

高等学校“十三五”规划教材

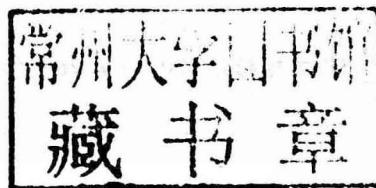
# 投资组合 理论及应用

金 辉 李甫伟 编著

高等学校“十三五”规划教材

# 投资组合理论及应用

金 辉 李甫伟 编 著



西安电子科技大学出版社

## 内 容 简 介

本书以传统金融学为基础，从投资组合分析入手，在内容编排上强调对现代投资学理论的经济学理解、数学推导和模型应用。

本书共 13 章，主要内容包括：投资组合理论概述、投资组合的收益和风险、投资组合的选择及最优化、简化的投资组合选择模型、资本市场均衡模型、有效市场假说、债券定价、债券组合管理、权益估值、期权策略、期权定价、投资组合业绩评价和行为金融学的发展。

本书适合高等院校金融、管理、经济类专业本科生使用，也可作为证券、金融实务工作者了解投资学理论的参考用书。

## 图书在版编目(CIP)数据

投资组合理论及应用/金辉，李甫伟编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2017.12

ISBN 978 - 7 - 5606 - 4782 - 1

I. ①投… II. ①金… ②李… III. ①组合投资—研究 IV. ①F830.59

## 中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 289604 号

策 划 陈 婷 马乐惠

责任编辑 滕卫红 阎 彬

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2017 年 12 月第 1 版 2017 年 12 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米×960 毫米 1/16 印张 14.25

字 数 282 千字

印 数 1~3000 册

定 价 32.00 元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 4782 - 1/F

**XDUP 5084001 - 1**

\* \* \* 如有印装问题可调换 \* \* \*

# 前　　言

投资学是金融专业的核心课程，其理论体系成为现代金融学的重要支撑。自1952年马柯威茨系统性地提出投资组合理论以来，以数量化方法为主的投资学理论就成为投资学的主流，其特征表现为对投资学理论的数学表述、理论推导和实证检验。随着金融经济数据、定量分析工具和基础财务理论可用性的不断增加，投资学越来越技术化、工程化和实证化。

本书从投资组合分析入手，在内容编排上强调对投资学理论的经济学理解、数学推导和模型应用，并涉及投资学理论中相关实证技术的简单介绍。这样做有助于学生对投资学基本概念和核心理论的理解，也为后续培养学生的实证分析和实践操作能力打下良好的基础。

本书的结构安排如下：第一章为投资组合理论概述；第二章到第六章围绕投资组合分析展开，内容涉及投资组合的收益和风险、投资组合的选择、市场均衡下的资产收益和风险，以及市场有效性等投资学的基本理论；第七章到第十二章拓展了投资学的基本理论，对债券、股票、期权和投资基金等金融产品进行了收益和风险分析、资产定价等；第十三章针对以有效市场假说为基础的传统金融学的局限性，对行为金融学及其发展做了简单的介绍。

本书是在编著者多年教学实践讲义的基础上整理而成的，在编写过程中编著者参考了大量国内外相关教材及文献，在此向原作者致以崇高的敬意。本书从构思、撰写到成稿，反反复复历经四个春秋。本书除第十三章以外，均由本人完成规划、编写和校对等工作；第十三章由李甫伟博士编写。本书编写期间也得到了骆永芳、陶兰、黄珏、金晓兰、吴盼盼、薛思鹏、刘佩佩和高歌等研究生的大力协助，他们在学习之余承担了资料查阅、打字和绘图等琐碎工作，在此一并表示感谢。

希望本书能为高等院校应用型本科生的投资学教学提供帮助。由于作者水平有限，书中可能依然存在疏漏和不足之处，欢迎读者批评指正并提出建议，请不吝致函，[jinhui@hdu.edu.cn](mailto:jinhui@hdu.edu.cn)。

金　辉

2017年10月于下沙江滨

# 目 录

<b>第一章 投资组合理论概述</b>	1
第一节 投资组合的基本概念	1
第二节 现代投资组合理论的内容	3
本章小结	6
<b>第二章 投资组合的收益和风险</b>	7
第一节 相关的统计概念	7
第二节 几种不同的收益率	9
第三节 风险调整收益	11
第四节 投资组合的期望收益和方差	13
第五节 投资组合的可行集	16
本章小结	19
<b>第三章 投资组合的选择及最优化</b>	20
第一节 有效边界	20
第二节 投资者的效用函数	22
第三节 加入无风险资产的投资组合	26
第四节 最优风险资产组合	29
第五节 最优完整投资组合	29
第六节 马柯威茨的投资组合选择过程	31
本章小结	32
<b>第四章 简化的投资组合选择模型</b>	33
第一节 单指数模型	33
第二节 单指数模型与风险分散	38
第三节 单指数模型的参数估计	40
第四节 多指数模型	43
本章小结	45
<b>第五章 资本市场均衡模型</b>	46
第一节 资本资产定价模型	46
第二节 套利定价模型	58

第三节 资本资产定价模型的实证检验 .....	65
第四节 资本资产定价的三因素模型 .....	67
本章小结 .....	71
<b>第六章 有效市场假说 .....</b>	<b>72</b>
第一节 有效市场假说概述 .....	72
第二节 事件研究法 .....	76
第三节 有效市场假说的实证检验 .....	78
本章小结 .....	85
<b>第七章 债券定价 .....</b>	<b>86</b>
第一节 债券的收益和风险 .....	86
第二节 债券定价方法 .....	95
第三节 利率的期限结构 .....	99
本章小结 .....	104
<b>第八章 债券组合管理 .....</b>	<b>105</b>
第一节 利率风险的度量 .....	105
第二节 债券组合管理方法 .....	115
本章小结 .....	122
<b>第九章 权益估值 .....</b>	<b>123</b>
第一节 基本面比较评估法 .....	123
第二节 股息贴现模型 .....	125
第三节 收益评估模型 .....	136
本章小结 .....	139
<b>第十章 期权策略 .....</b>	<b>141</b>
第一节 期权合约 .....	141
第二节 期权到期时的价值 .....	143
第三节 常用期权策略 .....	145
第四节 看涨与看跌期权的平价关系 .....	151
第五节 类似期权的证券 .....	152
本章小结 .....	157
<b>第十一章 期权定价 .....</b>	<b>158</b>
第一节 期权的价值 .....	158
第二节 期权定价方法 .....	164
第三节 含权债券的定价 .....	174
本章小结 .....	181

<b>第十二章 投资组合业绩评价</b>	182
第一节 传统的业绩评价指标	182
第二节 择时能力的分析	191
第三节 风格分析	192
第四节 基于多指数模型的业绩评价	195
本章小结	198
<b>第十三章 行为金融学的发展</b>	200
第一节 对传统金融学的挑战	200
第二节 行为金融学对市场异象的解释	203
第三节 行为金融理论模型	207
本章小结	213
<b>附录 思考题答案</b>	214
<b>主要参考文献</b>	218

# 第一章 / 投资组合理论概述

本章要点：

- 投资组合的基本概念
- 现代投资组合理论的内容

## 第一节 投资组合的基本概念

### 一、投资组合理论的起源

投资组合理论研究并解决在面临各种相互关联的、确定的或不确定的结果的条件下，理性投资者应该怎样和怎么做出最佳投资选择，把一定数量的资金按适当比例，分散投放许多不同的资产上，以实现投资者效用最大化的问题。投资组合理论(Portfolio Theory)最早是由美国著名经济学家哈里·马柯威茨(Harry Markowitz)于1952年在其论文《证券组合选择》中提出的。该论文阐述了证券收益和风险分析的主要原理与方法，建立了均值方差证券组合模型的基本框架，为投资组合理论在之后几十年间迅速充实、拓展和提高，奠定了牢固的理论基础。

### 二、证券投资的收益与风险

#### 1. 收益

收益是指财富的增值，一般用收益率表示。证券投资的目的在于投资者可获得一定的回报，即收益。不同的证券收益来源不同，如：债券投资的收益主要体现在高于固定的银行存款利率的利息和在流通市场上的买卖价差；股票投资的收益由三部分组成，即股票增值(具体表现为股票价格上升带来的收益)、股息(以股票面额计算的相对稳定的收益)和红利(指普通股的收益，其发放根据企业经营状况而定)。

#### 2. 风险

风险是指收益的不确定性，一般指遭受各种损失的可能性。股票投资的风险是指投资者达不到预期收益或遭受各种损失的可能性，可分为系统性风险和非系统性风险，如表1-1所示。

表 1-1 股票投资的风险分类

风 难 类 型	概 念 及 特 点
系统性风险	概念：由于某种因素对证券市场上所有的证券都会带来损失的可能性就是系统性风险。如：国家的某项经济政策的变化、有关法律的制定、市场风险、利率风险、购买力风险、汇率风险等 特点：强调对整个证券市场所有证券的影响，通常难以回避和消除
非系统性风险	概念：某些因素对单个证券造成损失的可能性就是非系统性风险。如：市场对某公司的产品需求减少、经营风险、财务风险、违约风险等 特点：对某个证券的个别影响，一般可以通过证券的合理投资组合来避免

### 3. 收益与风险的关系

在为投资组合的配置选择资产类型时，投资者需要考虑资产类型的潜在回报率和风险这两方面的因素。不同的投资工具有着不同的收益和风险，高风险可以用高回报来补偿，低风险则伴随着低回报。

对国库券、公司债券、共同基金、股票、期权和期货等投资工具来说，风险逐步增大，回报率也随之增大，如图 1-1 所示。

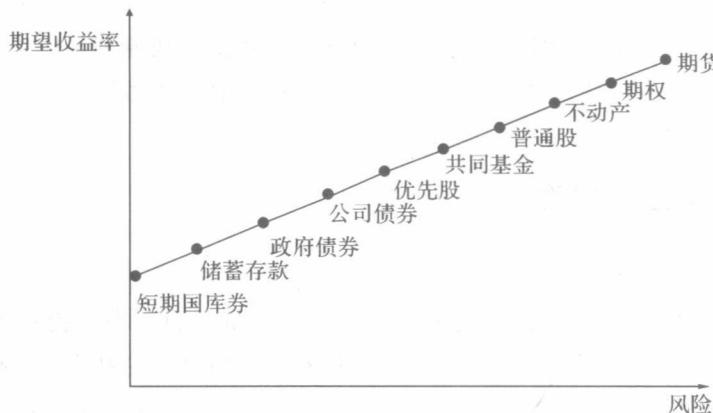


图 1-1 不同类型资产的风险与回报率

## 三、组合管理的意义

人们常用不同的篮子装鸡蛋的例子来说明资产组合能降低投资风险。资产组合理论证明，证券组合的风险随着组合所包含的证券数量和种类的增加而降低，资产关联性极低的



多元化证券组合可以有效地降低非系统风险。

投资者在进行证券投资时，不仅希望投资收益最大化，同时也希望投资风险最小化。投资者通过构建组合投资，可以在投资收益和投资风险中找到一个平衡点，即在风险一定的条件下实现收益的最大化，或在收益一定的条件下使风险达到最低。

## 第二节 现代投资组合理论的内容

### 一、马柯威茨的均值方差模型

马柯威茨于 1952 年在《金融学杂志》(Journal of Finance) 上发表了题为《证券组合选择》(Portfolio Selection) 的论文，标志着现代投资组合理论发展的开端。之后，他在 1959 年出版的《投资组合选择：有效率分散投资的策略》一书中不仅分析了分散投资的重要性，还给出了如何进行正确的分散方法；1987 年，马柯威茨在发表的《投资组合选择与资本市场中的均值一方差分析》一文中，全面阐述了自己的资产组合理论，该理论在一系列严格假设的基础上，用证券或证券组合的期望收益率表示其收益，用期望收益率的方差来衡量其风险，通过建立一个二次规划模型求解有效证券组合，并根据投资者的无差异曲线，确定投资者最满意证券组合的方法。其主要内容包括：基本的均值方差模型、证券投资组合的可行域、有效组合与有效边界、最满意证券组合的选择。

1990 年，当时在纽约市立大学任教的马柯威茨被授予诺贝尔经济学奖。

### 二、托宾的收益风险理论

著名经济学家詹姆士·托宾(James Tobin)在 1958 年 2 月的《经济研究评论》(The Review of Economic Studies) 杂志发表了《作为处理风险行为的流动性偏好》(Liquidity Preference as Behavior Toward Risk) 一文，阐述了他对风险收益关系的理解。托宾在其理论中意识到马柯威茨的模型有缺陷，马柯威茨假定投资者在构筑投资组合时是在风险资产的范围内选择的，没有考虑无风险资产和现金，实际上投资者会在持有风险资产的同时，持有国库券等低风险资产和现金。由此，托宾得出的结论是：各种风险资产在风险资产组合中的比例与风险资产组合占全部投资的比例无关。也就是说投资者的风险决策包括两个决策：一个是将多大的资产比例放在风险资产投资中，另一个是投资于风险资产的资金在各种风险资产之间如何分配。而后一个决策的依据应该是马柯威茨的模型，即无论风险偏好如何，投资者的风险资产组合都应该是相同的，都是处于有效边界上的资产组合。

托宾是 1981 年诺贝尔经济学奖得主。

### 三、夏普的单因素模型(市场模型)

威廉·夏普(William Sharpe)在马柯威茨的指导下,开始对马柯威茨模型进行简化并取得了重大进展,于1961年完成博士论文。根据其博士论文,威廉·夏普于1963年1月又在《管理科学》杂志发表了《投资组合分析的简化模型》(A Simplified Model for Portfolio Analysis)一文,文中提出了单因素模型。我们知道,运用马柯威茨的模型选择风险资产的组合需要大量的计算,严重妨碍了该模型的实际应用,而夏普提出的单因素模型则大大减少了计算量。比如,用马柯威茨的模型,如果考虑1500只股票,需要计算的估计值为1127250个,在当时利用计算机需要花费7500~15000美元。运用夏普的模型,在1500只股票中选择资产组合,只需计算4501个参数,计算量大约是马柯威茨模型的1/250。

由于夏普在投资理论方面的贡献及他所提出的资本资产定价模型,1990年他与马柯威茨等人一起获得诺贝尔经济学奖。

### 四、夏普、林特纳和莫辛对资本资产定价模型的贡献——CAPM模型

1964年9月,夏普在《金融学杂志》上发表的文章《资本资产价格:风险条件下的市场均衡理论》中,提出了著名的CAPM模型,标志着从微观分析到市场分析的转变。CAPM模型的进步在于,不是以证券收益率的方差而是以 $\beta$ 系数作为资产的风险度量指标。这不仅大大简化了马柯威茨模型中关于风险值的计算工作,而且可以对过去难以估价的证券资产的风险价格进行定价。在夏普的模型中,把马柯威茨的资产组合选择理论中的资产风险进一步分为资产的系统风险和非系统风险两部分。夏普提出一个重要的理论结论,投资的分散化只能消除非系统风险,而不能消除系统风险,即投资于任何一种证券都必须承担系统风险。

CAPM模型成为金融市场现代价格理论的核心。这个模型表明:

(1) 投资于股票的预期报酬至少要等于无风险的报酬。

(2) 由于股票投资有风险,因此,股票市场整体的报酬率相当于无风险资产有一个风险溢价。

(3) 个别股票的 $\beta$ 值决定了该股票的预期报酬。

哈佛大学经济系教授林特纳、挪威经济学家莫辛也分别于1962年2月和1966年10月发表文章,提出了与CAPM相同的模型,所以CAPM模型也称为夏普-林特纳-莫辛模型,但是由于林特纳和莫辛先后去世,所以未能获得诺贝尔奖。

### 五、套利定价理论(APT模型)

斯蒂芬·A·罗斯(Ross)对套利定价理论(Arbitrage Pricing Theory, APT)的最初建立做



出了很大的贡献。他发表在 1976 年 12 月《经济理论》杂志上的论文——《资本资产定价的套利理论》，在因素模型的基础上，提出了套利定价理论，使资本资产定价理论有了突破性发展。

与 CAPM 模型相似，APT 模型也是一种均衡的资产定价模型，它讨论的也是证券期望收益和风险之间的关系。它们之间的主要区别是：资本资产定价模型依赖于均值-方差分析，而套利定价模型则假定收益率是由一个因素(指数)模型产生的。套利定价理论的假设条件不需要像资本资产定价模型那样对投资者的偏好做出很强的假设，如 CAPM 模型假定投资者是风险规避者，而 APT 模型只要求投资者对于较高水平财富的偏好胜过对于较低水平财富的偏好。还有一个主要假设就是如果市场上存在不增加风险就能增加收益的机会，则每个投资者都会利用这个机会增加收益，即套利。套利定价理论认为，非均衡状态下套利机会的存在，使投资者进行无风险套利，最终导致均衡状态下套利机会的消失，使市场达到均衡状态。

## 六、法马的有效市场理论(EMH)

有效市场假说理论(Efficient Market Hypothesis, EMH)是由芝加哥大学教授尤金·法马(Eugene Fama)于 1970 年发表在《金融学杂志》的《有效资本市场：理论与经验研究综述》一文中正式提出的，这篇文章的发表也标志着“有效市场假说”理论体系的正式形成。法马认为，当证券价格能够充分地反映投资者可以获得的信息时，证券市场就是有效市场，即在有效市场中，无论随机选择何种证券，投资者都只能获得与投资风险相当的正常收益率。

法马根据投资者可以获得的信息种类，把有效市场分为三个层次，即弱式有效市场、半强式有效市场、强式有效市场，从此激发了金融学家们对 EMH 进行广泛的实证检验的兴趣。弱式有效市场检验(weak form test)是检验历史价格中所包含的所有信息是否充分体现在现行的价格中。半强式有效市场检验(semistrong form test)是检验公开可用的信息是否充分体现在现行的股票价格中。强式有效市场检验(strong form test)是检验所有的相关信息——公开的或内幕的信息是否充分体现在证券价格中，以及某类投资者是否可以获得超额利润。

从 20 世纪 70 年代开始，越来越多的金融学研究发现很多市场异常现象是存在的，并试图用行为金融学理论来进行解释。

## 七、金融经济学的新发展

20 世纪 80 年代，经济学家们通过大量实证研究发现了许多金融市场偏离 CAPM 的异象，比如(市值)小盘股效应、(盈利水平)价值型股票效应、(长期收益)价格反转等，而用现

代金融学无法解释。为了解释这些金融市场的异象，法马和弗伦奇提出了多因素资产定价模型。

还有一些金融学家将行为科学、认知科学和心理学的研究成果应用于对投资者的行为分析。至 20 世纪 90 年代，这个领域涌现了大量高质量的理论和实证文献，形成了最具活力的行为金融学派。1999 年克拉克奖得主马修(Matthew Rabin)、2002 年诺贝尔奖得主丹尼尔(Daniel Kahneman)和弗农(Vernon Smith)都是这个领域的代表人物，他们为这个领域的基础理论做出了重要贡献。行为金融理论认为，证券的市场价格并不只由证券内在的价值所决定，还在很大程度上受到投资者主体行为的影响，即投资者心理与行为对证券市场的价格决定及其变动具有重大影响。行为金融理论是和有效市场假说相对应的一种学说，主要内容可分为套利限制和心理学两部分。

## 本章小结

(1) 投资组合理论研究并回答在面临各种相互关联的、确定的或是不确定的结果的条件下，理性投资者应该怎样和怎么做出最佳投资选择，把一定数量的资金按合适比例，分散投放在许多不同的资产上，以实现投资者效用的最大化。

(2) 现代投资组合理论主要包括投资组合优化理论(马柯威茨的均值方差模型、托宾的收益风险理论、夏普的单因素模型)和资本市场均衡理论(资本资产定价模型、套利定价模型)，其理论基础是有效市场假说，即假设投资者都是理性的，证券的价格反映所有信息。

(3) 投资组合理论的应用是指以现代投资组合理论为基础，对各类金融资产进行产品定价、收益预测和风险管理等。

# 第二章 投资组合的收益和风险

## 本章要点：

- 相关的统计概念
- 几种不同的收益率
- 风险调整收益
- 投资组合的期望收益和方差
- 投资组合的可行集

## 第一节 相关的统计概念

### 一、一些统计的概念

#### 1. 期望值和方差

在不确定条件下考察某一变量，当不同情形发生时变量取值不同。期望值是指以不同情形发生的概率为权重的所有变量取值的加权平均，用公式表示为

$$E(r) = \sum_{i=1}^n P_i r_i$$

方差是变量取值偏离其期望值的平方的加权平均，用公式表示为

$$\sigma^2(r) = \sum_{i=1}^n P_i [r_i - E(r)]^2$$

标准差是方差的平方根。方差和标准差提供了测量不确定性的一种方法。

期望收益率和方差是描述单个证券收益率分布的两个重要的数学特征。

#### 2. 协方差和相关系数

现实中，证券之间往往具有相互关联性，一种证券价格的上涨可能伴随着另一种证券价格的上涨，或者是一种证券价格的上涨很可能伴随着另一种证券价格的下跌。统计学的协方差和相关系数提供了描述这种关联性的有效工具。协方差用公式表示为

$$\text{cov}(r_A, r_B) = E\{[r_A - E(r_A)][r_B - E(r_B)]\} = E(r_A \cdot r_B) - E(r_A) \cdot E(r_B)$$

相关系数用公式表示为

$$\rho_{AB} = \frac{\text{cov}(r_A, r_B)}{\sigma_A \sigma_B}$$

### 3. 判定系数

相关系数的平方即为判定系数，它表示某一投资收益的可变性与另一投资收益的可变性有关的部分究竟占多大的百分比。比如，股票 A 和股票 B 的相关系数为 0.90，那么可以说股票 A 收益率变动的 81% 与股票 B 的收益率变动有关。

## 二、正态分布假设

### 1. 正态分布

许多变量的取值最终大都因多个随机变量的影响，而呈现一个正态分布的特征，因此，在大多数实际应用中会自然地采用正态分布。图 2-1 所示为正态分布密度函数示意图。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

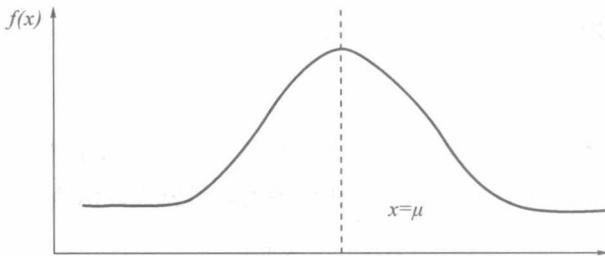


图 2-1 正态分布密度函数示意图

当收益率近似正态分布时，投资管理会容易掌握。第一，正态分布是对称的，对均值的正偏离和负偏离的概率相等，所以可以用收益率的标准差来度量风险。第二，正态分布是唯一的变化稳定的分布，用收益率服从正态分布的资产来构造投资组合，投资组合的收益率也是正态的。第三，只用两个参数的估计就能获得未来事件的概率，使得事件分析大大简化。

### 2. 正态分布的偏离

为了评价正态分布假设是否正确，可以考察对正态的偏离程度。资产收益对正态分布的偏离可以通过计算收益分布的高阶矩来度量，一般采用偏度和峰度两个指标。偏度是关于不对称的度量；峰度用来度量厚尾的程度，考虑的是分布两端极端值出现的可能性是



否变大。用公式表示为

(1) 偏度：

$$\text{skew} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i [r_i - E(r)]^3}{\sigma^3}$$

(2) 峰度：

$$\text{kurtosis} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i [r_i - E(r)]^4}{\sigma^4} - 3$$

当分布偏度为正时(偏度大于0)，标准差高估风险；相反，当分布偏度为负时，标准差会低估风险。任何峰度大于0时表示其分布相对于正态分布存在厚尾特征。

**【例 2-1】** 假定沪深300的月收益率近似符合均值为1%，标准差为6%的正态分布。那么在任何一个月指数收益率为负的概率是多少？收益率低于-15%的概率是多少？

解 采用EXCEL中的NORMDIST函数可以得到概率如下：

$$\text{NORMDIST}(-1/6)=0.4338 \text{ 即 } P\{x \leq 0\}=P\left\{\frac{x-1}{6} \leq \frac{-1}{6}\right\}=\phi\left(-\frac{1}{6}\right)=0.4338$$

$$\text{NORMDIST}(-16/6)=0.0383 \text{ 即 } P\{x \leq -15\}=P\left\{\frac{x-1}{6} \leq \frac{-15-1}{6}\right\}=\phi\left(-\frac{8}{3}\right)=0.0383$$

## 第二节 几种不同的收益率

为了便于比较投资收益的大小，通常对收益的度量标准化，即

$$\text{收益率} = \frac{\text{期末财富} - \text{期初财富}}{\text{期初财富}}$$

### 一、不同持有期的收益率

观察和考察不同期限的零息国库券。假设零息国库券是指以票面价值折价出售，其收益来自于购买价和最终票面价值的差价。假设国库券价格为  $P(T)$ ，面值为100元，持有期为T年，我们把期限为T年的无风险收益率表示成投资价值增长的百分比，即

$$r_f(T) = \frac{100}{P(T)} - 1$$

当T为1时，上述式子即为1年期的无风险收益率。

**【例 2-2】** 假定面值为100元的零息国库券的价格和不同的年限如下表2-1所示，运用上述式子可以计算出每一种证券的总收益率。

表 2-1 不同年限的国库券收益率

期限 $T$	价格 $P(T)$ (元)	$[100/P(T)] - 1$	该期限的无风险收益率(%)
半年	97.36	0.0271	2.71
1 年	95.52	0.0469	4.69
25 年	23.30	3.2918	329.18

从上述例子中，可以看出持有期越长，总收益越高。要比较不同持有期的投资收益，需要将每一个总收益换算成某一常用期限的收益率，一般采用年化收益率的方法。

## 二、收益率的年化

### 1. 有效年利率(EAR)

通常把所有的投资收益表达为有效年利率(Effective Annual Rate, EAR)，即一年期投资价值增长百分比。对于一年期的投资来说，有效年利率等于总收益  $r_f(1)$ 。对于期限少于一年的投资，可以把每一阶段的收益按复利计算到一年。比如：对于例 2-2 中半年的投资，按 2.71% 的收益率复利计算得到的一年后的投资终值为  $1 + \text{EAR} = 1.0271^2 = 1.0549$ ，意味着  $\text{EAR} = 5.49\%$ 。对于投资期长于一年的投资来说，通常把有效年利率作为年收益率。

把有效年利率与总收益  $r_f(T)$  联系在一起，运用下面的公式计算持有期为  $T$  时的回报。

$$1 + \text{EAR} = [1 + r_f(T)]^{1/T}$$

### 2. 年化百分比利率(APR)

短期投资(通常情况下  $T < 1$ )的收益率是通过简单利率而不是复利来计算的，即采用年化百分比利率(Annual Percentage Rate, APR)。通常来说，如果把一年分为  $n$  个相等的期间，并且每一期间的利率是  $r_f(T)$ ，那么， $\text{APR} = n \times r_f(T)$ 。反之，可以通过年化百分比利率得到每个期间的实际利率  $r_f(T) = T \times \text{APR}$ 。

总之，对一个期限为  $T$  的短期投资来说，每年有  $n = 1/T$  个复利计算期。因此，复利计算期、有效年利率和年化百分比利率的关系可以用以下公式来表示

$$1 + \text{EAR} = [1 + r_f(T)]^n = [1 + r_f(T)]^{1/T} = [1 + T \times \text{APR}]^{1/T}$$

$$\text{APR} = \frac{(1 + \text{EAR})^T - 1}{T}$$

**【例 2-3】** 运用上述公式可以得出有效年利率为 5.8% 的情形下与不同复利计算期限时相对应的年化百分比利率。相反，同样可以得到年化百分比利率为 5.8% 时有效年利率