形，且使 $\triangle ACD$ 全等于三角形 $T_1$，那么图中共有六个三角形：$\triangle ACD$，$\triangle ABF$，$\triangle BCH$，$\triangle GFH$，$\triangle GEC$，$\triangle FED$，它们都全等于三角形 $T_1$. 若前三个三角形都不是单色三角形，则推出 $D$，$F$，$H$ 全为白色，那么无论 $E$，$G$ 是什么色，在后三个三角形中就总会出现单色三角形.

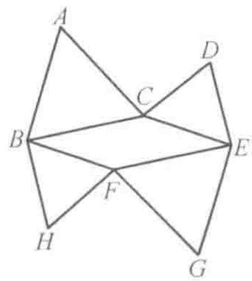

图 6

如果 $AB=\sqrt{3}$，显然可按同样的方法证明有一单

色三角形全等于三角形 $T_2$.

一个有趣的推论：

**推论**　若三角形 $T$ 有两边分别为 1 与 $\sqrt{3}$，则在 2－着色平面上可找到一个全等于 $T$ 的单色三角形.

以上内容基本上取材于著名数学家爱尔迪希(P. Erdös)等四人于 1973 年发表于《组合论杂志》的一篇文章(见 *Journal of Combinatorics Theory*(A 系列)，14 卷(1973 年)341 ～ 363 页)的部分例子. 针对以上内容(读者可将命题 4 与推论对照)，他们有两个猜想：

**猜想 1**　设 $T$ 是一个给定的三角形，只要 $T$ 不是正三角形，在任何 2－着色平面上就一定可找到全等于 $T$ 的单色三角形.

**猜想 2**　在 2－着色平面上，若不存在边长为 $d$ 的单色正三角形，则对任意 $d' \neq d$，可找到边长为 $d'$ 的单色正三角形.

但是，若把条件"全等"放宽为相似，则结论很好. 著名的 Gallai 定理断言："对任意自然数 $m$，$r$，设 $G$ 是平面上 $m$ 个点构成的几何图形，则在任意 $r$－着色平面上可找到 $m$ 个单色点，它们构成的图形相似于 $G$."Gallai 定理实际上对空间乃至任意 $n$ 维空间都成立.

**3. 其他问题一例**

**例**　如图 7，正 $\triangle ABC$ 的三条边的每点着黑白两色之一，则必可在 $\triangle ABC$ 的边上找到同色三点构成直角三角形.

**证明**　分别取 $AB$，$BC$，$CA$ 的三等分点 $D$，$E$，$F$，则 $DE \perp BC$，$EF \perp CA$，$FD \perp AB$. $D$，$E$，$F$ 三点中至